مکانیک برداری برای مهندسان (جلد ۱)

استاتیک

ترجمه دکتر ابراهیم واحدیان

فردیناند پی. بی‌یر ، ای. راسل جانستون ، الیوت ار. آیزنبرگ ، ویلیام ای. کلاوزن

با همکاری

دیوید اف. ماژورک ، فیلیپ جِی ، کورنوِل

مکانیک برداری برای مهندسان (جلد ۱)

استاتیک

ویراست هشتم

ترجمه دکتر ابراهیم واحدیان

نشر علوم دانشگاهی

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS (Vol. 1: STATICS)
Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, JR., Elliot R. Eisenberg, William E. Clausen,
With the collaboration of David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell
8th Edition
Mc Graw-Hill Book Co.

نشر علوم دانشگاهی

مکانیک برداری برای مهندسان، جلد اول استاتیک (ویراست هشتم)

تألیف **فردیناند پی. بی‌یر ، ای. راسل جانستون ، الیوت ار. آیزنبرگ ، ویلیام ای. کلاوزن،**
با همکاری دیوید اف. ماژورک ، فیلیپ جی. کورنول

ترجمهٔ **دکتر ابراهیم واحدیان**
ویراستهٔ **محمد حسن‌پور**

آماده‌سازی پیش از چاپ: مؤسسه نشر وف **با همکاری: آناهیتا کاویانی، حمیدرضا شعبانی، آیدا جاموسی**

چاپ سوم: ۱۳۹۱
۱۱,۰۰۰ نسخه
قیمت: ۱۸۰۰۰ تومان

لیتوگرافی: نورنگ
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ نقش و نگار
شابک: ۰ - ۹۱ - ۶۱۸۶ - ۹۶۴ - ۹۷۸ / ISBN: 978-964-6186-91-0

حقوق چاپ برای نشر علوم دانشگاهی محفوظ است.

عنوان و نام پدیدآور	:	مکانیک برداری برای مهندسان استاتیک/ فردیناند پی بی‌یر...[و دیگران]؛ ترجمه ابراهیم واحدیان.
مشخصات نشر	:	تهران: نشر علوم دانشگاهی، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	:	۴۰۰ص.؛ مصور ۲۲×۲۹ س م.
شابک	:	ISBN: 978-964-6186-91-0
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	عنوان اصلی: Vector mechanics for engineers, Statics and dynamics, 8th ed, c2007.
یادداشت	:	مؤلفان فردیناند پی. بی‌یر، ای. راسل جانستون، الیوت ار. آیزنبرگ، ویلیام ای...
موضوع	:	مکانیک عملی
موضوع	:	بردارها
موضوع	:	دینامیک
موضوع	:	استاتیک
شناسه افزوده	:	بیر، فردیناند پیر، ۱۹۱۵-۲۰۰۳م.
شناسه افزوده	:	Beer, Ferdinand Pierre
شناسه افزوده	:	واحدیان، ابراهیم، ۱۳۰۴-، مترجم
رده‌بندی کنگره	:	TA ۳۵۰ /م۷ ۱۳۹۰
رده‌بندی دیویی	:	۶۲۰/۱۰۵
شماره کتابشناسی ملی	:	۲۳۱۹۵۰۳
تاریخ درخواست	:	۱۳۹۰/۰۲/۰۶
تاریخ پاسخگویی	:	۱۳۹۰/۰۲/۰۷
کد پیگیری	:	2318720

تهران: خیابان آزادی، خیابان جمال‌زاده جنوبی، ساختمان شماره ۱۴۰، پلاک ۹۴، واحد ۲.
کدپستی: ۱۳۱۳۸۳۶۳۷۳، صندوق پستی۳۲۴/ ۳۱۴۵، تلفن: ۳- ۷۰ ۷۸ ۵۹ ۶۶، نمابر ۷۴ ۷۸ ۵۹ ۶۶

فهرست

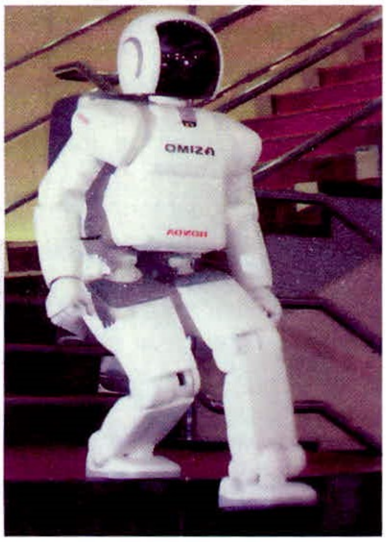
سخن ناشر نه
پیشگفتار مترجم ده
درباره مؤلفان یازده
فهرست نمادها سیزده

فصل ۱. مقدمه ۱

۱.۱ مکانیک چیست؟ ۲
۲.۱ مفاهیم و اصول بنیادی ۲
۳.۱ سیستم یکاها ۴
۴.۱ تبدیل یک سیستم از یکاها به سیستم دیگر ۶
۵.۱ روش حل مسئله ۷
۶.۱ دقت عددی ۸

فصل ۲. استاتیک ذره‌ها ۹

۱.۲ مقدمه ۱۰
نیروهای واقع در صفحه ۱۰
۲.۲ نیروی وارد بر یک ذره. برایند دو نیرو ۱۰
۳.۲ بردارها ۱۱
۴.۲ جمع بردارها ۱۱
۵.۲ برایند چند نیروی همرس ۱۳
۶.۲ تجزیهٔ یک نیرو به مؤلفه‌های آن ۱۳
۷.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو. بردارهای یکه ۱۷
۸.۲ جمع نیروها از طریق جمع بستن مؤلفه‌های x و y آنها ۱۹
۹.۲ تعادل یک ذره ۲۲
۱۰.۲ قانون اول نیوتون درباره حرکت ۲۳
۱۱.۲ مسئله‌های مربوط به تعادل یک ذره. نمودارهای جسم آزاد ۲۳
نیروها در فضا ۲۹
۱۲.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو در فضا ۲۹
۱۳.۲ نیرو با بزرگی‌اش و دو نقطه واقع بر روی خط اثرش تعریف می‌شود ۳۱
۱۴.۲ جمع بستن نیروهای همرس در فضا ۳۱
۱۵.۲ تعادل ذره در فضا ۳۶
دوره و خلاصه فصل ۲ ۴۰
مسئله‌های دوره‌ای ۴۲
مسئله‌های کامپیوتری ۴۴



فصل ۳. اجسام صلب: سیستم نیروهای معادل ۴۷

۱.۳ مقدمه ۴۸
۲.۳ نیروهای خارجی و نیروهای داخلی ۴۸
۳.۳ اصل قابلیت انتقال. نیروهای معادل ۴۹
۴.۳ ضرب برداری دو بردار ۵۰
۵.۳ حاصلضرب برداری برحسب مؤلفه‌های قائم ۵۱
۶.۳ گشتاور نیروی حول یک نقطه ۵۲
۷.۳ قضیه وارینون ۵۳
۸.۳ مؤلفه‌های قائم گشتاور یک نیرو ۵۳
۹.۳ ضرب اسکالر دو بردار ۶۰
۱۰.۳ ضرب سه‌گانه مختلط سه بردار ۶۲
۱۱.۳ گشتاور یک نیرو حول محور معین ۶۳
۱۲.۳ گشتاور کوپل ۶۸
۱۳.۳ کوپلهای معادل ۶۹
۱۴.۳ جمع‌بستن کوپلها ۷۱
۱۵.۳ کوپلها را می‌توان با بردار نمایش داد ۷۱
۱۶.۳ تجزیه یک نیروی معین به یک نیرو در نقطهٔ O و یک کوپل ۷۱
۱۷.۳ تبدیل سیستم نیروها به یک نیرو و یک کوپل ۷۸
۱۸.۳ سیستم نیروهای معادل ۷۹
۱۹.۳ سیستم بردارهای هم‌سنگ ۷۹
۲۰.۳ بیشتر خلاصه کردن سیستم نیروها ۷۹
۲۱.۳ خلاصه‌کردن سیستم نیروها به یک رنچ ۸۱
دوره و خلاصه فصل ۳ ۹۲
مسئله‌های دوره‌ای ۹۵
مسئله‌های کامپیوتری ۹۷

فصل ۴. تعادل اجسام صلب ۹۹

۱.۴ مقدمه ۱۰۰
۲.۴ نمودار جسم آزاد ۱۰۰

تعادل در دوبعد ۱۰۱

۳.۴ عکس‌العملها در تکیه‌گاهها و اتصالهای سازه‌های دوبعدی ۱۰۱
۴.۴ تعادل یک جسم صلب در دوبعد ۱۰۲
۵.۴ عکس‌العملهای از لحاظ استاتیکی نامعین. قیدهای ناقص ۱۰۳
۶.۴ تعادل جسم دونیرویی ۱۱۴
۷.۴ تعادل جسم سه‌نیرویی ۱۱۵

تعادل در سه‌بعد ۱۱۹

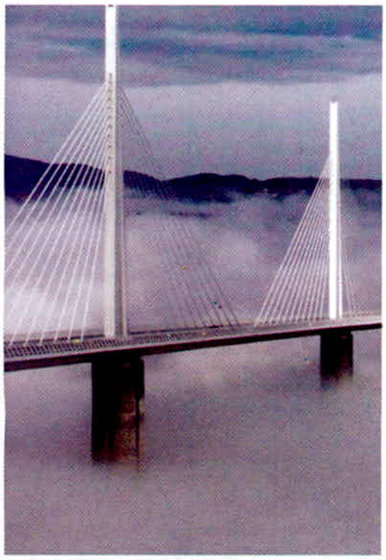
۸.۴ تعادل جسم صلب در سه‌بعد ۱۱۹
۹.۴ عکس‌العملها در تکیه‌گاهها و اتصالهای سازه‌های سه‌بعدی ۱۱۹
دوره و خلاصه فصل ۴ ۱۳۱
مسئله‌های دوره‌ای ۱۳۱
مسئله‌های کامپیوتری ۱۳۳

فصل ۵. نیروهای گسترده: مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی ۱۳۷

۱.۵ مقدمه ۱۳۸

سطحها و خطها ۱۳۸

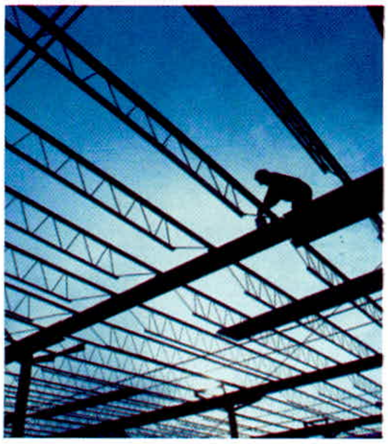
۲.۵ مرکزگرانی جسم دوبعدی ۱۳۸
۳.۵ مرکزهای هندسی سطوح و خطوط ۱۳۸
۴.۵ گشتاورهای اول سطوح و خطوط ۱۳۹
۵.۵ ورقها و سیمهای مرکب ۱۴۱
۶.۵ تعیین مرکزهای هندسی به روش انتگرال‌گیری ۱۴۷



۷.۵ قضیه‌های پاپوس-گلدینوس ۱۴۸
۸.۵ بارهای گسترده روی تیرها ۱۵۴
۹.۵ نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور ۱۵۵
حجمها ۱۶۰
۱۰.۵ مرکز گرانی جسم سه‌بعدی ــ مرکز هندسی حجم ۱۶۰
۱۱.۵ جسمهای مرکب ۱۶۲
۱۲.۵ تعیین مرکز هندسی حجم به روش انتگرال‌گیری ۱۶۲
دوره و خلاصه فصل ۵ ۱۶۹
مسئله‌های دوره‌ای ۱۷۱
مسئله‌های کامپیوتری ۱۷۲

فصل ۶. تحلیل سازه‌ها ۱۷۵

۱.۶ مقدمه ۱۷۶
خرپاها ۱۷۷
۲.۶ تعریف خرپا ۱۷۷
۳.۶ خرپاهای ساده ۱۷۷
۴.۶ تحلیل خرپاها به‌روش مفصلها ۱۷۸
۵.۶ مفصلهای تحت شرایط بارگذاری خاص ۱۸۰
۶.۶ خرپاهای فضایی ۱۸۱
۷.۶ تحلیل خرپاها به‌روش مقاطع ۱۸۷
۸.۶ خرپاهای ساخته شده از چند خرپای ساده ۱۸۷
قابها و ماشینها ۱۹۴
۹.۶ سازه‌های دارای عضوهای چندنیرویی ۱۹۴
۱۰.۶ تحلیل یک قاب ۱۹۴
۱۱.۶ قابهایی که در صورت جداشدن از تکیه‌گاههایشان دیگر صلب نیستند ۱۹۵
۱۲.۶ ماشینها ۲۰۴
دوره و خلاصه فصل ۶ ۲۱۱
مسئله‌های دوره‌ای ۲۱۲
مسئله‌های کامپیوتری ۲۱۴



فصل ۷. نیروها در تیرها و کابلها ۲۱۷

۱.۷ مقدمه ۲۱۸
۲.۷ نیروهای داخلی در عضوها ۲۱۸
تیرها ۲۲۳
۳.۷ انواع مختلف بارگذاری و تکیه‌گاه ۲۲۳
۴.۷ برش و گشتاور خمشی در تیر ۲۲۳
۵.۷ نمودارهای برش و گشتاور خمشی ۲۲۴
۶.۷ روابط میان بار، برش، و گشتاور خمشی ۲۳۰
کابلها ۲۳۶
۷.۷ کابلهای حامل بارهای متمرکز ۲۳۶
۸.۷ کابلهای با بارهای گسترده ۲۳۷
۹.۷ کابل با منحنی سهمی ۲۳۷
۱۰.۷ کابل با منحنی زنجیری ۲۴۳
دوره و خلاصه فصل ۷ ۲۴۷
مسئله‌های دوره‌ای ۲۴۸
مسئله‌های کامپیوتری ۲۵۰

فصل ۸. اصطکاک ۲۵۳

۱.۸ مقدمه ۲۵۴
۲.۸ قوانین اصطکاک خشک. ضرایب اصطکاک ۲۵۴
۳.۸ زاویه‌های اصطکاک ۲۵۵
۴.۸ مسئله‌های مربوط به اصطکاک خشک ۲۵۶

۵.۸ گوه‌ها ۲۶۵
۶.۸ پیچهای دنده چهارگوش ۲۶۶
۷.۸ یاتاقانهای بوشی، اصطکاک محوری ۲۶۹
۸.۸ یاتاقانهای کف‌گرد، اصطکاک دیسکی ۲۷۲
۹.۸ اصطکاک چرخ، مقاومت غلتشی ۲۷۲
۱۰.۸ اصطکاک تسمه ۲۷۶
دوره و خلاصه فصل ۸ ۲۸۲
مسئله‌های دوره‌ای ۲۸۴
مسئله‌های کامپیوتری ۲۸۶

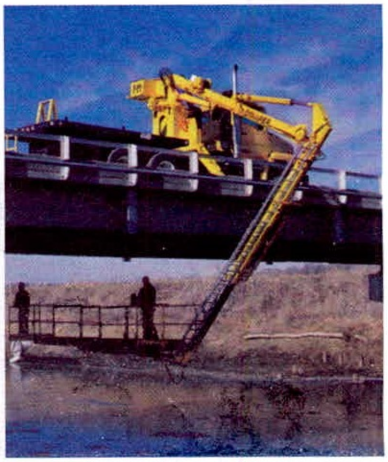
فصل ۹. نیروهای گسترده: گشتاورهای لختی ۲۸۷

۱.۹ مقدمه ۲۸۸
گشتاورهای لختی سطوح ۲۸۹
۲.۹ گشتاور دوم، یا گشتاور لختی، یک سطح ۲۸۹
۳.۹ تعیین گشتاور لختی یک سطح به‌روش انتگرال‌گیری ۲۸۹
۴.۹ گشتاور لختی قطبی ۲۹۰
۵.۹ شعاع چرخش یک سطح ۲۹۱
۶.۹ قضیه محورهای موازی ۲۹۴
۷.۹ گشتاورهای لختی سطوح مرکب ۲۹۵
۸.۹ حاصلضرب لختی ۳۰۳
۹.۹ محورهای اصلی و گشتاورهای لختی اصلی ۳۰۴
۱۰.۹ دایره مور برای تعیین گشتاورها و حاصلضربهای لختی ۳۰۹
گشتاورهای لختی جرمها ۳۱۲
۱۱.۹ گشتاور لختی یک جرم ۳۱۲
۱۲.۹ قضیه محورهای موازی ۳۱۳
۱۳.۹ گشتاورهای لختی ورقهای نازک ۳۱۴
۱۴.۹ تعیین گشتاور لختی یک جسم سه‌بعدی با انتگرال‌گیری ۳۱۵
۱۵.۹ گشتاور لختی اجسام مرکب ۳۱۵
۱۶.۹ گشتاور لختی جسم نسبت به محور دلبخواهی که از O می‌گذرد. حاصلضرب لختی جرم ۳۲۵
۱۷.۹ بیضوی لختی. محورهای اصلی لختی ۳۲۶
۱۸.۹ تعیین محورهای اصلی و گشتاورهای اصلی لختی یک جسم با شکل دلبخواه ۳۲۷
دوره و خلاصه فصل ۹ ۳۳۳
مسئله‌های دوره‌ای ۳۳۶
مسئله‌های کامپیوتری ۳۳۸

فصل ۱۰. روش کار مجازی ۳۴۱

۱.۱۰ مقدمه ۳۴۲
۲.۱۰ کار یک نیرو ۳۴۲
۳.۱۰ اصل کار مجازی ۳۴۴
۴.۱۰ کاربردهای اصل کار مجازی ۳۴۴
۵.۱۰ ماشینهای واقعی، بازده مکانیکی ۳۴۶
۶.۱۰ کار یک نیرو در حین یک جابه‌جایی محدود ۳۵۴
۷.۱۰ انرژی پتانسیل ۳۵۵
۸.۱۰ انرژی پتانسیل و حالت تعادل ۳۵۶
۹.۱۰ پایداری تعادل ۳۵۶
دوره و خلاصه فصل ۱۰ ۳۶۲
مسئله‌های دوره‌ای ۳۶۴
مسئله‌های کامپیوتری ۳۶۵

پاسخ مسائل ۳۶۷
واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۳۸۱
واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۳۸۲
نمایه ۳۸۳



سخن ناشر

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

نشر علوم دانشگاهی مؤسسه‌ای است که از سال ۱۳۶۵ با هدف ارائه کتابهای درسی مناسب برای دانشجویان آغاز به کارکرد و در این راه کوشید با استفاده از تجربیات مؤسساتی که قبلاً در این راه گام برداشته بودند، از آسیب‌پذیری رایج در عرصهٔ کتابهای دانشگاهی بکاهد. خوشبختانه این تلاش با حسن‌نظر استادان و دانشجویان روبه‌رو شد. استقبال وسیع از کتابهای این مؤسسه، صرف‌نظر از دلگرم‌کردن ما، مسئولیت ما را در ارائهٔ خدمات بهتر افزون ساخت. هدفهایی که مؤسسه ما پیش‌روی خود قرار داده عبارت‌اند از:

۱. کیفیت علمی بالاتر از طریق تعمق بیشتر در حیطه‌های ترجمه، تألیف و ویرایش؛

۲. ارائهٔ کتاب با خصوصیات ظاهری بهتر برای ماندگاری کتاب و استفادهٔ بهینه از آن؛

۳. تا حد امکان ارزان ارائه کردن کتاب به نحوی که خرید آن برای داشجویان آسانتر باشد؛

۴. روزآمد کردن کتابهای مؤسسه از طریق انطباق ترجمه‌های موجود با آخرین ویراستِ متن اصلی؛

۵. تأمین نیاز دانشجویان به‌صورت پیوسته به نحوی که کتابهای ما به بازار سیاه راه پیدا نکند.

حیطه‌های کار نشر علوم دانشگاهی عبارت‌اند از علوم پایه، فنی و مهندسی. از استادان، مؤلفان و مترجمان این حوزه‌ها می‌خواهیم با ارائه نقد و نظر دربارهٔ کتابهای این مؤسسه و پیشنهادهای ترجمه و تألیف، ما را یاری دهند.

پیشگفتار مترجم

خارج از اندیشه و ذهن مجرد علمی بشری، همواره تجسمی عینی که زاییدهٔ آن اندیشهٔ علمی است به‌صورت صنعت و هنر خودنمایی می‌کند و نتیجهٔ اخیر است که مآلاً به پیشبرد شایسته و مناسب مقاصد غایی بشری در تعالی وی کمک می‌کند.

با توجه به مسائل فوق تجاربی که در سالهای متمادی تدریس کسب کرده بودم، لزوم وجود کتب علمی و فنی را کاملاً حس کرده، تا همزمان با بالابردن سطح معلومات نظری دانشجویان کشورم، برای آنها ارائه‌دهندهٔ طریقی باشم که بتوانند به کمک آن، آموخته‌های خود را، خارج از ذهن خویش تجسم بخشند و سهمی در علوم و اکتشافات عصر خود ایفا کنند.

اثر ترجمه شده این ویراست از استاتیک نتیجهٔ زحمات چندین سالهٔ مؤلفان آن، **فردیناند پی. بی‌یر** (از دانشگاه لی‌های) و **ای. راسل جانستون** (از دانشگاه کانکتیکوت) است. در این ویراست علاوه بر مؤلفان پیشین، **الیوت ار. آیزنبرگ** (از دانشگاه کورنل)، **ویلیام ای. کلاوزن** (از دانشگاه لی‌های) و **جورج اچ. استاب** (از دانشگاه پوردو) نیز همکاری کرده‌اند. همین امر باعث شده است که ارزشهای علمی آن به نحو مطلوبی بالا برود. بدیهی است که این مسئله در تدریس اساتید گرامی و فراگیری و درک دانشجویان عزیز تأثیر بسزایی دارد.

حدود ۳۰ سال است که از اولین ترجمهٔ این کتاب می‌گذرد. خوشبختانه در تمام ویراستها با استقبال فراوان اساتید محترم و دانشجویان گرامی روبه‌رو شده‌ایم. به همین دلیل براساس نظریات همین عزیزان ترجمهٔ ویراست هشتم کتاب را که برحسب هر دو یکای SI و U.S. بیان شده است، انتخاب کرده‌ایم. به‌طور تقریبی نیمی از مسائل و تمرینات برحسب SI و نیمی دیگر برحسب U.S. هستند.

- در هر فصل برای فهم کلی هر درس و شیوهٔ حل مسئله‌های تکلیفی داشجویان، مسئله‌های نمونهٔ زیادی نیز برای آمادگی بیشتر و درک بهتر دانشجویان مطرح و حل شده است.
- در ابتدای هر فصل، عنوانهای اصلی آن فصل آورده شده است که نقطه‌نظرات کلی آن فصل در یک نگاه مشهود است.
- در پایان هر فصل خلاصه و بازنگری آن فصل مجدداً آورده شده است. نتیجتاً در تفهیم مطالب تأثیر بسزایی دارد.
- پس از اتمام هر فصل و پیش از شروع تمرینات و مسائل آن فصل، بخشی با عنوان «چگونه مسئله حل کنیم» آمده است که با مطالعهٔ آن حل مسائل و تمرینات آسانتر خواهد شد.
- پاسخ نزدیک به ۷۰٪ از مسئله‌ها در انتهای کتاب آورده شده است. دانشجویان پس از حل مسائل، با مراجعه به پاسخها به صحت و سقم حل آنها پی خواهند برد.

ویراستاری کتاب را آقای محمد حسن‌پور با دقتی مناسب به عهده گرفتند که از زحمات ایشان قدردانی می‌شود.

نسخه‌پردازی و امور فنی و هنری کتاب به عهدهٔ آقای محمد حسن‌پور و حروفچینی و صفحه‌آرایی آن به عهدهٔ خانم آناهیتا کاویانی بوده است. در اینجا لازم می‌دانم از زحمات بی‌وقفه آنها تشکر کنم. همچنین از دقت فراوان مدیر محترم «نشر علوم دانشگاهی» که در چاپ و عرضهٔ شایستهٔ این کتاب سعی بلیغ مبذول داشته‌اند سپاسگزاری می‌کنم.

با تمام کوششی که برای ارائهٔ بدون غلط این اثر به عمل آمده است، کتاب خالی از اشکال نیست. از همکاران دانشمند و دانشجویان ارجمند مستدعی است همچون گذشته، نظرات و پیشنهادهای اصلاحی خود را از طریق ناشر محترم متذکر شوند. بدیهی است که نظرات اصلاحی آنان در چاپهای بعدی منعکس خواهد شد. پیشاپیش از همکاری صمیمانه‌ای که ابراز می‌دارید، سپاسگزارم.

دربارهٔ مؤلفان

فردیناند پی. بی‌یر و راسل جانستون که یکی از موفقترین گروههای مؤلفان تألیف کتابهای مهندسی‌اند، اغلب با این سؤال مواجه می‌شوند که چگونه توانسته‌اند در تألیف این کتابهایشان همکاری داشته باشند، زیرا اولی در داشگاه لی‌های و دیگری در دانشگاه کانکتیکوت بودند.

جواب این سؤال آسان است. راسل جانستون ابتدا در بخش مهندسی عمران و مکانیک دانشگاه لی‌های تدریس می‌کرد. او در آنجا با فردیناند بی‌یر که از دو سال پیش در آن بخش بود و مسئولیت آن بخش را به عهده داشت، آشنا شد. فردیناند حس می‌کرد مرد جوانی که برای تدریس مهندسی سازه به آنجا آمده است می‌تواند در سازماندهی دوره‌های مکانیک به او کمک کند. هر دو بر این باور بودند که این دوره‌ها باید پایهٔ اصلی آموزش باشند. سایر مفاهیم به شرطی قابل فهم و قابل درک‌اند که به روشهای ترسیمی و نموداری عرضه شوند. آنها به کمک هم مطالبی در زمینه استاتیک و دینامیک نوشتند. سپس مسئله‌هایی را که در فهم مطالب به دانشجویان کمک می‌کرد به مطالب افزودند. به این ترتیب در سال ۱۹۵۶ اولین ویراست مکانیک برای مهندسان تهیه شد.

ویراست دوم مکانیک برای مهندسان و ویراست اول مکانیک برای مهندسان را راسل جانستون در انستیتو پلی‌تکنیک ورستر و ویراستهای بعدی را در دانشگاه کانکتیکوت آماده کرد. در این ایام این دو در بخشهای خود مسئولیتهای اجرایی مهمی داشتند و به تحقیقات می‌پرداختند، ضمناً سرپرستی دانشجویان را نیز به عهده داشتند. فردیناند در زمینهٔ فرایندهای نامنظم و نوسانهای تصادفی و راسل در زمینهٔ پایداری کشسانی و طراحی سازه فعالیت داشتند، اما همواره به توسعهٔ آموزش مکانیک می‌اندیشیدند. هر دو ضمن تدریس قسمتهایی از این مبحث به تجدیدنظر کتابهایشان نیز می‌پرداختند. در همین زمان ویراست اول کتاب مقاومت مصالح آماده شد.

فردیناند و راسل ضمن همکاریهای موفقیت‌آمیز، نقش مهمی در آموزش مهندسی نیز داشتند. در همین راستا جوایز متعددی از بخش مکانیک انجمن مهندسی امریکا دریافت کردند. در سال ۲۰۰۱ نشان جدید بخش مکانیک به نام بی‌یر تزیین یافت.

فردیناند پی. بی‌یر. او در فرانسه به دنیا آمد و در آنجا و سوئیس به تحصیل پرداخت و مدرک .M.S خود را از دانشگاه سوربن و .Sc.D در مکانیک نظری را از دانشگاه ژنو دریافت کرد. پس از انجام خدمت سربازی در ارتش فرانسه در اوایل جنگ جهانی دوم به ایالات متحده امریکا رفت. او درکالج ویلیام برنامه‌ریزی صنعتی می‌کرد. سپس به داشگاه لی‌های پیوست. وی ۳۷سال در آنجا تدریس می‌کرد. عناوینی همچون استادی ممتاز و ریاست بخش مهندسی مکانیک را به دست آورد. در ۱۹۹۵ دکتری افتخاری مهندسی را از دانشگاه لی‌های دریافت کرد.

ای. راسل جانستون. او در فیلادلفیا متولد شد. مدرک .B.S در مهندسی عمران را از دانشگاه دلاوار و درجهٔ .Sc.D را در مهندسی ساختمان از انستیتو تکنولوژی ماساچوست دریافت کرد. ابتدا در دانشگاه لی‌های و انستیتو ورستر تدریس می‌کرد، سپس به دانشگاه کانکتیکوت رفت و رییس بخش مهندسی عمران شد و ۲۶ سال تدریس کرد. در ۱۹۹۱ از طرف انجمن مهندسان عمران دانشگاه کانکتیکوت نشان برجستهٔ مهندسی عمران را دریافت کرد.

الیوت ار. ایزنبرگ. او مدرک .B.S و .M.E را در مهندسی از دانشگاه کورنل دریافت کرد. به خاطر خدماتی که در انجمن آموزش مهندسی امریکا انجام داده بود مدال Ben C. Sparks را دریافت کرد. او ۳۲ سال به تدریس پرداخت. ۲۹ سال آن را در دانشگاه ایالتی پن گذراند. در این دانشگاه به خاطر آموزش و مشاوره به دریافت نشانهایی دست یافت.

ویلیام ای. کلاوزن. بیل مدرک .B.S را در مکانیک مهندسی از دانشگاه لی‌های و مدرک .M.S و .Ph.D را در مکانیک مهندسی از دانشگاه اوهایو دریافت کرد. او ۳۰ سال است که تدریس می‌کند و یک مهندس حرفه‌ای و کارشناس دینامیک ساختمان و اندازه‌گیری در ارتعاشات است. وی در دانشگاه اوهایو در بخش مکانیک تدریس می‌کرد و معاون بخش مهندسی مکانیک نیز بود.

دیوید اف. مازورک. او درجهٔ .B.S را در مهندسی اقیانوس و درجهٔ .M.S را در مهندسی عمران از انستیتو تکنولوژی در فلوریدا و درجهٔ .Ph.D در مهندسی عمران را از دانشگاه ایالتی کانکتیکوت اخذ کرد. سپس در بخش مهندسی راه‌آهن و نگهداری و حفاظت درگروه انجمنهای سازه‌های فولادی برای ۱۵ سال خدمت کرد.

فیلیپ ج. کارنول. فیلیپ درجهٔ .B.S را در مهندسی مکانیک از دانشگاه تک تگزاس و درجه .M.S و Ph.D را در مهندسی مکانیک و هوا-فضا از دانشگاه پرینستون گرفت. او اینک پروفسور مهندسی مکانیک دانشگاه پرینستون در انستیتو تکنولوژی رُزهولمن است، که از ۱۹۸۰ در آنجا تدریس می‌کند. در حال حاضر او به دینامیک سازه‌ها و سازه‌های سلامتی و بهداشت و آموزش مهندسی در مترو پرداخته است. همچنین مشاور آزمایشگاه در مدرسه تابستانی دینامیک لُس‌آلاما است و در سطح مراقبت از ساختمانهای بهداشتی تحقیق می‌کند. او جایزه SAE را دریافت کرده است.

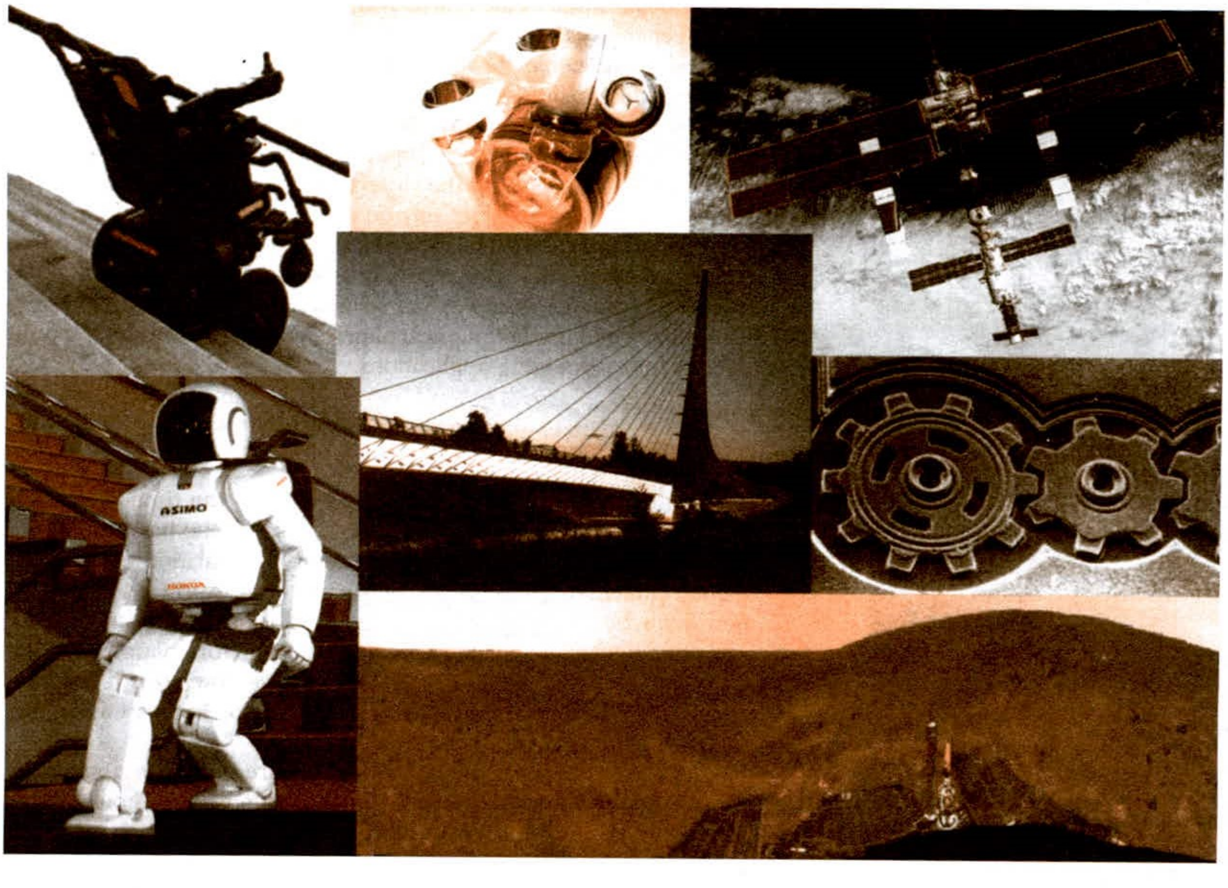
فهرست نمادها

نماد	معنی
$\mathbf{a}, a$	شتاب
c	مقدار ثابت؛ شعاع؛ فاصله
$\bar{\mathbf{a}}, \bar{a}$	شتاب مرکز جرمی
$\mathbf{a}_{B/A}$	شتاب B نسبت به چارچوب در انتقال به A
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$	شتاب P نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c$	شتاب کوریولیس
$\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$، ...	عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌ها و اتصالها
A، B، C، ...	نقاط
A	سطح
b	پهنا، فاصله
c	ثابت؛ ضریب میرایی گرانرو
C	مرکز هندسی
d	فاصله
$\mathbf{e}_n$، $\mathbf{e}_t$	بردارهای یکه در امتداد قائم
$\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\theta$	بردارهای یکه در شعاع و جهتهای معکوس
e	ضریب مقاومت؛ پایهٔ لگاریتم طبیعی
E	انرژی مکانیکی کل
f	تابع اسکالر
f_f	بسامد ارتعاش واداشته
f_n	بسامد طبیعی
$\mathbf{F}$	نیرو؛ نیروی اصطکاک
g	شتاب گرانی
G	مرکز گرانی؛ مرکز جرمی؛ ثابت گرانش
h	ارتفاع؛ شکم دادگی کابل؛ گشتاور زاویه‌ای در هر واحد جرم
$\mathbf{H}_O$	اندازهٔ حرکت زاویه‌ای حول نقطه O
$\dot{\mathbf{H}}_G$	آهنگ تغییر گشتاور زاویه‌ای $\mathbf{H}_G$ نسبت به چارچوب مختصات ثابت
$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$	آهنگ تغییر اندازه حرکتهای زاویه‌ای نسبت به چارچوب چرخش $\mathbf{G}_{xyz}$
$\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$	بردارهای یکه در امتداد محورهای مختصات
i	جریان
I، I_x، ...	گشتاور لختی
$\bar{I}$	گشتاور لختی مرکز هندسی
$\bar{I}_{xy}$ ...	حاصلضربهای لختی
J	گشتاور لختی قطبی
k	ثابت فنر
k_x، k_y، k_O	شعاع چرخش
$\bar{k}$	شعاع چرخش مرکز سطحی
l	طول
$\mathbf{L}$	اندازه حرکت خطی
L	طول، دهانه
m	جرم
m'	جرم در هر واحد طول
$\mathbf{M}$	کوپل؛ گشتاور
$\mathbf{M}_O$	گشتاور حول نقطه O
$\mathbf{M}_O^R$	گشتاور برایند حول نقطهٔ O
M	بزرگی کوپل یا گشتاور؛ جرم زمین
M_{OL}	گشتاور حول محور OL
n	راستای قائم
$\mathbf{N}$	مؤلفهٔ قائم عکس‌العمل
O	مبدأ مختصات
p	فشار
$\mathbf{P}$	نیرو؛ بردار
$\dot{\mathbf{P}}$	آهنگ تغییر بردار $\mathbf{P}$ نسبت به چارچوب مختصات ثابت
q	آهنگ جرمی جریان؛ تغییر الکتریکی
$\mathbf{Q}$	نیرو؛ بردار
$\dot{\mathbf{Q}}$	آهنگ تغییر بردار $\mathbf{Q}$ نسبت به چارچوب مختصات ثابت
$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$	آهنگ تغییر بردار $\mathbf{Q}$ نسبت به چارچوب Q_{xyz}
$\mathbf{r}$	بردار مکان
$\mathbf{r}_{B/A}$	بردار مکان B نسبت به A
r	شعاع؛ فاصله؛ مختصهٔ قطبی
$\mathbf{R}$	نیروی برایند؛ بردار برایند؛ عکس‌العمل
R	شعاع زمین
$\mathbf{s}$	بردار مکان
s	طول کمان؛ طول کابل
$\mathbf{S}$	نیرو، بردار
t	زمان، ضخامت
$\mathbf{T}$	نیرو
T	کشش
$\mathbf{u}$	سرعت
u	تغییر
U	کار
$\mathbf{v}$، v	سرعت
v	تندی
$\bar{\mathbf{v}}$، $\bar{v}$	سرعت مرکز جرمی
$\mathbf{v}_{B/A}$	سرعت B نسبت به چارچوب انتقال به A
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$	سرعت P نسبت به چارچوب چرخش $\mathcal{F}$
$\mathbf{V}$	حاصلضرب برداری نیروهای برشی
V	حجم؛ انرژی پتانسیل، برش
w	بار بر واحد طول
$\mathbf{W}$، W	وزن؛ بار
x، y، z	مختصات قائم؛ فاصله‌ها
$\dot{x}$، $\dot{y}$، $\dot{z}$	مشتقهای زمان مختصات x، y، z
$\bar{x}$، $\bar{y}$، $\bar{z}$	مختصات قائم مرکز هندسی، مرکز گرانی، یا مرکز جرمی

$\boldsymbol{\alpha}$، α	شتاب زاویه‌ای
α، β، γ	زاویه‌ها
γ	وزن مخصوص
δ	افزایش طول، کشیدگی، کشش
$\delta\mathbf{r}$	جابه‌جایی مجازی
δU	کار مجازی
ϵ	خارج از مرکز مقطع مخروطی یا مدار
$\boldsymbol{\lambda}$	بردار واحد در امتداد یک خط
η	بازده
θ	مختصهٔ زاویه‌ای، زاویهٔ اولری؛ زاویه؛ مختصه قطبی
μ	ضریب اصطکاک
ρ	چگالی؛ شعاع انحنا
τ	زمان دوره‌ای، زمان تناوبی
τ_n	دورهٔ ارتعاش آزاد
ϕ	زاویه اصطکاک؛ زاویهٔ اولری؛ زاویه فاز؛ زاویه
φ	اختلاف فاز
ψ	زاویهٔ اولری
$\boldsymbol{\omega}$، ω	سرعت زاویه‌ای
ω_f	بسامد دایره‌ای ارتعاش واداشته
ω_n	بسامد دایره‌ای طبیعی
$\boldsymbol{\Omega}$	سرعت زاویه‌ای چارچوب مرجع

فصل ۱

مقدمه



اصول اولیه مکانیک، که به‌صورت فرمول‌بندی توسط نیوتون، در اواخر قرن ۱۷، پایه‌گذاری شد، برای بسیاری از مهندسان امروزی قابل استفاده است. طراحی و تحلیل تقریباً همه ابزارهای و سیستمهای لازم از دانش این اصول اولیه است.

مقدمه

۱.۱ مکانیک چیست؟
۲.۱ مفاهیم و اصول بنیادی
۳.۱ سیستم یکاها
۴.۱ تبدیل یک سیستم یکاها به سیستم دیگر
۵.۱ روش حل مسئله
۶.۱ دقت عددی

۱.۱ مکانیک چیست؟

مکانیک را می‌شود به‌عنوان علمی تعریف کرد که شرایط سکون یا حرکت اجسام تحت تأثیر نیروها را پیش‌بینی و توصیف می‌کند. این علم به سه قسمت تقسیم می‌شود: مکانیک اجسام صلب (جامد)، مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر، و مکانیک شاره‌ها (سیالات).

مکانیک اجسام صلب خود به دو قسمت استاتیک و دینامیک تقسیم می‌شود، که اولی با اجسام ساکن سروکار دارد و دومی با اجسام متحرک. در مطالعهٔ این مبحث اجسام را کاملاً صلب فرض می‌کنیم. اما واقعیت این است که سازه‌ها و ماشینها هیچ‌وقت به‌طور کامل صلب نیستند و در عمل بر اثر بارهایی که به آنها وارد می‌شود تغییر شکل پیدا می‌کنند. اما این تغییر شکلها معمولاً کوچک‌اند و اثر قابل ملاحظه‌ای روی شرایط تعادل یا حرکت سازهٔ موردنظر نمی‌گذارند. با این‌حال وقتی از مقاومت سازه در برابر شکست صحبت می‌کنیم این تغییر شکلها اهمیت پیدا می‌کنند و در مطالعه مبحث مقاومت مصالح (که بخشی از مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر را تشکیل می‌دهد) بررسی می‌شوند. سومین بخش مکانیک، که موسوم به مکانیک شاره‌ها (سیالات) است خود به دو مبحث شاره‌های تراکم‌پذیر و شاره‌های تراکم‌ناپذیر تقسیم می‌شود. بخش مهمی از مبحث شاره‌های تراکم‌ناپذیر را هیدرولیک تشکیل می‌دهد، که با مایعات سروکار دارد.

مکانیک یک علم فیزیکی است، زیرا با مطالعهٔ پدیده‌های فیزیکی سروکار دارد. به‌هر حال بعضیها مکانیک را مربوط به ریاضیات می‌دانند، در حالی که خیلیها از آن به‌عنوان یک موضوع مهندسی یاد می‌کنند. هر دو دیدگاه در این بخش تا حدودی موجه است. مکانیک پایهٔ اغلب علوم مهندسی و پیش‌نیازگریزناپذیر مطالعهٔ آنهاست. با وجود این، مکانیک فاقد آن تجربه‌گری است که در بعضی از علوم مهندسی وجود دارد، یعنی، فقط متکی به تجربه یا مشاهده نیست؛ مکانیک به خاطر دقت و تأکیدی که بر استدلال استقرایی دارد به ریاضیات شبیه است. اما، بازهم گفته باشیم که، مکانیک یک علم انتزاعی یا حتی یک علم محض نیست، بلکه یک علم کاربردی است. هدف مکانیک تبیین و پیش‌بینی پدیده‌های فیزیکی و در نتیجه پی‌ریزی کاربردهای مهندسی است.

۲.۱ مفاهیم و اصول بنیادی

اگرچه مطالعهٔ مکانیک به زمان ارسطو (۳۸۴ تا ۳۲۲ ق. م.) و ارشمیدس (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق. م.) برمی‌گردد، اما قرنها طول کشید تا نیوتون (۱۷۲۷ـ۱۶۴۲) اصول بنیادی آن را به نحو رضایتبخشی فرمولبندی کرد. این اصول را بعدها دالامبر، لاگرانژ، و هامیلتون به‌صورت اصلاح‌شده بیان کردند. با این همه، اعتبار آنها همچنان به قوت خود باقی

عکس ۱.۱ سر ایزاک نیوتون.

بود تا اینکه اینشتین نظریهٔ نسبیت خود را فرمولبندی کرد (۱۹۰۵). با آنکه محدودیت کاربرد فرمولهای نیوتون حالا کاملاً محرز شده است اما مکانیک نیوتونی هنوز هم مبنای علوم مهندسی امروزی است.

مفاهیم بنیادی‌ای که در مکانیک به کار برده می‌شوند عبارت‌اند از فضا، زمان، جرم، و نیرو. این مفاهیم را نمی‌توان حقیقتاً تعریف کرد؛ آنها را باید برمبنای شهود و تجربه پذیرفت و به عنوان یک چارچوب مرجع برای مطالعهٔ مکانیک به کار برد.

مفهوم فضا به تصور مکان نقطه‌ای مثل P مربوط می‌شود. مکان P را می‌توان با سه اندازهٔ طول تعریف کرد که از یک نقطهٔ مرجع، یا مبدأ، در سه راستای معین اندازه‌گیری می‌شوند. این طولها را مختصات نقطهٔ P می‌شناسیم.

برای تعریف یک رویداد، تنها ذکر مکان وقوع در آن فضا کافی نیست. زمان وقوع آن نیز باید مشخص شود.

از مفهوم جرم برای مشخص‌کردن و مقایسهٔ اجسام برمبنای آزمایشهای بنیادی مکانیکی استفاده می‌شود. مثلاً، دو جسم هم‌جرم (هردو) یک‌جور جذب زمین می‌شوند، البته مقاومت آنها نیز در برابر تغییر حرکت انتقالی یکسان است.

نیرو نمایانگر تأثیری است که یک جسم بر روی جسم دیگر می‌گذارد. نیرو ممکن است عملاً از راه تماس یا مثل نیروهای گرانشی و نیروهای مغناطیسی، از راه دور اعمال شود. یک نیرو با نقطهٔ اثر، بزرگی و راستا (جهت) مشخص می‌شود، نیرو را با یک بردار نشان می‌دهند (بخش ۳.۲).

در مکانیک نیوتونی، فضا، زمان، و جرم سه مفهوم مطلق و مستقل از هم هستند (اما در مکانیک نسبیتی این‌طور نیست. به‌طوری‌که زمان وقوع یک رویداد بستگی به مکان آن دارد، و جرم جسم هم با سرعت آن تغییر می‌کند.) اما از طرف دیگر، مفهوم نیرو مستقل از سه مفهوم دیگر نیست. در واقع، یکی از اصول اساسی مکانیک نیوتونی که در ادامهٔ مطلب بیان می‌کنیم حاکی از این است که برایند نیروهای وارد بر یک جسم بستگی به جرم جسم و نحوهٔ تغییرات سرعت آن در زمان دارد.

در اینجا شرایط سکون یا حرکت ذره‌ها و اجسام صلب را برحسب چهار مفهوم بنیادی‌ای که معرفی شد، مطالعه خواهیم کرد. وقتی می‌گوییم ذره مقصودمان مقدار بسیار اندکی از ماده است که می‌شود فرض کرد نقطه‌ای را در فضا اشغال کرده است. جسم صلب هم مجموعهٔ تعداد زیادی از این ذره‌هاست که مکان هرکدام نسبت به دیگری ثابت است. واضح است که مطالعهٔ مکانیک اجسام صلب مستلزم آگاهی از مکانیک ذره‌هاست. به‌علاوه، نتایجی را که برای ذره به‌دست می‌آید می‌شود مستقیماً در بسیاری از مسئله‌ها که با شرایط سکون یا حرکت اجسام واقعی سروکار دارند، به کار برد.

مطالعهٔ مکانیک مقدماتی متکی بر شش اصل بنیادی است که همه مبنای تجربی دارند.

قانون متوازی‌الاضلاع برای جمع‌بستن نیروها. بنا به این قانون می‌شود به‌جای دو نیرویی که به یک ذره اثر می‌کنند، یک تک‌نیرو به‌نام برایند قرار داد که از رسم قطر متوازی‌الاضلاعی به‌دست می‌آید که دو ضلع مجاورش همان دو نیروی معلوم‌اند (بخش ۲.۲).

اصل انتقال‌پذیری. بنا به این اصل، اگر نیروی وارد بر نقطهٔ معلومی از یک جسم صلب را به‌وسیلهٔ نیروی دیگری که با نیروی اول از لحاظ مقدار و جهت برابر، ولی نقطهٔ اثر آن متفاوت است جایگزین کنند، وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نخواهد کرد، به شرط آنکه دو نیرو دارای یک خط اثر باشند (بخش ۳.۳).

سه قانون بنیادی نیوتون. این قانونها را که سِر ایزاک نیوتون در نیمهٔ دوم قرن هفدهم فرمولبندی کرد می‌شود به‌صورت زیر بیان کرد:

قانون اول. اگر برایند نیروهایی که به یک ذره وارد می‌شوند صفر باشد، ذره در حالت سکون می‌ماند (در ابتدا در سکون) یا اگر با سرعت ثابت بر روی خط مستقیم در حرکت باشد (در ابتدا در حرکت) (بخش ۲.۱۰).

قانون دوم. اگر برایند نیروهایی که به یک ذره وارد می‌شوند صفر نباشد، ذره در امتداد این برایند و متناسب با بزرگی آن شتاب می‌گیرد.

همان‌طورکه در بخش ۲.۱۲ خواهیم دید، این قانون را می‌شود به‌صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a} \qquad (۱.۱)$$

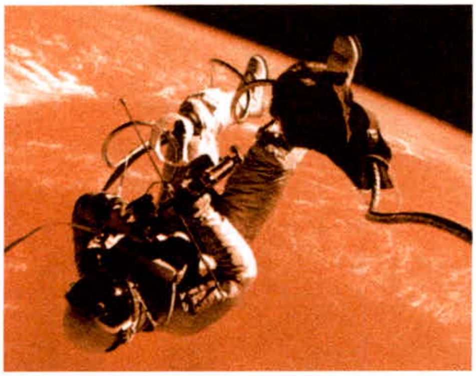
که در آن $\mathbf{F}$، m و $\mathbf{a}$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ برایند نیروهای وارد بر ذره، جرم ذره، و شتاب ذره‌اند که با سیستم یکاهای سازگار بیان می‌شوند.

قانون سوم. نیروهای عمل و عکس‌العمل میان دو جسم که با هم تماس دارند هم‌اندازه‌اند، در یک امتدادند و در خلاف جهت هم اثر می‌کنند (بخش ۱.۶).

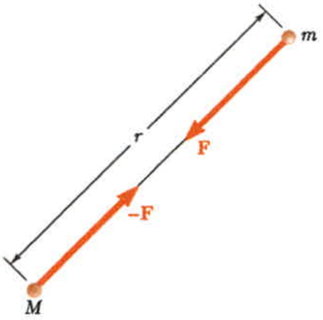
قانون گرانش نیوتون. این قانون می‌گوید که دو ذره به جرمهای M و m یکدیگر را با نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت ($\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$) جذب می‌کنند (شکل ۱.۱). بزرگی این نیرو (F) از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$F=G\frac{Mm}{r^2} \qquad (۲.۱)$$

که در آن r فاصلهٔ بین دو ذره، و G ثابت عمومی یا ثابت گرانش است.



عکس ۲.۱ وقتی در مدار زمین به اشخاص و اشیایی برمی‌خوریم که آنها را «در حالت بی‌وزنی» می‌گویند، حتی اثر نیروی گرانشی وارد حدود ۹۰٪ تجربه روی سطح زمین است. دلیل این محدودیت در فصل ۱۲ (جلد دوم) وقتی قانون دوم نیوتون دربارهٔ حرکت ذره مادی به‌کار می‌رود، ثابت خواهد شد.



شکل ۱.۱

قانون گرانش نیوتون اندیشهٔ کنش از راه دور را مطرح می‌کند و دامنهٔ کاربرد قانون سوم نیوتون را گسترش می‌دهد: می‌بینید که نیروی $\mathbf{F}$ و عکس‌العمل آن $-\mathbf{F}$ در شکل ۱.۱ مساوی و مختلف‌الجهت‌اند، و خط اثرشان هم یکی است.

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون، مورد جاذبهٔ زمین بر روی یک ذرهٔ واقع بر سطح آن، است. در این مورد نیروی $\mathbf{F}$ را که زمین به ذره وارد می‌کند، به‌عنوان وزن آن ($\mathbf{W}$) تعریف می‌کنند. اگر M را مساوی جرم زمین، m را مساوی جرم ذره، و r را مساوی شعاع زمین (R) بگیریم، و ثابت

$$g=\frac{GM}{R^2} \qquad (۳.۱)$$

را وارد کنیم مقدار وزن (W) یک ذره به جرم m را می‌شود به این صورت بیان کرد[1]

$$W=mg \qquad (۴.۱)$$

البته، مقدار R در رابطهٔ (۳.۱) به ارتفاع نقطهٔ مورد نظر، و همچنین به عرض جغرافیایی آن بستگی دارد، زیرا زمین کاملاً کروی نیست. بنابراین، مقدار g با تغییر مکان ذرهٔ مورد نظر تغییر می‌کند. اما تا وقتی که نقطه عملاً بر روی سطح زمین باقی بماند، اغلب محاسبات مهندسی را می‌شود با فرض g برابر با ۹٫۸۱ m/s^2 یا ۳۲٫۲ ft/s^2، با دقت کافی انجام داد.

اصولی را که تا اینجا فهرست‌وار عنوان کردیم، هرجا در جریان مطالعهٔ مکانیک لازم باشد معرفی خواهیم کرد. مطالعهٔ استاتیک ذره‌ها که در فصل ۲ انجام می‌شود مبتنی بر قانون جمع متوازی‌الاضلاع و قانون اول نیوتون به تنهایی است. اصل انتقال‌پذیری (جابه‌جایی) در فصل ۳ و در آغاز مطالعهٔ استاتیک اجسام صلب بیان می‌شود، و قانون

۱. در تعریف دقیقتر وزن ($\mathbf{W}$) باید چرخش زمین را هم به حساب بیاوریم.

سوم نیوتون، در فصل ۶، در آغاز تحلیل نیروهایی که اعضای مختلف تشکیل‌دهندهٔ یک سازه به هم وارد می‌کنند، معرفی خواهد شد. قانون دوم و قانون گرانش نیوتون را در کتاب دینامیک (ج ۲) مطرح خواهیم کرد. در آنجا نشان خواهیم داد که قانون اول نیوتون حالت خاصی از قانون دوم است (بخش ۲.۱۲ کتاب دینامیک) و اصل قابلیت انتقال را می‌شود از اصول دیگر به‌دست آورد و بنابراین حذف کرد (بخش ۵.۱۶ کتاب دینامیک). اما فعلاً قانونهای اول و سوم نیوتون، قانون جمع متوازی‌الاضلاع و اصل انتقال‌پذیری مبنای لازم و کافی برای مطالعهٔ استاتیک ذره‌ها، اجسام صلب، و سیستمهای متشکل از اجسام صلب را فراهم می‌کنند.

همان‌طورکه قبلاًگفتیم، شش اصل بنیادی بالا مبتنی بر شواهد تجربی‌اند. به‌استثنای قانون اول نیوتون و اصل انتقال‌پذیری، که این اصول مستقل‌اند و نمی‌شود آنها را با عملیات ریاضی از هم، یا از هر اصل فیزیکی مقدماتی دیگر به‌دست آورد. بخش عمدهٔ ساختار مکانیک نیوتونی مبتنی بر همین اصول شش‌گانه است. بیش از دو قرن است که مسئله‌های بی‌شماری که با شرایط سکون و حرکت اجسام صلب، و اجسام تغییرشکل‌پذیر و شاره‌ها سروکار دارند، با استفاده از این اصول بنیادی حل شده‌اند. بسیاری از جوابهای به‌دست آمده، به شیوهٔ تجربی هم وارسی شده‌اند، و به این ترتیب اصول یادشده بازهم به تأیید رسیده‌اند. تنها در قرن اخیر بود که مکانیک نیوتونی در بررسی حرکت اتمها و حرکت بعضی از سیارات عاجز ماند و به‌کارگیری نظریهٔ نسبیت به‌عنوان یک مکمل ضرورت یافت. اما در مقیاس انسانی یا مهندسی، که سرعتها در مقایسه با سرعت نور بسیار کم هستند، مکانیک نیوتونی هنوز اعتبار خود را حفظ کرده است.

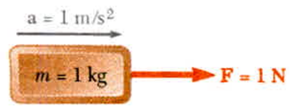
۳.۱ سیستمهای یکاها

به چهار مفهوم بنیادی که در بخش قبل معرفی کردیم، یعنی یکاهای طول، زمان، جرم، و اصطلاحاً یکاهای حرکتی می‌گویند. اگر قرار باشد که این یکاها در معادلهٔ (۱.۱) صدق کنند، آنها را نمی‌توان به‌طور مستقل از هم انتخاب کرد. سه تا از این یکاها را می‌توان به دلخواه تعریف کرد؛ آنها را یکاهای اصلی می‌گویند. اما چهارمین یکا را باید مطابق با معادلهٔ (۱.۱) انتخاب کرد که آن را یکای فرعی می‌نامند. در این صورت اصطلاحاً می‌گوییم که یکاهای حرکتی انتخاب شده سیستم یکاهای سازگار تشکیل می‌دهند.

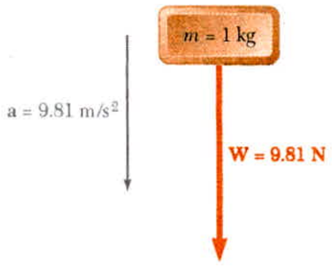
سیستم بین‌المللی یکاها (یکاهای SI *). در این سیستم یکاهای اصلی، یکاهای طول، جرم، و زمان هستند که آنها را به‌ترتیب متر (m)، کیلوگرم (kg)، و ثانیه (s) می‌نامند. هر سهٔ این یکاها به‌دلخواه تعریف می‌شوند. ثانیه که قبلاً ۱/۸۶۴۰۰ متوسط روز خورشیدی اختیار شده بود، امروزه به‌صورت مدتی برابر با ۹ ۱۹۲ ۶۳۱ ۷۷۰ دورهٔ تناوب تابش متناظر با گذار میان دو تراز حالت پایهٔ اتم سزیم ۱۳۳ تعریف می‌شود. متر که ابتدا یک ده‌میلیونیم فاصلهٔ خط استوا تا قطب شمال تعریف شده بود فعلاً برابر ۱ ۶۵۰ ۷۶۳/۷۳ طول موج نارنجی ــ سرخ متناظر با گذار آشکار در یک اتم کریپتن ــ ۸۶ تعریف می‌شود. کیلوگرم ــ که تقریباً برابر با جرم $۰/۰۰۱\,\text{m}^۳$ آب است ــ طبق تعریف جرم یک استوانهٔ استاندارد از جنس پلاتین‌ـ‌ایریدیم درنظر گرفته می‌شود که آن را در ادارهٔ بین‌المللی اوزان و مقیاسها در سور نزدیک پاریس، در فرانسه نگه می‌دارند. یکای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است. به این یکا نیوتون (N) می‌گویند و یک نیوتون بنابه تعریف نیرویی است که به یک جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با $۱\,\text{m/s}^۲$ بدهد (شکل ۲.۱). از رابطهٔ (۱.۱) می‌توانیم بنویسیم

$$۱\,\text{N} = (۱\,\text{kg})(۱\,\text{m/s}^۲) = ۱\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^۲ \qquad (۵.۱)$$

اصطلاحاً می‌گوییم که سیستم یکاهای SI تشکیل یک سیستم مطلق را می‌دهد. بدین معنی که سه یکای اصلی انتخاب شده مستقل از موقعیت محل اندازه‌گیری‌اند. متر، و



شکل ۲.۱



شکل ۳.۱

کیلوگرم، و ثانیه را می‌شود در هر نقطه‌ای از زمین و یا حتی در سایر کرات هم به‌کار برد و این یکاها همواره و در همه‌جا مفهوم واحدی دارند.

وزن یک جسم، یا نیروی گرانی وارد بر یک جسم، را (مثل هر نیروی دیگری) می‌شود برحسب نیوتون بیان کرد. از رابطهٔ (۴.۱) نتیجه می‌شود که وزن جسمی به جرم ۱ kg (شکل ۳.۱) برابر است با

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (۱\,\text{kg})(۹/۸۱\,\text{m/s}^۲) \\ &= ۹/۸۱\,\text{N} \end{aligned}$$

اضعاف و اجزای یکاهای اصلی SI را می‌توان با استفاده از پیشوندهای تعریف شده در جدول ۱.۱ به‌دست آورد. اضعاف و اجزای یکاهای طول، جرم، و نیرو که اغلب در مهندسی از آنها استفاده می‌کنند به‌ترتیب عبارت‌اند از: کیلومتر (km) و میلیمتر (mm)؛ مگا گرم[۱] (Mg) و گرم (g)؛ و کیلو نیوتون (kN). طبق جدول ۱.۱ داریم

$$۱\,\text{mm} = ۰/۰۰۱\,\text{m} \qquad ۱\,\text{km} = ۱۰۰۰\,\text{m}$$
$$۱\,\text{g} = ۰/۰۰۱\,\text{kg} \qquad ۱\,\text{Mg} = ۱۰۰۰\,\text{kg}$$
$$۱\,\text{kN} = ۱۰۰۰\,\text{N}$$

برای تبدیل این یکاها (به‌ترتیب) به متر، کیلوگرم، و نیوتون، تنها کاری که باید بکنیم این است که ممیز اعشار را سه رقم به‌طرف راست یا سه رقم به‌طرف چپ می‌بریم. مثلاً برای تبدیل ۳/۸۲ km به متر، ممیز را سه رقم به‌طرف راست می‌بریم:

$$۳/۸۲\,\text{km} = ۳۸۲۰\,\text{m}$$

همچنین برای تبدیل ۴۷/۲ mm به متر ممیز را سه رقم به قسمت چپ می‌بریم

$$۴۷/۲\,\text{mm} = ۰/۰۴۷۲\,\text{m}$$

تبدیلهای بالا را با استفاده از نمادگذاری علمی می‌توانیم به این صورت بنویسیم

$$۳/۸۲\,\text{km} = ۳/۸۲ \times ۱۰^{۳}\,\text{m}$$
$$۴۷/۲\,\text{mm} = ۴۷/۲ \times ۱۰^{-۳}\,\text{m}$$

اضعاف یکای زمان دقیقه (min) و ساعت (h)اند. از آنجا که ۱ min = ۶۰ s و ۱ h = ۶۰ min = ۳۶۰۰ s است، اضعاف زمان را نمی‌شود مثل بقیه به راحتی تبدیل کرد.

* SI مربوط به Système International d'Unités (فرانسوی) است.

۱. مگا گرم به تن متریک نیز معروف است.

جدول ۱.۱ پیشوندهای سیستم SI

نماد	پیشوند*	مضرب
T	ترا	$۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۱۰^{۱۲}$
G	گیگا	$۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۱۰^{۹}$
M	مگا	$۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰^{۶}$
k	کیلو	$۱۰۰۰ = ۱۰^{۳}$
h	هکتو**	$۱۰۰ = ۱۰^{۲}$
da	دکا**	$۱۰ = ۱۰^{۱}$
d	دسی**	$۰٫۱ = ۱۰^{-۱}$
c	سانتی**	$۰٫۰۱ = ۱۰^{-۲}$
m	میلی	$۰٫۰۰۱ = ۱۰^{-۳}$
μ	میکرو	$۰٫۰۰۰۰۰۱ = ۱۰^{-۶}$
n	نانو	$۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۱ = ۱۰^{-۹}$
p	پیکو	$۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ = ۱۰^{-۱۲}$
f	فمتو	$۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ = ۱۰^{-۱۵}$
a	آتو	$۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ = ۱۰^{-۱۸}$

* ما به اولین بخش نماد هر پیشوندی تأکید می‌کنیم. به‌ترتیبی که اولین پیشوند همسانی را [تلف]ظ کند. مثلاً در کیلومتر پیشوند کیلومتر اولین بخش یعنی کیلو پیشوند تلقی می‌شود، نه [...]رمی. برای همسان کیلومتر به کیلوگرم می‌توان اشاره کرد.

** باید از به‌کاربردن این پیشوندها اجتناب کنید، مگر بخواهید سطح یا حجم چیزی را اندازه بگیرید یا در یک کار غیر فنی ــ مثل اندازه‌گیری ابعاد بدن و لباس ــ لازم باشد که از سانتیمتر [ا]ستفاده کنید.

استفاده از اضعاف یا اجزای مناسب یک یکای معلوم مزیتش این است که می‌توانیم از نوشتن عددهای خیلی بزرگ یا خیلی کوچک اجتناب کنیم. به‌عنوان مثال معمولاً m ۴۲۷ ۲۰۰ را km ۴۲۷٫۲، و m ۰٫۰۰۲۱۶ را mm ۲٫۱۶ می‌نویسیم[1]

[ی]کاهای سطح و حجم. یکای سطح مترمربع (m^2) است که نمایندهٔ مساحت مربعی [اس]ت به ضلع ۱ m و یکای حجم مترمکعب (m^3) است که برابر با حجم مکعبی است [که] ضلعش ۱ m باشد. برای اجتناب از نوشتن عددهای خیلی بزرگ یا خیلی کوچک [در موا]قع محاسبهٔ مساحتها و حجمها، می‌توانیم از سیستمهای واحدهای فرعی‌ای استفاده کنیم که به‌ترتیب از توانهای دوم و سوم میلیمتر و دوتا از اضعاف دیگر متر یعنی دسیمتر (dm) و سانتیمتر (cm) به‌دست می‌آیند. از آنجا که بنا به تعریف

$$۱\,dm = ۰٫۱\,m = ۱۰^{-۱}\,m$$
$$۱\,cm = ۰٫۰۱\,m = ۱۰^{-۲}\,m$$
$$۱\,mm = ۰٫۰۰۱\,m = ۱۰^{-۳}\,m$$

[ا]جزای یکای سطح عبارت‌اند از

$$۱\,dm^۲ = (۱\,dm)^۲ = (۱۰^{-۱}\,m)^۲ = ۱۰^{-۲}\,m^۲$$
$$۱\,cm^۲ = (۱\,cm)^۲ = (۱۰^{-۲}\,m)^۲ = ۱۰^{-۴}\,m^۲$$
$$۱\,mm^۲ = (۱\,mm)^۲ = (۱۰^{-۳}\,m)^۲ = ۱۰^{-۶}\,m^۲$$

[1] باید توجه کنید که برای آشکارکردن کمیتی در یکاهای SI، که در سمت راست یا در سمت چپ [علا]مت اعشار بیش از چهار رقم به کار رود ــ به‌عنوان مثال m ۴۲۷ ۲۰۰ یا m ۰٫۰۰۲۱۶، نباید ارقام [ر]ا در گروههای سه‌تایی با علامت کاما (,) از هم جدا کرد. زیرا علامت کاما در قرارداد بیشتر کشورها [مع]نی دیگر می‌دهد. بنابراین بهتر است که از قانون فاصله استفاده شود. یعنی نبنویسیم m ۴۲۷, ۲۰۰ [و] m ۰٫۰۰۲, ۱۶ و بنویسیم m ۴۲۷ ۲۰۰ یا m ۰٫۰۰۲ ۱۶ و بین اعداد ۴۲۷ و ۲۰۰ یا ۲ ۰۰ و ۱۶ [ف]اصله بگذاریم. (البته به‌نظر مترجم در ایران کمتر از فاصله استفاده می‌شود. در هر حال بهتر است از [ک]اما استفاده نشود.)

جدول ۲.۱ یکاهای اصلی SI که در مکانیک به کار می‌روند

کمیت	یکا	نماد	فرمول
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	...	$m/s^۲$
زاویه	رادیان	rad	*
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	...	$rad/s^۲$
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	...	rad/s
سطح	مترمربع	...	$m^۲$
چگالی	کیلوگرم بر متر مکعب	...	$kg/m^۳$
انرژی	ژول	J	$N \cdot m$
نیرو	نیوتون	N	$kg \cdot m/s^۲$
بسامد	هرتز	Hz	$s^{-۱}$
ضربه	نیوتون ـ ثانیه	...	$kg \cdot m/s$
طول	متر	m	**
جرم	کیلوگرم	kg	**
گشتاور نیرو	نیوتون ـ متر	...	$N \cdot m$
توان	وات	W	J/s
فشار	پاسکال	Pa	$N/m^۲$
تنش	پاسکال	Pa	$N/m^۲$
زمان	ثانیه	s	**
سرعت	متر بر ثانیه	...	m/s
حجم			
جامدات	مترمکعب	...	$m^۳$
مایعات	لیتر	L	$۱۰^{-۳}\,m^۳$
کار	ژول	J	$N \cdot m$

* یکای مکمل (۱ دور $= ۲\pi\,rad = ۳۶۰^\circ$)

** یکای اصلی

و اجزای یکای حجم عبارت‌اند از

$$۱\,dm^۳ = (۱\,dm)^۳ = (۱۰^{-۱}\,m)^۳ = ۱۰^{-۳}\,m^۳$$
$$۱\,cm^۳ = (۱\,cm)^۳ = (۱۰^{-۲}\,m)^۳ = ۱۰^{-۶}\,m^۳$$
$$۱\,mm^۳ = (۱\,mm)^۳ = (۱۰^{-۳}\,m)^۳ = ۱۰^{-۹}\,m^۳$$

یادتان باشد که در اندازه‌گیری حجم مایعات به دسیمتر مکعب ($dm^۳$) معمولاً لیتر (L) می‌گویند.

سایر یکاهای فرعی SI را که برای اندازه‌گیری گشتاور نیرو، کارنیرو، و غیره به‌کار می‌روند در جدول ۲.۱ آورده‌ایم. با آنکه این یکاها را در فصلهای بعدی در مواقع لزوم تعریف خواهیم کرد، اما در اینجا باید یک قاعدهٔ مهم را یادآوری کنیم؛ وقتی یک یکای فرعی از تقسیم دویکای اصلی برهم به‌دست می‌آید در صورت کسر مربوط به یکای فرعی می‌توانیم از پیشوند استفاده کنیم اما در مخرجش نه. مثلاً ثابت k یک فنر را که تحت بار N ۱۰۰ طولش mm ۲۰ اضافه می‌شود به این صورت می‌نویسیم

$$k = \frac{۱۰۰\,N}{۲۰\,mm} = \frac{۱۰۰\,N}{۰٫۰۲۰\,m} = ۵۰۰۰\,N/m$$

یا

$$k = ۵\,kN/m$$

ولی هیچ‌وقت نمی‌نویسیم $k = ۵\,N/mm$.

یکاهای معمول در سیستم U.S. بیشتر مهندسان امریکایی هنوز معمولاً از سیستمی که براساس یکاهای اصلی مانند یکاهای طول، نیرو، و زمان است استفاده می‌کنند. این

عکس ۳.۱ یکای جرم تنها یکای اساسی هنوز برمبنای استاندارد فیزیکی است. روش حرکت در جابه‌جایی استاندارد کار مبنی بر پدیده‌های طبیعی بدون تغییر است.

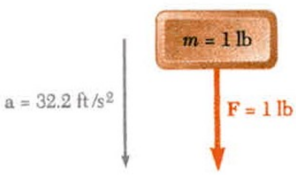
یکاها به‌ترتیب عبارت‌اند از فوت (ft)، پوند (lb)، و ثانیه (s). ثانیه در هر دو دستگاه .U.S و SI (بین‌المللی) یکسان است. فوت برابر ۰٫۳۰۴۸ m تعریف شده است. پوند برابر وزنی استاندارد از پلاتین که به‌نام پوند استاندارد نامیده می‌شود و در مؤسسه بین‌المللی استانداردها و تکنولوژی در خارج از واشنگتن نگهداری می‌شود. جرم آن برابر ۰٫۴۵۳ ۵۹۲ ۴۳ kg است. از آنجا که وزن یک جسم به نیروی گرانشی زمین بستگی دارد که با موقعیت محلی تغییر می‌کند، تصریح شده است که برای تعریف دقیق نیروی ۱ پوندی (۱ lb) باید در سطح دریا و در عرض جغرافیایی °۴۵ قرار داشته باشد. واضح است یکاهای معمول در .U.S تشکیل یک سیستم مطلق یکاها را نمی‌دهد، زیرا این سیستمها به جاذبهٔ گرانشی زمین وابسته‌اند، که آنها سیستم گرانشی یکاها را تشکیل می‌دهند.

در حالی که پوند استاندارد به‌عنوان یکای جرم در معاملات بازرگانی ایالات متحده به‌کار می‌رود، از آن نمی‌توان در محاسبات مکانیک مهندسی استفاده کرد، زیرا چنین یکایی را نمی‌توان به‌عنوان یکاهای پایه در پاراگراف قبل تعریف کرد. درحقیقت، وقتی یک نیروی ۱ پوندی بر جسمی وارد شود، یعنی وقتی جسم در اثر نیروی گرانی قرارگیرد، پوند استاندارد شتاب گرانی $g = ۳۲٫۲\,\text{ft/s}^۲$ به خود می‌گیرد (شکل ۴.۱)، نه یکای شتابی که از معادله (۱.۱) به‌دست می‌آید. یکای سازگار جرم فوت، پوند، و ثانیه برابر جرمی است که بر اثر نیرویی ۱ پوندی شتابی برابر $۱\,\text{ft/s}^۲$ پیدا کند (شکل ۵.۱). این یکا را بعضی مواقع اسلاگ (slug) می‌نامند، که می‌توان آن را از معادله $F = ma$، پس از جایگزینی ۱ پوند (۱ lb) به‌جای F و $۱\,\text{ft/s}^۲$ به‌جای a به‌دست آورد. می‌نویسیم

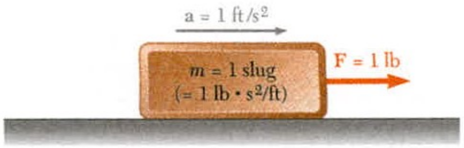
$$F = ma \qquad ۱\,\text{lb} = (۱\,\text{slug})(۱\,\text{ft/s}^۲)$$

و به‌دست می‌آید

$$۱\,\text{slug} = \frac{۱\,\text{lb}}{۱\,\text{ft/s}^۲} = ۱\,\text{lb}\cdot\text{s}^۲/\text{ft} \qquad (۶.۱)$$



شکل ۴.۱



شکل ۵.۱

با مقایسه شکلهای ۴.۱ و ۵.۱ نتیجه می‌گیریم که جرم اسلاگ ۳۲٫۲ برابر بزرگت از جرم پوند استاندارد است.

درحقیقت در سیستم یکاهای متداول .U.S اجسام به‌وسیلهٔ وزنشان برحسب پوند به‌جای جرمشان برحسب اسلاگ، برای مبحث استاتیک مناسبتر است، جایی ک مقدارها پی‌درپی با وزنها و نیروهای دیگر و تنها به‌ندرت با جرمها سروکار دارد. با ای وجود، در مطالعه دینامیک جایی که نیروها، جرمها، و شتابها درگیر هستند، وقتی وزن W، به پوند داده شده باشد، جرم m را به اسلاگ بیان خواهیم کرد. با یادآوری معادله (۴.۱) می‌نویسیم

$$m = \frac{W}{g} \qquad (۷.۱)$$

که در آن g شتاب گرانی ($g = ۳۲٫۲\,\text{ft/s}^۲$) است.

یکی دیگر از یکاهای متداول و دست‌وپاگیر .U.S در مسئله‌های مهندسی، مایل است (mi)، مایل برابر ۵۲۸۰ ft؛ اینچ (in) برابر با $\frac{۱}{۱۲}$ ft؛ و کیلوپوند (kip) برای نیروی ۱۰۰۰ پوندی است. تن اغلب برای نشان‌دادن یک جرم ۲۰۰۰ پوندی به‌کا می‌رود اما، شبیه پوند، باید به اسلاگ در محاسبات مهندسی تبدیل شود.

تبدیل یکاها به فوت، پوند و ثانیه کمیتهای بیان شده در دیگر یکاهای معمول د .U.S به‌طورکلی بیشتر مورد لزوم است و مستلزم دقت بیشتری نسبت به عمل متناظ در یکاهای SI است. به‌عنوان مثال، اگر مقدار سرعت داده شده $v = ۳۰\,\text{mi/h}$ باشد باید آن را به ft/s به شکل زیر تبدیل کنیم. نخست می‌نویسیم

$$v = ۳۰\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

چون می‌خواهیم از یکای مایل خلاص شویم و به‌جای آن از یکای ft استفاده کنیم، باید عضو سمت راست معادله را در عبارتهای ۵۲۸۰ ft / ۱ mi و ۱ h / ۳۶۰۰ s ضرب کنیم. با این کار تغییری در مقدار سمت راست معادله حاصل نمی‌شود. زیرا ۱ مایل برابر ۵۲۸۰ ft است، یعنی حاصل عبارت ۵۲۸۰ ft / ۱ mi برابر ۱ است. از سو دیگر حاصل عبارت ۱ h / ۳۶۰۰ s نیز ۱ است، زیرا ۱ ساعت برابر ۳۶۰۰ ثانیه است بنابراین می‌بینیم که سمت راست معادله دوبار در ۱ ضرب می‌شود، پس در نتیجه تغییری حاصل نمی‌شود. به این ترتیب رابطه زیر به‌دست می‌آید:

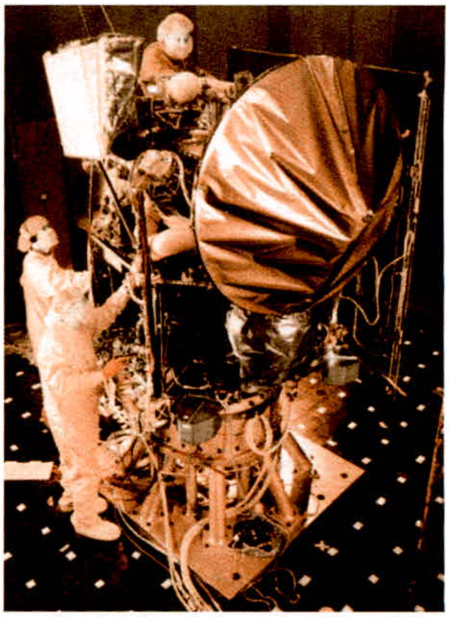
$$v = \left(۳۰\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{۵۲۸۰\,\text{ft}}{۱\,\text{mi}}\right)\left(\frac{۱\,\text{h}}{۳۶۰۰\,\text{s}}\right)$$

همان‌گونه که در رابطه بالا می‌بینیم، مایل هم در صورت و هم در مخرج عبارت سمت راست موجود است، به همین ترتیب، h کسر بالا را با حذف مایل در صورت و مخرج و همچنین حذف h در صورت و مخرج ساده می‌کنیم و عبارت زیر را به‌دست می‌آوری

$$v = ۴۴\,\frac{\text{ft}}{\text{s}} = ۴۴\,\text{ft/s}$$

۴.۱ تبدیل یک سیستم از یکاها به سیستم دیگر

بسیاری از موارد، یک مهندس می‌خواهد یک نتیجه عددی به‌دست‌آمده از یکاهای SI را به یکاهای .U.S تبدیل کند، یا برعکس. چون یکای زمان در هر دو سیستم برابر



کس ۱.۴ اهمیت یکاها در تمام محاسبات نباید از میزانی که در مسئلهٔ تأکید شده بیشتر
باشد. معلوم شده است که ۱۲۵ میلیون دلار برای رفتن به اطراف مدار مریخ به‌منظور تعیین آب
ر هوای آن هزینه شده است، که البته با شکست روبه‌رو شد، زیرا اولین پیمانکار گروه فضایی
ـ محاسبات خود به‌جای استفاده از یکاهای ویژه SI از یکاهای .U.S استفاده کرد.

است تنها دو یکای بنیادی جنبشی برای تبدیل لازم می‌شود. بنابراین، از آنجا که همه دیگر یکاهای جنبشی (سینتیک) را می‌توان از این یکاهای بنیادی به‌دست آورد، فقط ـو ضریب تبدیل لازم به یادآوری است.

کاهای طول. بنا به تعریف یکای معمول .U.S طول چنین است

$$1\,\text{ft} = ۰{,}۳۰۴۸\,\text{m} \qquad (۸.۱$$

سیجه می‌گیریم که

$$1\,\text{mi} = ۵۲۸۰\,\text{ft} = ۵۲۸۰(۰{,}۳۰۴۸\,\text{m}) = ۱۶۰۹\,\text{m}$$

$$1\,\text{mi} = ۱{,}۶۰۹\,\text{km} \qquad (۹.۱$$

ـمچنین

$$1\,\text{in} = \frac{1}{12}\,\text{ft} = \frac{1}{12}(۰{,}۳۰۴۸\,\text{m}) = ۰{,}۰۲۵۴\,\text{m}$$

$$1\,\text{in} = ۲۵{,}۴\,\text{mm} \qquad (۱۰.۱$$

کاهای نیرو. با یادآوری یکای متداول .U.S نیرو (پوند) به وزن استاندارد پوند (به جرم ۰٫۴۵۳۶ kg) از سطح دریا و عرض جغرافیایی ۴۵° (که در آن $g = ۹{,}۸۰۷\,\text{m/s}^2$) عریف شده است و با استفاده از معادله (۴.۱)، می‌نویسیم

$$W = mg$$
$$1\,\text{lb} = (۰{,}۴۵۳۶\,\text{kg})(۹{,}۸۰۷\,\text{m/s}^2) = ۴{,}۴۴۸\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

با توجه به معادله (۵.۱)،

$$1\,\text{lb} = ۴{,}۴۴۸\,\text{N} \qquad (۱۱.۱$$

یکاهای جرم. یکای معمول جرم در .U.S (اسلاگ) یک یکای فرعی است. بنابراین، با استفاده از معادله‌های (۶.۱)، (۸.۱)، و (۱۱.۱)، می‌نویسیم

$$\text{اسلاگ}\ 1 = 1\,\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft} = \frac{1\,\text{lb}}{1\,\text{ft/s}^2} = \frac{۴{,}۴۴۸\,\text{N}}{۰{,}۳۰۴۸\,\text{m/s}^2} = ۱۴{,}۵۹\,\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$$

و با یادآوری معادله (۵.۱)

$$1\,\text{slug} = 1\,\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft} = ۱۴{,}۵۹\,\text{kg} \qquad (۱۲.۱)$$

همچنین آن را نمی‌توان به‌عنوان یکای با ثبات جرم به‌کار برد. یادآور می‌شویم که جرم پوند استاندارد بنا به تعریف برابر است با

$$\text{پوند جرم}\ 1 = ۰{,}۴۵۳۶\,\text{kg} \qquad (۱۳.۱)$$

این ثابت را می‌توان برای تعیین جرم در یکاهای SI (کیلوگرم) یک جسم که با وزنش در .U.S یکاهای معمول (پوند) مشخص می‌شود، به‌کار برد.

برای تبدیل یک یکای فرعی معمول در .U.S به یکاهای SI، یک ضرب یا تقسیم ساده توسط ضرایب تبدیل مناسب وجود دارد. برای مثال، برای تبدیل گشتاور یک نیرو که از $M = ۴۷\,\text{lb}\cdot\text{in}$، به یکاهای SI به‌دست آمده است از فرمول (۱۰.۱) و (۱۱.۱) استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$M = ۴۷\,\text{lb}\cdot\text{in} = ۴۷(۴{,}۴۴۸\,\text{N})(۲۵{,}۴\,\text{mm})$$
$$= ۵۳۱۰\,\text{N}\cdot\text{mm} = ۵{,}۳۱\,\text{N}\cdot\text{m}$$

ضریب تبدیل به‌دست آمده در این بخش را نیز می‌توان برای تبدیل نتیجه عددی در یکاهای SI به .U.S به‌کار برد. برای مثال، اگر گشتاور یک نیرو $M = ۴۰\,\text{N}\cdot\text{m}$ به‌دست‌آمده باشد، مانند آخرین پاراگراف بخش ۳.۱ چنین می‌نویسیم

$$M = ۴۰\,\text{N}\cdot\text{m} = (۴۰\,\text{N}\cdot\text{m})\left(\frac{1\,\text{lb}}{۴{,}۴۴۸\,\text{N}}\right)\left(\frac{1\,\text{ft}}{۰{,}۳۰۴۸\,\text{m}}\right)$$

با محاسبه عددی و حذف یکاهای اضافی در صورت و مخرج چنین به‌دست می‌آید

$$M = ۲۹{,}۵\,\text{lb}\cdot\text{ft}$$

یکاهای معمول در .U.S که بیشتر در مکانیک کاربرد دارند در جدول ۳.۱ با معادل آنها در SI فهرست شده‌اند.

۵.۱ روش حل مسئله

شما برای حل یک مسئله مکانیک باید به همان طریق عمل کنید که انگار با یک مسئلهٔ واقعی مهندسی مواجه هستید. اگر از تجربه و شهود کمک بگیرید فهم و فرمولبندی مسئله آسانتر خواهد شد. اما بعد از اینکه مسئله به‌وضوح بیان شد، دیگر جایی برای تصورات شما در حل آن باقی نمی‌ماند. حل مسئله باید مبتنی باشد بر شش اصل بنیادی که در بخش ۲.۱ بیان کردیم یا براساس قضیه‌هایی باشد که از روی آنها به‌دست آوردیم. هر قدمی که برداشته می‌شود باید بر این اساس توجیه شود. قواعد را باید سخت رعایت کرد تا تقریباً به‌طور خودکار به حل مسئله بینجامد، و دیگر جایی برای شهود یا «احساس» باقی نماند. پس از به‌دست آمدن جواب مسئله، باید آن را وارسی کرد. در اینجا ممکن است دوباره به عقل سلیم و تجربهٔ شخصی متوسل شوید. اگر از جواب به‌دست آمده کاملاً راضی نبودید فرمولبندی مسئله، و اعتبار روشهایی را که برای حل آن به‌کار برده‌اید و همچنین صحت محاسباتتان را وارسی کنید.

بیان مسئله باید واضح و دقیق باشد. باید شامل داده‌های مسئله و نشان‌دهندهٔ اطلاعات لازم باشد. مسئله باید یک شکل تر و تمیز داشته باشد که همهٔ کمیتهای

جدول ۱.۳ یکاهای معمول .U.S و معادل آنها در SI

مقدار	یکای معمول در .U.S	معادل در SI
شتاب	ft/s^2	$۰٫۳۰۴۸\ m/s^2$
	in/s^2	$۰٫۰۲۵۴\ m/s^2$
مساحت	ft^2	$۰٫۰۹۲۹\ m^2$
	in^2	$۶۴۵٫۲\ mm^2$
انرژی	ft · lb	۱٫۳۵۶ J
نیرو	kip	۴٫۴۴۸ kN
	lb	۴٫۴۴۸ N
	oz	۰٫۲۷۸۰ N
ضربه	lb · s	۴٫۴۴۸ N · s
طول	ft	۰٫۳۰۴۸ m
	in	۲۵٫۴۰ mm
	mi	۱٫۶۰۹ km
جرم	oz mass	۲۸٫۳۵ g
	lb mass	۰٫۴۵۳۶ kglb
	slug	۱۴٫۵۹ kg
	ton	۹۰۷٫۲ kg
گشتاور یک نیرو	lb · ft	۱٫۳۵۶ N · m
	lb · in	۰٫۱۱۳۰ N · m
گشتاور لختی		
یک سطح	in^4	$۰٫۴۱۶۲ \times ۱۰^۶\ mm^4$
یک جرم	$lb \cdot ft \cdot s^2$	$۱٫۳۵۶\ kg \cdot m^2$
مقدار اندازه حرکت	lb · s	۴٫۴۴۸ kg · m/s
توان	ft · lb/s	۱٫۳۵۶ W
	hp	۷۴۵٫۷ W
فشار یا تنش	lb/ft^2	۴۷٫۸۸ Pa
	lb/in^2 (psi)	۶٫۸۹۵ kPa
سرعت	ft/s	۰٫۳۰۴۸ m/s
	in/s	۰٫۰۲۵۴ m/s
	mi/h (mph)	۰٫۴۴۷۰ m/s
	mi/h (mph)	۱٫۶۰۹ km/h
حجم	ft^3	$۰٫۰۲۸۳۲\ m^3$
	in^3	$۱۶٫۳۹\ cm^3$
مایعات	gal	۳٫۷۸۵ L
	qt	۰٫۹۴۶۴ L
کار	ft · lb	۱٫۳۵۶ J

مربوط را نشان بدهد. برای همه اجسام مورد نظر باید نمودارهای جداگانه‌ای رسم شود تا نیروهایی را که بر هر جسم وارد می‌شوند به‌طور مشخص نشان بدهد. این نمودارها به نمودار جسم آزاد معروف‌اند که آنها را به تفصیل در بخشهای ۱۱.۲ و ۲.۴ شرح خواهیم داد.

از اصول بنیادی مکانیک که در بخش ۲.۱ فهرست کردیم، برای نوشتن معادله‌های شرایط سکون یا حرکت اجسام استفاده خواهد شد. هر معادله باید به‌طور مشخص مربوط به یکی از نمودارهای جسم آزاد باشد. در این صورت می‌توانیم با رعایت دقیق قواعد معمول جبر و ثبت هر مرحله از کار، اقدام به حل مسئله کنیم.

پس از اینکه جواب مسئله به‌دست آمد، باید به دقت وارسی شود. اشتباهها استدلال را غالباً می‌شود با وارسی یکاها مشخص کرد. به‌عنوان مثال، برای تعیین گشتاور یک نیروی ۵۰ نیوتونی حول نقطه‌ای به فاصلهٔ ۰٫۶۰ m از خط اثر آن، باید نوشته باشیم (بخش ۱۲.۳).

$$M = Fd = (۵۰\ N)(۰٫۶۰\ m) = ۳۰\ N \cdot m$$

یکای N · m ــ که از ضرب نیوتون در متر به‌دست آمده است ــ یکای درستی برا گشتاور نیروست؛ اگر یکای دیگری به‌دست آورده بودیم، پی‌می‌بردیم که اشتباهی ر داده است.

خطاهای محاسبه، معمولاً به این طریق معلوم می‌شوند که مقادیر عددی به‌دست آمده را باید در معادله‌ای که هنوز به کار نرفته است قرار بدهیم و ببینیم این مقادیر د معادله صدق می‌کنند یا نه. در مهندسی بر صحت محاسبات بیش از حد نباید تأکید ک

۶.۱ دقت عددی

دقت پاسخ هر مسئله بستگی به دو عامل دارد که عبارت‌اند از: (۱) دقت داده‌های مسئله و (۲) دقت محاسبات انجام شده.

دقت پاسخ مسئله نمی‌تواند از دقت کم‌دقت‌ترین این دو عامل بیشتر باشد. برا مثال، اگر باری که به یک پل اعمال می‌شود ۷۵۰۰۰ lb و خطای احتمالی اطلاعا ما ۱۰۰ lb باشد، خطای نسبی که میزان دقت داده‌ها را اندازه‌گیری می‌کند برابر است

$$\frac{۱۰۰\ lb}{۷۵۰۰۰\ lb} = ۰٫۰۰۱۳ = ۰٫۱۳ \text{ درصد}$$

بنابراین بی‌معنی خواهد بود که عکس‌العمل یکی از تکیه‌گاههای پل را بعد از محاسبه مثلاً ۱۴۳۲۲ lb ذکر کنیم. دقت جواب مسئله، هرقدر هم که محاسبات را دقیق انجام داده باشیم بیشتر از ۰٫۱۳ درصد نمی‌تواند باشد، و امکان خطا در جواب ممکن اسد به $(۰٫۱۳/۱۰۰)(۱۴۳۲۲\ lb) \approx ۲۰\ lb$ برسد. جواب درست را باید به‌صور $۱۴۳۲۰ \pm ۲۰\ lb$ بنویسیم.

در مسائل مهندسی، داده‌های عددی به‌ندرت با دقتی بیش از ۰٫۲ درصد داده می‌شوند. بنابراین به‌ندرت می‌شود توجیه کرد که جواب چنین مسائلی با دقتی بیش ا ۰٫۲ درصد نوشته شود. یک قاعدهٔ عملی این است که اعدادی را که با «۱» شرو می‌شوند با ۴ رقم و بقیه را با سه رقم ثبت کنیم. اگر چیزی خلاف این موضوع گف نشده باشد، دقت داده‌های یک مسئله را باید به همین طریق مشخص کرد. مثلاً یک نیروی ۴۰ -lb را باید بخوانیم ۴۰٫۰ lb و نیروی ۱۵ -lb را باید بخوانیم ۱۵٫۰۰ lb.

تعداد زیادی از مهندسان شاغل در صنعت و دانشجویان مهندسی از ماشین حسابهای جیبی استفاده می‌کنند. سرعت و دقت این ماشینها، محاسبات عددی را د حل بسیاری از مسائل آسان کرده است. با این حال دانشجو نباید ارقام بامعنی را، بیش از تعداد قابل توجیه، صرفاً به این خاطر که آسان به‌دست می‌آیند، ثبت کند. همان‌ط که قبلاً گفتیم در حل مسائل مهندسی عملی دقت بیش از ۰٫۲ درصد به‌ندرت لا یا بامعنی است.

فصل ۲

استاتیک ذره‌ها

بسیاری از مسئله‌های مهندسی را می‌توام با درنظر گرفتن تعادل حل کرد. در این فصل خواهید آموخت که با تلقی‌کردن سازه‌ها و تیر مهار کشتی به‌عنوان یک ذره، رابطه میان کشش در طنابها را بیان کرد.

استاتیک ذره‌ها

۱.۲ مقدمه

نیروهای واقع در صفحه

۲.۲ نیروی وارد بر یک ذره. برایند دو نیرو

۳.۲ بردارها

۴.۲ جمع بردارها

۵.۲ برایند چند نیروی همرس

۶.۲ تجزیهٔ یک نیرو به مؤلفه‌های آن

۷.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو. بردارهای یکه

۸.۲ جمع نیروها از طریق جمع بستن مؤلفه‌های x و y آنها

۹.۲ تعادل یک ذره

۱۰.۲ قانون اول نیوتون درباره حرکت

۱۱.۲ مسئله‌های مربوط به تعادل یک ذره. نمودارهای جسم آزاد

نیروها در فضا

۱۲.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو در فضا

۱۳.۲ نیرو با بزرگی‌اش و دو نقطه واقع بر روی خط اثرش تعریف می‌شود

۱۴.۲ جمع بستن نیروهای همرس در فضا

۱۵.۲ تعادل ذره در فضا

۱.۲ مقدمه

در این فصل می‌خواهیم اثر نیروهای وارد بر ذره‌ها را بررسی کنیم. اول از همه می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌شود دو یا چند نیروی وارد بر یک ذره را تبدیل به تک‌نیرویی کنیم که همان اثر نیروهای اولیه را داشته باشد. این تک‌نیرو، معادل برایند نیروهای اولیه وارد بر ذره است. بعد از آن برای یک ذره در حال تعادل رابطه‌هایی را پیدا می‌کنیم که بین نیروهای وارد بر آن برقرارند و از این رابطه‌ها برای تعیین بعضی از نیروهایی که بر ذره وارد می‌شوند استفاده می‌کنیم.

وقتی می‌گوییم «ذره» معنایش این نیست که بررسی خود را به اشیای خیلی کوچک محدود می‌کنیم، بلکه می‌خواهیم بگوییم که اندازه و شکل اجسام مورد نظر ما در حل مسئله‌های این فصل تأثیر قابل ملاحظه‌ای ندارد و در مورد آنها می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ نیروها به یک نقطه وارد می‌شوند. از آنجا که چنین فرضی عملاً هم در بسیاری از موارد درست از آب درمی‌آید این توانایی را پیدا می‌کنیم که تعدادی از مسئله‌های مهندسی را که در این فصل آمده است حل کنیم.

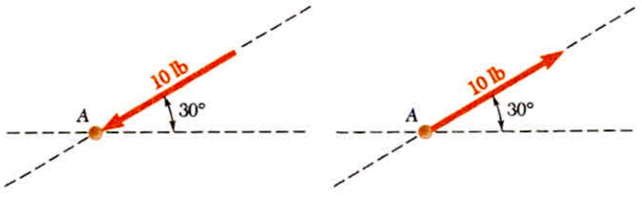
بخش اول این فصل را به بررسی نیروهای واقع در صفحه اختصاص داده‌ایم و در بخش دوم به تحلیل نیروها در فضای سه‌بعدی پرداخته‌ایم.

نیروهای واقع در صفحه

۲.۲ نیروی وارد بر یک ذره. برایند دو نیرو

نیرو نمایندهٔ کنش یک جسم بر روی جسم دیگر است و به‌طور کلی با نقطهٔ اثر، بزرگی و راستایش مشخص می‌شود. اما نیروهایی که بر یک ذرهٔ معین وارد می‌شوند نقطهٔ اثر مشترکی دارند. بنابراین هر نیرویی که در این فصل در نظر می‌گیریم با بزرگی و راستایش کاملاً مشخص می‌شود.

بزرگی نیرو با عددی از یکاها مشخص می‌شود. همان‌طور که در فصل ۱ گفتیم

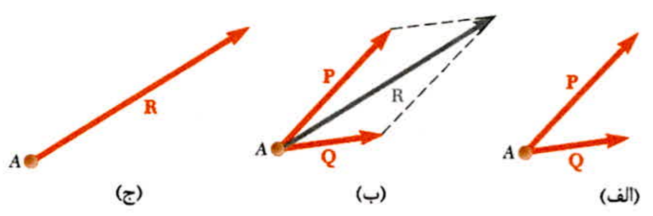


(ب) (الف)

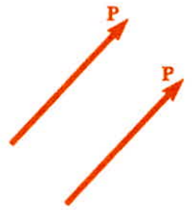
شکل ۱.۲

یکاهای SI که مهندسان برای اندازه‌گیری بزرگی نیرو به کار می‌برند عبارت‌اند از نیوتون (N) و کیلونیوتون (kN)، برابر با ۱۰۰۰N. در حالی که یکاهای متداول U.S. با ترتیب مشابه عبارت‌اند از پوند (lb) و کیلوپوند (kip) که برابر ۱۰۰۰lb است. راستای نیرو را خط اثر و جهت نیرو مشخص می‌کند. خط اثر همان خط راست و نامحدودی است که نیرو در امتداد آن وارد می‌شود؛ مشخصه آن زاویه‌ای است که با یک محور ثابت تشکیل می‌دهد (شکل ۱.۲). خود نیرو با یک پاره‌خط بر روی خط اثر نشان داده می‌شود؛ با استفاده از یک مقیاس مناسب، می‌شود طول این پاره‌خط را طوری اختیار کرد که نمایندهٔ بزرگی نیرو باشد. سرانجام، می‌رسیم به جهت نیرو که آن را می‌شود با نوک پیکان نمایش داد. وقتی نیرو را تعریف می‌کنیم مشخص کردن سو و جهت آن اهمیت دارد. دو نیرو با بزرگیها و خط اثرهای یکسان که جهتهایشان متفاوت باشد ــ مثل آنهایی که در شکل ۱.۲ (الف و ب) نشان داده‌ایم ــ اثرهایی کاملاً خلاف هم بر روی یک ذره می‌گذارند.

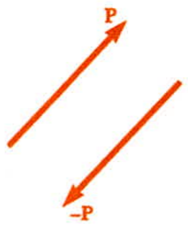
شواهد تجربی نشان می‌دهند که دو نیروی $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را که به یک ذره (A) اثر می‌کنند [شکل ۲.۲ (الف)]، می‌توان تبدیل به یک تک‌نیرو ($\mathbf{R}$) کرد که همان اثر را برروی ذره داشته باشد [شکل ۲.۲ (ج)]. این نیرو را برایند نیروهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ می‌گویند و آن را می‌شود مطابق شکل ۲.۲ (ب)، از طریق رسم متوازی‌الاضلاع نیروها به‌دست آورد. دو ضلع مجاور این متوازی‌الاضلاع را نیروهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ تشکیل



شکل ۲.۲



شکل ۴.۲



شکل ۵.۲

دهند و قطری که از نقطهٔ A می‌گذرد برایند دو نیرو است. البته این قانون مبتنی
ـه ازمایش است و نمی‌شود آن را به روش ریاضی اثبات کرد یا به‌دست آورد.

۳.۱ بردارها

ر مطالب بالا چنین برمی‌آید که نیروها از قواعد معمول جمع در حساب و جبر پیروی ی‌کنند. به‌عنوان مثال حاصل جمع دو نیروی عمود برهم ۴پوندی و ۳پوندی برابر ۵ . می‌شود، نه ۷ پوند. البته، نیروها تنها کمیتهایی نیستند که از روش جمع برداری انون متوازی‌الاضلاع پیروی می‌کنند. چنانکه بعداً خواهیم دید، جابه‌جایی، سرعت، ـاب، و اندازه حرکت هم نمونه‌های دیگری از کمیتهای فیزیکی‌اند که بزرگی و جهت استا) دارند، و از قانون متوازی‌الاضلاع تبعیت می‌کنند. همهٔ این کمیتها را می‌شود با بردار نمایش داد، در صورتی که کمیتهایی مثل حجم، جرم یا انرژی را، که بزرگی دارند ی جهت ندارند، با اعداد معمولی یا اسکالر نشان می‌دهند.

بردارها بنا به تعریف بیان ریاضیاتی کمیتهایی هستند که بزرگی و جهت دارند و ن قانون متوازی‌الاضلاع به هم افزوده می‌شوند. بردارها را با پیکان نمایش می‌دهند. این کتاب بردارها را با حرف سیاه (مثل **P**) نشان داده‌ایم تا از کمیتهای اسکالر ـمایز باشند. در دست‌نوشته‌ها می‌توانیم بردار را با رسم یک پیکان کوچک در بالای حرف موردنظر ($\vec{P}$) یا با رسم خطی در زیر آن ($\underline{P}$) نشان بدهیم. استفاده از این روش، بخصوص موقع استفاده از ماشین تحریر یا کامپیوتر، ترجیح داده می‌شود. بزرگی ـار را با طول پیکان مشخص می‌کنیم. در این کتاب برای مشخص کردن بزرگی بردار حرفهای ایتالیک (خوابیده) استفاده کرده‌ایم. بنابراین، بزرگی بردار **P** را با P نشان اهیم داد.

برداری که برای نمایش دادن نیروی وارد بر یک ذرهٔ معین به کار می‌رود نقطهٔ اثر املاً مشخصی دارد که همان خود ذره است. چنین برداری را بردار ثابت یا مقید می‌نامند که نمی‌شود آن را بدون تغییردادن شرایط مسئله حرکت داد. اما سایر کمیتهای فیزیکی، مثل کوپل (نگاه کنید به فصل ۳) را با بردارهایی نشان می‌دهند که آنها را می‌شود آزادانه در فضا به‌حرکت درآورد؛ به چنین بردارهایی بردار آزاد می‌گویند. بعضی کمیتهای فیزیکی مثل نیروهای وارد بر یک جسم صلب (نگاه کنید به فصل ۳) را هم با بردارهایی نشان می‌دهند که آنها را می‌شود در امتداد خط اثرشان حرکت داد یا لغزاند، این بردارها به بردارهای لغزان معروف‌اند.[۱]

دو بردار را که بزرگی و راستای یکسان داشته باشند ــ نقطهٔ اثرهاشان یکی هم که نباشد ــ برابر می‌نامند (شکل ۴.۲)؛ بردارهای برابر را می‌توان با یک حرف نشان داد.

بردار منفی بردار معین **P**، بنا به تعریف برداری است که بزرگی‌اش برابر با **P** و راستایش مخالف جهت **P** باشد (شکل ۵.۲)؛ منفی بردار **P** را با نماد **P**− نشان می‌دهند. بردارهای **P** و **P**− را معمولاً بردارهای برابر و مخالف، یا بردارهای قرینه می‌گویند. واضح است که

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

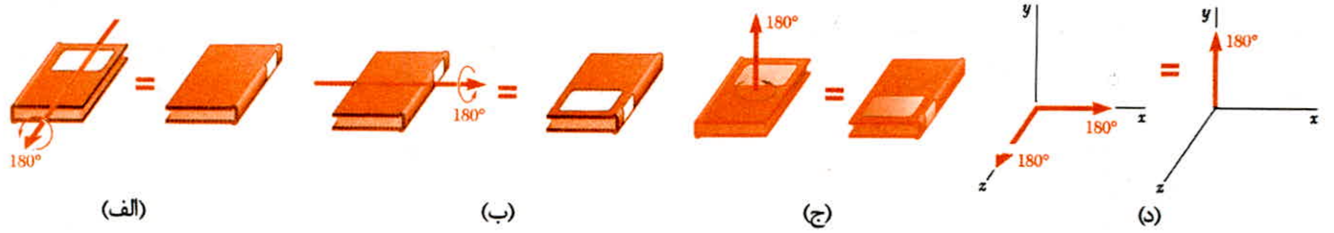
۴.۲ جمع بردارها

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، بنا به تعریف، بردارها طبق قانون متوازی‌الاضلاع به هم افزوده می‌شوند. بنابراین، مجموع دو بردار **P** و **Q** را می‌شود با اتصال آنها به نقطه‌ای مثل A، و رسم متوازی‌الاضلاع نیروها به‌دست آورد، به طوری که **P** و **Q** دو ضلع مجاور این متوازی‌الاضلاع باشند (شکل ۶.۲). در این صورت قطری که از نقطهٔ A می‌گذرد، جمع برداری **P** و **Q** است و این جمع را با **P + Q** نشان می‌دهند. اگر همیشه کمیتهای برداری و اسکالر را به‌دقت متمایز کنیم، نباید نگران استفاده از علامت + باشیم که هم برای نشان‌دادن جمع برداری به‌کار می‌رود و هم برای جمع اسکالر استفاده می‌شود. پس باید توجه داشته باشیم که بزرگی بردار **P + Q**، به‌طور کلی با مجموع بزرگیهای دو بردار **P** و **Q** (یعنی با $P + Q$) برابر نیست.

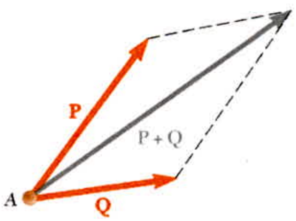
از آنجا که متوازی‌الاضلاع حاصل از بردارهای **P** و **Q** بستگی به ترتیب انتخاب

---

۱. بعضی از عبارتها نیز بزرگی و جهت دارند، ولی نمی‌شود آنها را طبق قانون متوازی‌الاضلاع به هم افزود. گرچه این عبارتها را می‌توان با پیکان نشان داد، ولی نمی‌شود آنها را بردار محسوب کرد. از جملهٔ این کمیتها، چرخشهای متناهی جسم صلب است. کتاب بسته‌ای را بر روی میز جلوی خود در وضعی عادی قرار بدهید، به طوری که روی جلد آن به طرف بالا و عطف آن به سمت چپ باشد. حالا ۲ را به اندازهٔ °۱۸۰ حول محوری موازی عطف، به سمت چپ بچرخانید [شکل ۳.۲ (الف)]؛ این چرخش را می‌توان با پیکانی به طول ۱۸۰ واحد در جهتی مطابق شکل نشان داد. حالا کتاب را از وضع جدید به اندازهٔ °۱۸۰ حول محور افقی عمود بر محور قبلی بچرخانید [شکل ۳.۲ (ب)]؛ این چرخش دوم را می‌توان با پیکانی به طول ۱۸۰ واحد در جهتی مطابق شکل نشان داد. اما می‌توانستیم کتاب را با تنها °۱۸۰ ـرخش حول محوری عمودی به این وضعیت برسانیم [شکل ۳.۲ (ج)]؛ نتیجه می‌گیریم که مجموع دو چرخش °۱۸۰ که با پیکانهای منطبق بر امتداد محورهای z و x نشان داده شده، چرخشی °۱۸۰ است که یکانی در امتداد محور y نمایش داده شده است [شکل ۳.۲ (د)]. واضح است که چرخشهای متناهی جسم صلب از قانون متوازی‌الاضلاع تبعیت نمی‌کند؛ بنابراین نمی‌شود آنها را با بردار نمایش داد.



شکل ۳.۲ چرخشهای متناهی جسمی صلب.



شکل ۶.۲

آنها ندارد، نتیجه می‌گیریم که جمع این دو بردار جابه‌جاپذیر است و می‌نویسیم

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \qquad (۱.۲)$$

از قانون متوازی‌الاضلاع، می‌توان روش دیگری را هم برای پیداکردن مجموع دو بردار به‌دست آورد. این روش که به قاعدهٔ مثلث معروف است، این‌طور به‌دست می‌آید: شکل ۶.۲ را در نظر بگیرید که در آن مجموع بردارهای **P** و **Q** با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع تعیین شده است. از آنجا که ضلع روبه‌روی **Q** در متوازی‌الاضلاع هم از نظر راستا و هم از لحاظ بزرگی برابر با **Q** است، پس می‌توانیم برای راحتی فقط نیمی از متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم [شکل ۷.۲ (الف)]. بنابراین مجموع این دو بردار را می‌شود با رسم بردارهای **P** و **Q** به شیوهٔ سر به دم، و بعد اتصال دم بردار **P** به سر بردار **Q** به‌دست آورد. در شکل ۷.۲ (ب)، نیم دیگر متوازی‌الاضلاع رسم‌شده و می‌بینید که همان نتیجهٔ قبلی به‌دست آمده است. به این ترتیب محقق می‌شود که جمع برداری جابه‌جاپذیر است.

تفریق یک بردار از بردار دیگر بنا به تعریف عبارت است از جمع یک بردار با منفی بردار دیگر. بنابراین، بردار $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ که نمایندهٔ تفاضل بردارهای **P** و **Q** است از افزودن $-\mathbf{Q}$ به **P** به‌دست می‌آید (شکل ۸.۲). می‌نویسیم

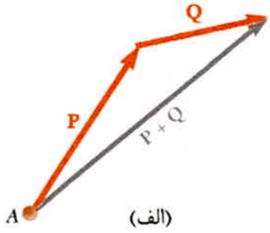
$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \qquad (۲.۲)$$

در اینجا بازهم می‌بینید که برای نشان دادن تفریق برداری و اسکالر از یک علامت مشترک استفاده کرده‌ایم، اما در این مورد هم اگر کمیتهای اسکالر و برداری را به‌دقت متمایز کنیم اشتباهی رخ نخواهد داد.

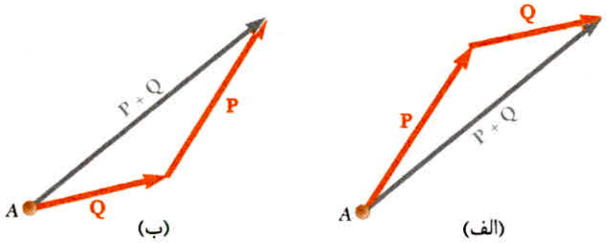
حالا جمع سه یا بیش از سه بردار را در نظر بگیرید. بنا به تعریف جمع سه بردار **P**، **Q**، و **S**، ابتدا با جمع **P** و **Q**؛ و بعد با افزودن **S** به بردار $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ به‌دست می‌آید. پس می‌نویسیم

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \qquad (۳.۲)$$

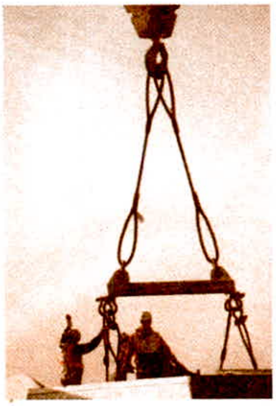
به همین ترتیب مجموع چهار بردار را هم می‌شود با افزودن بردار چهارم به مجموع سه بردار اول به‌دست آورد. از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع هر چند تا بردار را می‌توان با



شکل ۷.۲



شکل ۸.۲



عکس ۱.۲ همان‌گونه که در شکل می‌بینید، طبق قانون متوازی‌الاضلاع یا قاعدهٔ مثلث می‌ت... نیروی برایند وارد شده توسط دو کابل بلند بر قلاب را به‌دست آورد.

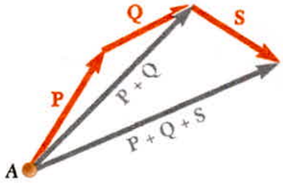
اعمال مکرر قانون متوازی‌الاضلاع به هر جفت بردار متوالی، و دست آخر تبدیل ه... بردارها به یک تک‌بردار به‌دست آورد.

اگر بردارها هم‌صفحه باشند، یعنی همه در یک صفحه واقع شده باشند، مجم... آنها را می‌شود به‌آسانی به‌طریق ترسیمی به‌دست آورد. در این مورد، کاربرد (مکر... قاعدهٔ مثلث به استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع ترجیح داده می‌شود. در شکل ۹.۲ مجموع سه بردار **P**، **Q**، و **S** را به این طریق به‌دست آورده‌ایم. به این ترتیب که قاعدهٔ مثلث را اول برای پیدا کردن مجموع $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ بردارهای **P** و **Q** به کار برده‌ایم و بعد از آن برای به‌دست‌آوردن مجموع $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ و **S** استفاده کرده‌ایم. اما برای جمع‌بستن این سه بردار می‌توانیم از تعیین $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ صرف‌نظر کنیم و مجموع آنها را، همان‌طور که شکل ۱۰.۲ می‌بینید، مستقیماً به‌دست آوریم. برای این منظور بردارها را به‌شیوهٔ سر به دم رسم می‌کنیم و بعد دم بردار اول را به سر بردار آخر وصل می‌کنیم. به این روش قاعدهٔ چند ضلعی جمع بردارها می‌گویند.

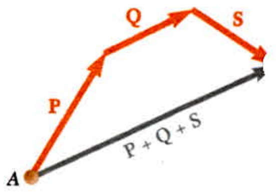
می‌بینید که اگر مطابق شکل ۱۱.۲، به‌جای بردارهای **Q** و **S**، مجموع آنها $\mathbf{Q} + \mathbf{S}$ را هم قرار بدهیم نتیجه تغییر نمی‌کند. پس می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \qquad (۴.۲)$$

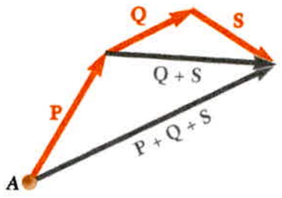
که حاکی از این است که جمع برداری شرکت‌پذیر است. حالا با توجه به این نکته ...



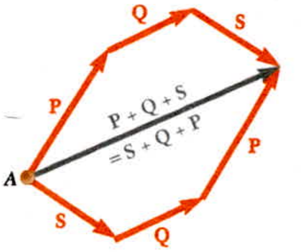
شکل ۹.۲



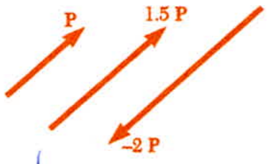
شکل ۱۰.۲



شکل ۱۱.۲



شکل ۱۲.۲



شکل ۱۳.۲

جمع دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\mathbf{S} = (\mathbf{P}+\mathbf{Q})+\mathbf{S} = \mathbf{S}+(\mathbf{P}+\mathbf{Q})$$
$$= \mathbf{S}+(\mathbf{Q}+\mathbf{P}) = \mathbf{S}+\mathbf{Q}+\mathbf{P} \qquad (۵.۱)$$

این عبارت و عبارتهای دیگری که به همین روش به‌دست می‌آیند، نشان می‌دهند که برای پیدا کردن مجموع چند بردار، رعایت ترتیب اهمیت ندارد (شکل ۱۲.۲).

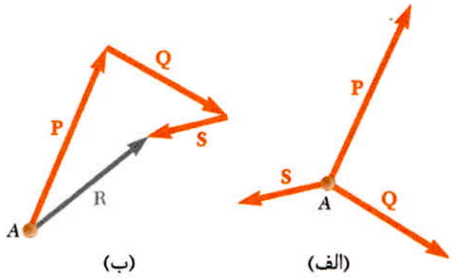
ضرب اسکالر در بردار. از آنجا که نشان دادن جمع $\mathbf{P}+\mathbf{P}$ به‌صورت $2\mathbf{P}$ و جمع $\mathbf{P}+\mathbf{P}+\mathbf{P}$ به صورت $3\mathbf{P}$، و به‌طور کلی نشان‌دادن مجموع n بردار $\mathbf{P}$ به صورت ضرب $n\mathbf{P}$ مناسبتر است، پس حاصلضرب یک عدد صحیح و مثبت n در یک بردار $\mathbf{P}$ را به‌عنوان برداری تعریف می‌کنیم که هم‌جهت با $\mathbf{P}$ و بزرگی‌اش n برابر P است. با بسط این تعریف برای دربرگرفتن همهٔ اسکالرها، و یادآوری تعریف بردار منفی در بخش ۳.۲، حاصلضرب $k\mathbf{P}$ یک اسکالر k در یک بردار $\mathbf{P}$ را به‌عنوان برداری تعریف می‌کنیم که (در صورت مثبت‌بودن k) هم‌راستا با بردار $\mathbf{P}$ است، یا (در صورت منفی بودن k) در خلاف جهت $\mathbf{P}$ است؛ در هر حال بزرگی این بردار برابر با حاصلضرب P در قدر مطلق k است (شکل ۱۳.۲).

۵.۲ برایند چند نیروی همرس

ذرهٔ A را در نظر بگیرید که به آن چند نیروی هم‌صفحه (یعنی، نیروهای واقع در همان صفحه) اثر می‌کنند [شکل ۱۴.۲ (الف)]. چون همهٔ این نیروها از A می‌گذرند، آنها را اصطلاحاً همرس[1] می‌گویند. مجموع بردارهای نمایندهٔ نیروهای وارد بر A را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ چندضلعی به‌دست آورد [شکل ۱۴.۲(ب)]. از آنجا که استفاده از قاعدهٔ چندضلعی عملاً معادل با کاربرد مکرر قانون متوازی‌الاضلاع است، پس بردار $\mathbf{R}$ به این ترتیب به‌دست می‌آید، نمایندهٔ برایند نیروهای همرس وارد بر A خواهد بود، یعنی تک‌نیرویی که به‌تنهایی بر ذرهٔ A همان اثر نیروهای اولیه را دارد. همان‌طور که قبلاً دیدید، اینجا هم ترتیب جمع‌کردن بردارهای $\mathbf{P}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{S}$ که نمایندهٔ نیروها هستند، بی‌اهمیت است.

۶.۲ تجزیهٔ یک نیرو به مؤلفه‌های آن

اینجا دیدیم که دو یا چند نیروی وارد بر یک ذره را می‌توان به یک تک‌نیرو تبدیل کرد که همان اثر را بر روی ذره دارد. برعکس، هر تک‌نیروی $\mathbf{F}$ را که به یک ذره اثر می‌کند



شکل ۱۴.۲

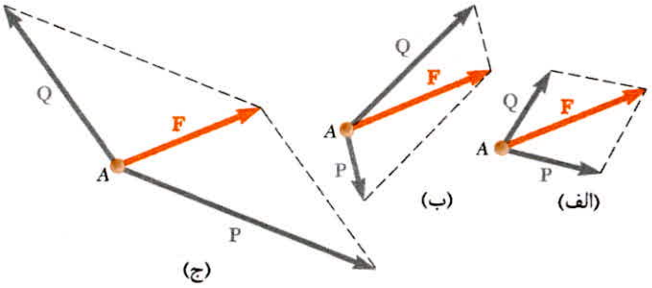
می‌توان به دو یا چند نیرو تبدیل کرد که (باهم) همان اثر را بر ذره می‌گذارند. این نیروها را مؤلفه‌های نیروی اصلی $\mathbf{F}$ می‌گویند و به فرایند جایگزینی آنها به‌جای $\mathbf{F}$ می‌گویند تجزیهٔ نیروی $\mathbf{F}$ به مؤلفه‌ها.

واضح است که هر نیروی $\mathbf{F}$ را می‌شود به بی‌نهایت دسته مؤلفه تجزیه کرد. از این میان دسته‌های دو مؤلفه‌ای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ در کاربردهای عملی از همه مهمترند. اما بازهم تعداد روشهای تجزیهٔ یک نیرو به دو مؤلفه نامحدود است (شکل ۱۵.۲). در اینجا توجه خود را به دو مورد خاص معطوف می‌کنیم:

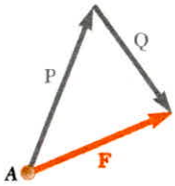
۱. یکی از دو مؤلفه (مثلاً $\mathbf{P}$) معلوم است. در این مورد مؤلفهٔ دوم ($\mathbf{Q}$) با استفاده از قاعدهٔ مثلث نیروها و اتصال سر $\mathbf{P}$ به سر $\mathbf{F}$ به‌دست می‌آید (شکل ۱۶.۲)؛ بزرگی و جهت $\mathbf{Q}$ هم به طریق ترسیمی، یا با استفاده از قواعد مثلثاتی تعیین می‌شود. $\mathbf{Q}$ که تعیین شد هر دو مؤلفهٔ $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را باید به A اعمال کرد.

۲. خط اثر هریک از مؤلفه‌ها معلوم است. در این مورد بزرگی و جهت مؤلفه‌ها با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع و رسم خطوطی (از سر نیروی $\mathbf{F}$) به موازات خط اثرها به‌دست می‌آید (شکل ۱۷.۲). این روش به یافتن مؤلفه‌های $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ می‌انجامد که می‌شود آنها را به روش ترسیمی یا مثلثاتی، با به کار بردن قانون سینوسها، به‌دست آورد.

موارد مختلف دیگری را هم می‌شود در نظر گرفت؛ مثلاً، ممکن است که امتداد یکی از مؤلفه‌ها معلوم باشد و بخواهیم کمترین مقدار ممکن برای مؤلفه دیگر را تعیین کنیم (نگاه کنید به مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۲). به هر حال در همهٔ موارد مثلث یا متوازی‌الاضلاع مناسبی رسم می‌کنیم که شرایط مسئله را برآورده کند.

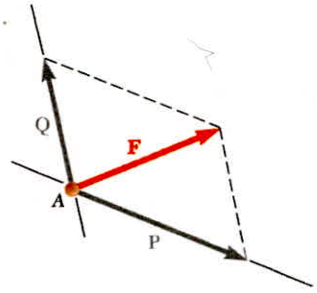


شکل ۱۵.۲



شکل ۱۶.۲

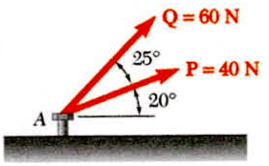
1. concurent



شکل ۱۷.۲

مسئلهٔ نمونه ۱.۲

دو نیروی **P** و **Q** مطابق شکل به پیچ A اثر می‌کنند. برایند آنها را تعیین کنید.



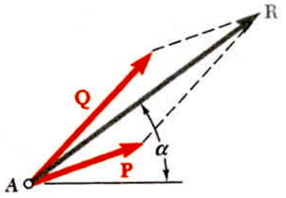
حل:

حل ترسیمی. متوازی‌الاضلاع نیروها را با دو ضلع **P** و **Q** به مقیاس درست رسم می‌کنیم. بزرگی و راستای برایند را اندازه می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$R = ۹۸\ \mathrm{N} \qquad \alpha = ۳۵^\circ$ ◄ **R = ۹۸ N ∡۳۵°**

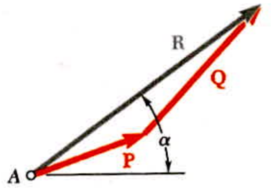
از قاعدهٔ مثلث هم می‌توانیم استفاده کنیم. نیروهای **P** و **Q** را به شیوهٔ سربه‌دم رسم می‌کنیم. دوباره بزرگی و جهت برایند آنها را اندازه می‌گیریم.

$R = ۹۸\ \mathrm{N} \qquad \alpha = ۳۵^\circ$ ◄ **R = ۹۸ N ∡۳۵°**



حل مثلثاتی. باز هم از قاعدهٔ مثلث استفاده می‌کنیم؛ دو ضلع و زاویهٔ بین آنها معلوم است. بااستفاده از قانون کسینوسها داریم

$$R^۲ = P^۲ + Q^۲ - ۲PQ\cos B$$
$$R^۲ = (۴۰\ \mathrm{N})^۲ + (۶۰\ \mathrm{N})^۲ - ۲(۴۰\ \mathrm{N})(۶۰\ \mathrm{N})\cos ۱۵۵^\circ$$
$$R = ۹۷٫۷۳\ \mathrm{N}$$



حالا، با به کاربردن قانون سینوسها، می‌نویسیم

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \qquad \frac{\sin A}{۶۰\ \mathrm{N}} = \frac{\sin ۱۵۵^\circ}{۹۷٫۷۳\ \mathrm{N}} \qquad (۱)$$

از حل معادلهٔ (۱) برحسب $\sin A$، نتیجه می‌شود

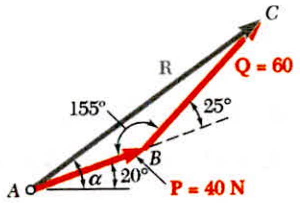
$$\sin A = \frac{(۶۰\ \mathrm{N})\sin ۱۵۵^\circ}{۹۷٫۷۳\ \mathrm{N}}$$

با استفاده از ماشین‌حساب، ابتدا خارج قسمت کسر و بعد آرک سینوس آن محاسبه می‌کنیم؛ که نتیجه می‌شود

$$A = ۱۵٫۰۴^\circ \qquad \alpha = ۲۰^\circ + A = ۳۵٫۰۴^\circ$$

پاسخها را فقط تا سه رقم بامعنی ثبت می‌کنیم (بخش ۶.۱):

◄ **R = ۹۷٫۷ N ∡۳۵٫۰°**



حل مثلثاتی دیگر. مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD را رسم و مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم

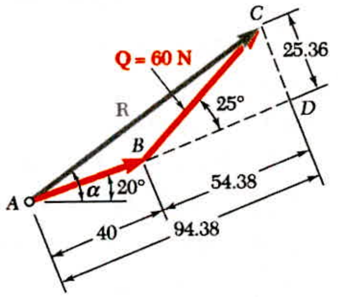
$$CD = (۶۰\ \mathrm{N})\sin ۲۵^\circ = ۲۵٫۳۶\ \mathrm{N}$$
$$BD = (۶۰\ \mathrm{N})\cos ۲۵^\circ = ۵۴٫۳۸\ \mathrm{N}$$

سپس با استفاده از مثلث ACD، داریم

$$\tan A = \frac{۲۵٫۳۶\ \mathrm{N}}{۹۴٫۳۸\ \mathrm{N}} \qquad A = ۱۵٫۰۴^\circ$$
$$R = \frac{۲۵٫۳۶}{\sin A} \qquad R = ۹۷٫۷۳\ \mathrm{N}$$

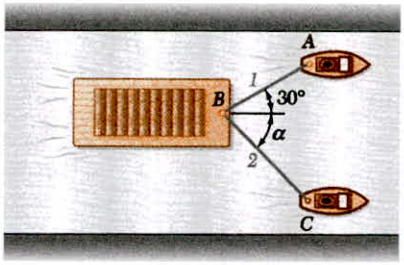
باز هم به همان نتیجهٔ قبلی می‌رسیم

$\alpha = ۲۰^\circ + A = ۳۵٫۰۴^\circ$ ◄ **R = ۹۷٫۷ N ∡۳۵٫۰°**



مسئلهٔ نمونه ۲.۲

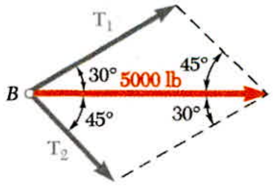
قایق B توسط دو یدک‌کش A و C کشیده می‌شود. اگر برایند نیروهایی که یدک‌کشه وارد می‌کنند ۵۰۰۰ lb و در امتداد محور قایق باشد، (الف) کشش در هریک از طنابه را تعیین کنید، $\alpha = ۴۵^\circ$ است. (ب) مقدار α را طوری تعیین کنید که کشش در طناب ۲ حداقل باشد.



ن:

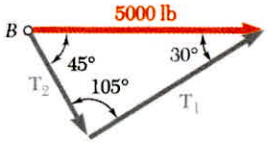
الف. کشش به‌ازای $\alpha = ۴۵°$. حل ترسیمی. از قانون متوازی‌الاضلاع استفاده ـکنیم؛ قطر متوازی‌الاضلاع (برایند نیروها) معلوم و برابر با ۵۰۰۰ lb و به‌طرف راست است. اضلاع آن را موازی با طنابها رسم می‌کنیم. اگر شکل را به مقیاس درست رسم ـیم، با اندازه‌گیری این مقدارها را به‌دست می‌آوریم

◄ $T_1 = ۳۷۰۰\ \text{lb}$ $\qquad T_2 = ۲۶۰۰\ \text{lb}$



حل مثلثاتی. از قاعدهٔ مثلث می‌توان استفاده کرد. توجه می‌کنیم که این مثلث، نمایانگر نیمی از متوازی‌الاضلاع بالاست. با استفاده از قانون سینوسها می‌نویسیم

$$\frac{T_1}{\sin ۴۵°} = \frac{T_2}{\sin ۳۰°} = \frac{۵۰۰۰\ \text{lb}}{\sin ۱۰۵°}$$

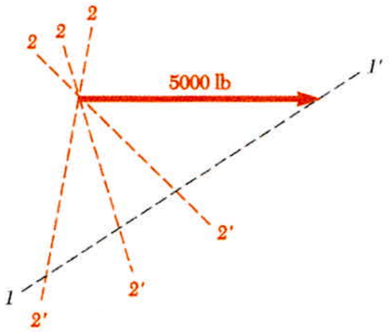


ابتدا با ماشین‌حساب، خارج قسمت کسر آخر را حساب می‌کنیم و نتیجه را به حافظه می‌دهیم. سپس این مقدار را به‌ترتیب در $\sin ۴۵°$ و $\sin ۳۰°$ ضرب می‌کنیم، به دست می‌آوریم

◄ $T_1 = ۳۶۶۰\ \text{lb}$ $\qquad T_2 = ۲۵۹۰\ \text{lb}$

ب. مقدار α به‌ازای اینکه T_2 حداقل باشد. برای اینکه α را طوری تعیین کنیم که کشش در طناب ۲ حداقل باشد، بازهم از قاعدهٔ مثلث استفاده می‌کنیم. در شکلی که می‌بینید خط ۱-'۱ امتداد معلوم کشش $\mathbf{T}_1$ است. $\mathbf{T}_2$ می‌تواند راستاهای مختلفی داشته باشد که در شکل با خطوط ۲-'۲ نشان داده شده‌اند. می‌بینیم که مقدار T_2 وقتی حداقل می‌شود که $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ برهم عمود باشند. مقدار حداقل T_2 برابر است با

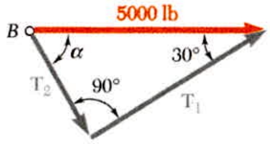
$$T_2 = (۵۰۰۰\ \text{lb}) \sin ۳۰° = ۲۵۰۰\ \text{lb}$$



و مقدارهای متناظر T_1 و α برابرند با

$$T_1 = (۵۰۰۰\ \text{lb}) \cos ۳۰° = ۴۳۳۰\ \text{lb}$$

$$\alpha = ۹۰° - ۳۰° \qquad ◄\ \alpha = ۶۰°$$



چگونه مسئله حل کنیم

ـبخشهای گذشته به قانون متوازی‌الاضلاع، برای جمع بردارها و کاربرد آنها اختصاص داشت. حالا حل مسئله‌ها را به عهدهٔ خود شما می‌گذاریم. بعضی از این مسئله‌ها ممکن است ـبیه یکی از مسئله‌های نمونه و بعضی از آنها ممکن است اصلاً شباهتی به مسائل نمونه نداشته باشند. به هر حال وجه اشتراک مسئله‌های این بخش و مسئله‌های نمونه این است که ـمهٔ آنها را می‌توان مستقیماً با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع حل کرد.

برای حل مسئله طبق مراحل زیر عمل کنید:

۱. ببینید کدام نیروها دارند وارد می‌شوند و کدام نیرو برایند است. بد نیست که معادلهٔ برداری وابستگی نیروها را بنویسید. مثلاً در مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۲ باید داشته باشیم

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

ممکن است بخواهید رابطهٔ وابستگی نیروها را به‌عنوان فرمولی برای حل قسمت بعدی مسئله به خاطر بسپارید.

۲. یک متوازی‌الاضلاع بکشید که دو ضلع مجاورش همان دو نیروی موردنظر ـ قطرش برابر با برایند این دو نیرو باشد (شکل ۲.۲). به‌جای آن می‌توانید از قاعدهٔ مثلث استفاده کنید، نیروها را به طریق سر به دم رسم کنید و برای پیدا کردن برایندشان دم اولین بردار را به سر دومین بردار وصل کنید (شکل ۷.۲).

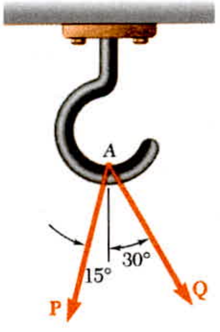
۳. همهٔ ابعاد را مشخص کنید. یکی از مثلثهای دو نیمهٔ متوازی‌الاضلاع، یا مثلث حاصل از قاعدهٔ مثلث، را در نظر بگیرید و همهٔ ابعاد را —اعم از ضلع یا زاویه— روی آن نشان دهید و ابعاد مجهول را به روش ترسیمی یا مثلثاتی تعیین کنید. اگر از روش مثلثاتی استفاده می‌کنید یادتان باشد که در صورت معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین آنها اول قانون کسینوسها را به کار ببرید [مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۲] و اگر یک ضلع و دو زاویه معلوم بود از قانون سینوسها استفاده کنید [مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۲].

با توجه به شکلهای بخش ۶.۲، حتماً لازم نیست که دو مؤلفهٔ یک نیرو برهم عمود باشند. بنابراین، در تجزیه یک نیرو به دو مؤلفه، ضروری است که بر روی دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع مورد نظر، نقطه اثر دو مؤلفه را مشخص کنیم.

اگر با درس مکانیک آشنا باشید ممکن است فکر کنید که بهتر است به‌جای استفاده از فنون این درس از روش تجزیه نیروها به مؤلفه‌های قائم استفاده کنید. این روش اگرچه مهم است و آن را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد، اما استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع، حل بسیاری از مسئله‌ها را آسان می‌کند و باید آن را خوب یاد بگیریم.

مسئله‌ها [1]

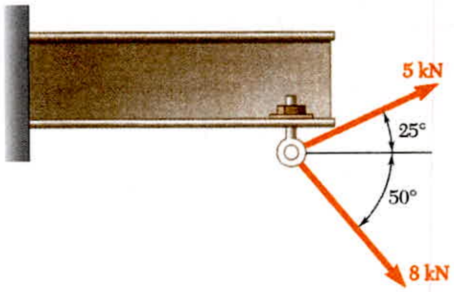
۱.۲ دو نیروی **P** و **Q** مطابق شکل به نقطهٔ A یک قلاب وارد می‌شوند. اگر $P =$ ۱۵ lb و $Q =$ ۲۵ lb باشد، به‌طریق ترسیمی بزرگی و راستای برایند آنها را با استفاده از (الف) قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعده مثلث تعیین کنید.



شکل م ۱.۲ و م ۲.۲

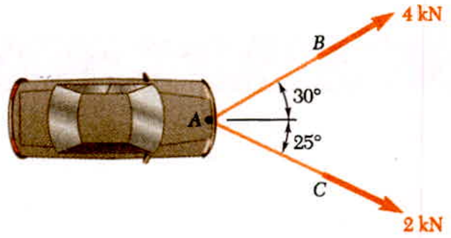
۲.۲ دو نیروی **P** و **Q** مطابق شکل به نقطهٔ A یک قلاب وارد می‌شوند. اگر $P =$ ۴۵ lb و $Q =$ ۱۵ lb باشد، به طریق ترسیمی بزرگی و راستای برایند را با استفاده از (الف) قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعده مثلث تعیین کنید.

۳.۲ از دو نیرو برای محکم کردن یک پیچ گوشواره‌ای به تیر استفاده شده است. به شیوهٔ ترسیمی بزرگی و راستای برایند آنها را با استفاده از (الف) قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعدهٔ مثلث، تعیین کنید.



شکل م ۳.۲

۴.۲ اتومبیلی از کار افتاده توسط طنابهایی با دو نیرو مطابق شکل کشیده می‌شوند. به‌طریق ترسیمی بزرگی و راستای برایند را با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعده مثلث، به دست آورید.

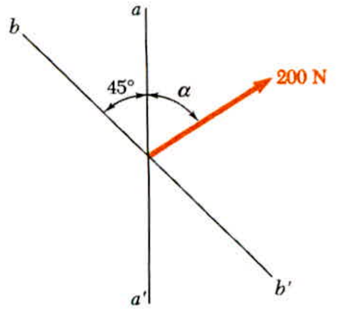


شکل م ۴.۲

۵.۲ می‌خواهیم نیروی ۲۰۰ نیوتنی را به دو مؤلفه در امتداد خطوط a-a' و b-b' تجزیه کنیم. (الف) با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی زاویه α را تعیین کنید. (ب) اگر بدانیم که مؤلفه در امتداد a-a' برابر ۱۵۰ N است، مقدار متناظر مؤلفه در امتداد b-b' را به‌دست آورید؟

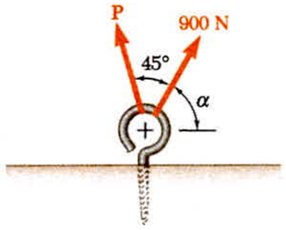
۶.۲ می‌خواهیم نیروی ۲۰۰ نیوتنی را به دو مؤلفه در امتداد خطوط a-a' و b-b' تجزیه کنیم. (الف) با استفاده از رابطه مثلثاتی، زاویه α را تعیین کنید، اگر بدانیم که مؤلفه در امتداد b-b' برابر ۱۲۰ N است. (ب) مقدار متناظر مؤلفه در امتداد a-a' را به‌دست آورید؟

۱. جوابهای تمام مسئله‌هایی که شماره‌های آنها با حروف معمولی تایپ شده‌اند (مانند ۱.۲) در انتهای کتاب آورده‌ایم. اما جوابهای مسئله‌هایی که شماره‌های آنها با حروف خوابیده تایپ شده‌اند (مانند *۳.۲*) را در انتهای کتاب نیاورده‌ایم.



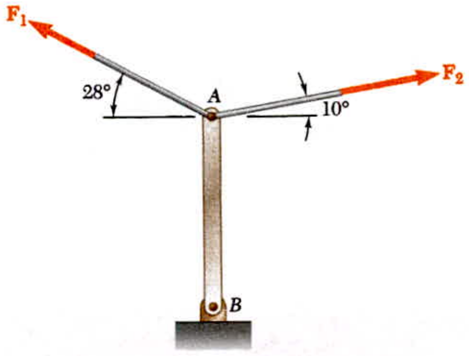
شکل م ۵.۲ و م ۶.۲

۷.۲ دو نیرو مطابق شکل بر حلقه‌ای وارد می‌شود. با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی و با دانستن اینکه بزرگی نیروی **P** برابر ۶۰۰ N است، معین کنید (الف) زاویه لازم را، اگر برایند **R** و نیروی وارد بر تکیه‌گاه قائم باشد. (ب) بزرگی متناظر **R** را.



شکل م ۷.۲

۸.۲ دو میله کنترل در نقطهٔ A روی اهرم AB متصل شده است. با استفاده از رابطه مثلثاتی و دانستن اینکه نیروی میله سمت چپ $F_1 =$ ۳۰ lb است، معین کنید (الف) نیروی لازم F_2 بر میله سمت راست را، اگر برایند **R** نیروهای وارد برمیله‌ها روی اهرم قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر **R** را.



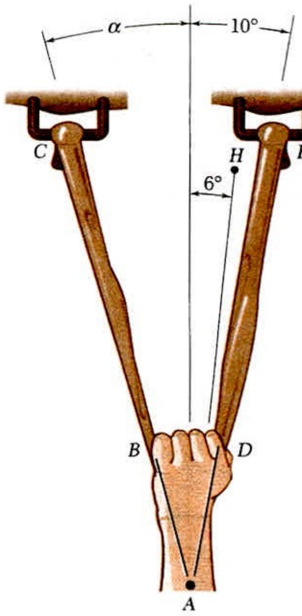
شکل م ۸.۲ و م ۹.۲

۹.۲ دو میله کنترل در نقطهٔ A روی اهرم AB متصل شده‌اند. با استفاده از رابطه مثلثاتی و دانستن اینکه نیروی سمت راست میله $F_2 =$ ۲۰ lb است، معین کنید (الف) نیروی لازم F_1 سمت چپ را، اگر بخواهیم برایند **R** نیروهای وارد بر میله‌ها بر روی اهرم قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر **R** را.

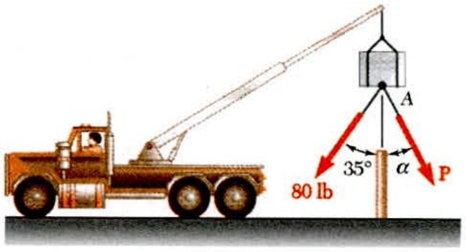
۱۰.۲ یک نوارکشسان به دست محکم چسبیده و سپس مطابق شکل کشیده می‌شود. اگر کشش در قسمتهای BC و DE نوار برابر ۸۰ N و ۶۰ N باشد، مطلوب است با روش مثلثاتی (الف) زاویه لازم α را برای اینکه برایند **R** دو نیروی وارد به دست در نقطهٔ A قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر **R** را.

۱۱.۲ برای پایداری یک تابلوی راهنمایی، از پایین در نقطهٔ A به دو کابل متصل است. با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی و دانستن اینکه $\alpha =$ ۲۵° است، معین کنید (الف) بزرگی نیروی لازم **P** را، اگر برایند **R** دو نیروی وارد بر A قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر **R** را.

۱۲.۲ برای پایداری یک تابلوی راهنمایی، از پایین در نقطهٔ A به دو کابل متصل است. با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی و دانستن اینکه $\mathbf{P} =$ ۷۰ lb است، معین کنید (الف) زاویه α لازم را، اگر برایند **R** دو نیروی وارد بر A قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر **R** را.



شکل م ۱۰.۲



شکل م ۱۱.۲ و م ۱۲.۲

۱۳.۲ همان‌گونه که در شکل م۱۱.۲ می‌بینید، دو کابل برای نگهداری تابلوی راهنمایی از ... در نقطهٔ A به تابلو متصل است. با استفاده از رابطه مثلثاتی، (الف) بزرگی و راستای ...کترین نیروی $\mathbf{P}$ را تعیین کنید، برای اینکه برایند $\mathbf{R}$ دو نیروی وارد بر A قائم باشد، (ب) ب...گی متناظر $\mathbf{R}$ را.

۱۴.۲ چنانکه در شکل م۱۰.۲ نشان‌داده شده است، نوارکشسان شکل م۱۰.۲ چسبیده، و سپس کشیده می‌شود. اگر کشش در قسمت DE از نوار برابر N ۷۰ باشد، با روش مثلثاتی ...ن کنید (الف) بزرگی و راستای کوچکترین نیرو بر دست در نقطه A را طوری که در امتداد ...ت BC از نوار باشد، در حالی که برایند R دو نیروی وارد بر دست در نقطه A در امتداد خط واصل دو نقطه A و H قرار گیرد، (ب) بزرگی متناظر R را.

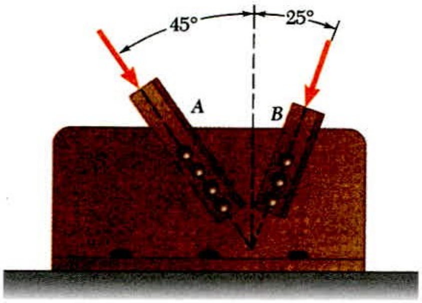
۱۵.۲ مسئلهٔ ۱.۲ را با استفاده از رابطه مثلثاتی حل کنید.

۱۶.۲ مسئلهٔ ۲.۲ را با استفاده از رابطه مثلثاتی حل کنید.

۱۷.۲ مسئلهٔ ۳.۲ را با استفاده از رابطه مثلثاتی حل کنید.

۱۸.۲ برای حلقه تکیه‌گاه مسئلهٔ ۷.۲، با استفاده از رابطه مثلثاتی بزرگی و راستای برایند دو نیروی وارد بر تکیه‌گاه را به دست آورید. می‌دانیم که $P = 500$ N و $\alpha = 40°$ است.

۱۹.۲ دو عضو سازه‌ای A و B مطابق شکل با پیچ و مهره به یک پایه متصل شده‌اند. می‌دانیم که هر دو عضو در حالت فشار هستند و نیروی kN ۳۰ بر عضو A و kN ۲۰ بر عضو B وارد می‌شود. با استفاده از رابطه مثلثاتی، بزرگی و راستای برایند نیروهای وارد بر تکیه‌گاه توسط عضوهای A و B را تعیین کنید.



شکل م ۱۹.۲ و م ۲۰.۲

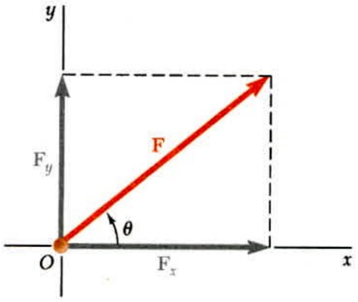
۲۰.۲ دو عضو سازه‌ای A و B مطابق شکل با پیچ و مهره به تکیه‌گاهی متصل شده‌اند. می‌دانیم که هر دو عضو در حالت فشار هستند، و اینکه نیروی kN ۲۰ بر عضو A و kN ۳۰ بر عضو B وارد می‌شود. با استفاده از رابطه مثلثاتی بزرگی و راستای برایند نیروهای وارد بر تکیه‌گاه توسط عضوهای A و B را تعیین کنید.

۷.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو. بردارهای یکه[1]

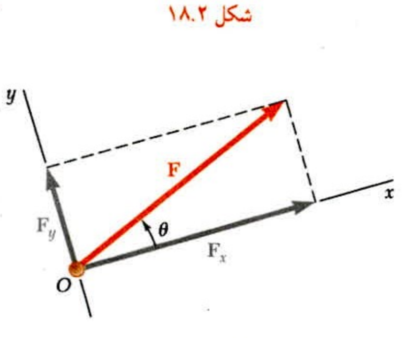
در بسیاری از مسئله‌ها لازم می‌شود که یک نیرو را به دو مؤلفهٔ متعامد تجزیه کنیم. در شکل ۱۸.۲ نیروی $\mathbf{F}$ را به دو مؤلفهٔ $\mathbf{F}_x$ در امتداد محور x و $\mathbf{F}_y$ در امتداد محور y تجزیه کرده‌ایم. متوازی‌الاضلاعی که برای به‌دست‌آوردن این دو مؤلفه رسم شده در واقع یک مستطیل است و $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ را مؤلفه‌های قائم می‌گویند.

معمولاً محورهای x و y را، مثل شکل ۱۸.۲، به‌ترتیب افقی و قائم می‌گیرند؛ اما می‌شود مانند شکل ۱۹.۲ آنها را در هر دو راستای عمود بر هم انتخاب کرد. خواننده باید خط‌چینهای شکلهای ۱۸.۲ و ۱۹.۲ را موازی با محورهای x و y ببیند، نه عمود بر آنها. اتخاذ چنین روشی از بروز اشتباه در تعیین مؤلفه‌های مایل جلوگیری خواهد کرد (بخش ۶.۲).

حالا به‌ترتیب در امتداد محور xها و yهای مثبت دو بردار واحد (به بزرگی ۱) اختیار می‌کنیم. این بردارها را بردار یکه می‌گویند و آنها را به‌ترتیب بر روی محورهای

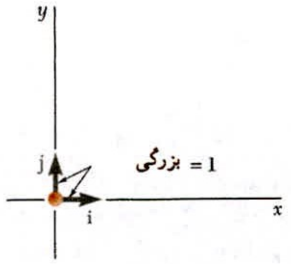


شکل ۱۸.۲

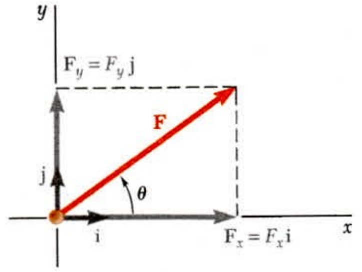


شکل ۱۹.۲

۱. ویژگیهای به‌دست آمده در بخشهای ۷.۲ و ۸.۲ را می‌شود به سهولت به مؤلفه‌های قائم هرکمیت برداری تعمیم داد.



شکل ۲۰.۲



شکل ۲۱.۲

x و y با **i** و **j** نشان می‌دهند (شکل ۲۰.۲). با توجه به تعریف ضرب اسکالر در یک بردار که در بخش ۴.۲ ارائه کردیم، ملاحظه می‌کنیم که مؤلفه‌های قائم $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ نیروی **F** را می‌شود به‌ترتیب از طریق ضرب بردارهای **i** و **j** در اسکالرهای مناسب به‌دست آورد (شکل ۲۱.۲). پس می‌نویسیم

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \qquad (۶.۲)$$

و

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \qquad (۷.۲)$$

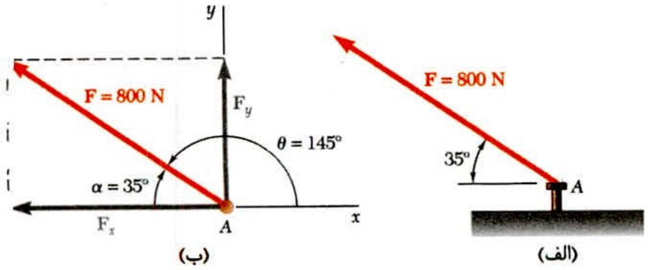
اگرچه اسکالرهای F_x و F_y می‌توانند بسته به جهت $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$، مثبت یا منفی باشند، اما قدرمطلقهای آنها به‌ترتیب برابر با بزرگی مؤلفه‌های $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$اند. اسکالرهای F_x و F_y را مؤلفه‌های اسکالر نیروی **F** می‌گویند، در حالی که مؤلفه‌های واقعی نیروهای $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ را باید مؤلفه‌های برداری **F** نامید. با این حال تا وقتی که امکان بروز اشتباه در میان نباشد، مؤلفه‌های برداری و همین طور مؤلفه‌های اسکالر **F** را فقط مؤلفه‌های **F** می‌نامند. باید توجه کرد که مؤلفهٔ اسکالر F_x به شرطی مثبت است که مؤلفهٔ برداری $\mathbf{F}_x$ هم‌جهت با بردار یکهٔ **i** باشد (یعنی، هم‌جهت با محور xهای مثبت باشد) و موقعی منفی است که $\mathbf{F}_x$ جهتی مخالف با بردار یکهٔ **i** داشته باشد. همین نتیجه را می‌شود با توجه به علامت مؤلفهٔ اسکالر F_y به‌دست آورد.

اگر بزرگی نیروی **F** را با F و زاویهٔ بین **F** و محور x را که در جهت پادساعتگرد از محور xهای مثبت اندازه‌گیری می‌شود، θ بنامیم (شکل ۲۱.۲)، می‌توانیم مؤلفه‌های اسکالر نیروی **F** را به این صورت بیان کنیم:

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\sin\theta \qquad (۸.۲)$$

یادآوری می‌کنیم که این رابطه‌ها برای هر مقدار از زاویهٔ θ از $۰°$ تا $۳۶۰°$ صادق‌اند و هم علامت و هم قدر مطلق مؤلفه‌های اسکالر F_x و F_y را تعیین می‌کنند.

مثال ۱. نیرویی برابر با ۸۰۰ N، مطابق شکل ۲۲.۲ (الف)، به پیچ A اثر می‌کند. مؤلفه‌های افقی و عمودی این نیرو را تعیین کنید.



شکل ۲۲.۲

برای به‌دست آوردن علامت صحیح مؤلفه‌های اسکالر F_x و F_y، باید ما
$\theta = ۱۸۰° - ۳۵° = ۱۴۵°$ را در رابطه‌های (۸.۲) قرار بدهیم. اما راه عملی‌تر
است که علامتهای F_x و F_y را بدون انجام محاسبه [شکل ۲۲.۲ (ب)] تعیین کن
توابع مثلثاتی $\alpha = ۳۵°$ را به کار ببریم. بنابراین می‌نویسیم

$$F_x = -F\cos\alpha = -(۸۰۰\ \mathrm{N})\cos ۳۵° = -۶۵۵\ \mathrm{N}$$

$$F_y = +F\sin\alpha = +(۸۰۰\ \mathrm{N})\sin ۳۵° = +۴۵۹\ \mathrm{N}$$

پس مؤلفه‌های برداری **F** چنین‌اند

$$\mathbf{F}_x = -(۶۵۵\ \mathrm{N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(۴۵۹\ \mathrm{N})\mathbf{j}$$

و می‌توانیم **F** را به این صورت بنویسیم

$$\mathbf{F} = -(۶۵۵\ \mathrm{N})\mathbf{i} + (۴۵۹\ \mathrm{N})\mathbf{j}$$

مثال ۲. شخصی با نیروی ۳۰۰ N طنابی را که به یک ساختمان بسته شده ا
می‌کشد [شکل ۲۳.۲ (الف)]. مؤلفه‌های افقی و عمودی نیروی وارد به نقطهٔ
چقدرند؟

به طوری که در شکل ۲۳.۲ (ب) می‌بینید

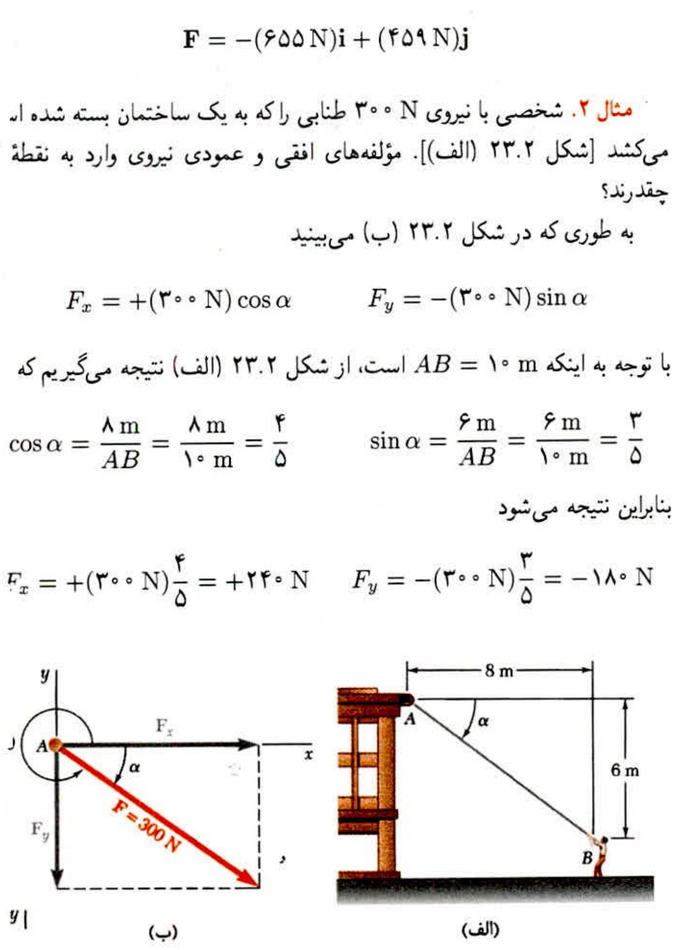
$$F_x = +(۳۰۰\ \mathrm{N})\cos\alpha \qquad F_y = -(۳۰۰\ \mathrm{N})\sin\alpha$$

با توجه به اینکه $AB = ۱۰\ \mathrm{m}$ است، از شکل ۲۳.۲ (الف) نتیجه می‌گیریم که

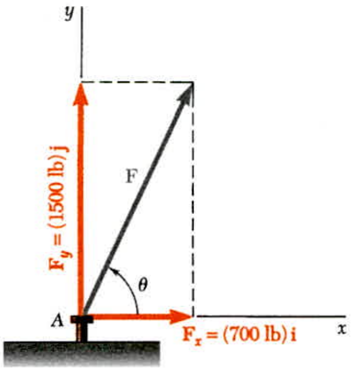
$$\cos\alpha = \frac{۸\ \mathrm{m}}{AB} = \frac{۸\ \mathrm{m}}{۱۰\ \mathrm{m}} = \frac{۴}{۵} \qquad \sin\alpha = \frac{۶\ \mathrm{m}}{AB} = \frac{۶\ \mathrm{m}}{۱۰\ \mathrm{m}} = \frac{۳}{۵}$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$F_x = +(۳۰۰\ \mathrm{N})\frac{۴}{۵} = +۲۴۰\ \mathrm{N} \qquad F_y = -(۳۰۰\ \mathrm{N})\frac{۳}{۵} = -۱۸۰\ \mathrm{N}$$



شکل ۲۳.۲



شکل ۲۴.۲

و می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = (۲۴۰\ \text{N})\mathbf{i} - (۱۸۰\ \text{N})\mathbf{j}$$

وقتی نیرویی مانند $\mathbf{F}$ با مؤلفه‌های قائمش یعنی F_x و F_y تعریف شد (نگاه کنید به شکل ۲۱.۲)، زاویهٔ θ را که مشخصهٔ راستای نیرو است می‌شود از این رابطه به‌دست آورد

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \qquad (۹.۲)$$

بزرگی F این نیرو را می‌شود با استفاده از قضیه فیثاغورث و نوشتن رابطهٔ

$$F = \sqrt{F_x^۲ + F_y^۲} \qquad (۱۰.۲)$$

یا از حل یکی از رابطه‌های (۸.۲) برای F به‌دست آورد.

مثال ۳. نیروی $\mathbf{F} = (۷۰۰\ \text{lb})\mathbf{i} + (۱۵۰۰\ \text{lb})\mathbf{j}$ به پیچ A وارد می‌شود. بزرگی این نیرو، و زاویه θ را که این نیرو با محور افقی تشکیل می‌دهد، تعیین کنید.

ابتدا نموداری رسم می‌کنیم که دو مؤلفه قائم نیرو و زاویه θ را نشان دهد (شکل ۲۴.۲). از معادله (۹.۲)، می‌نویسیم

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{۱۵۰۰\ \text{lb}}{۷۰۰\ \text{lb}}$$

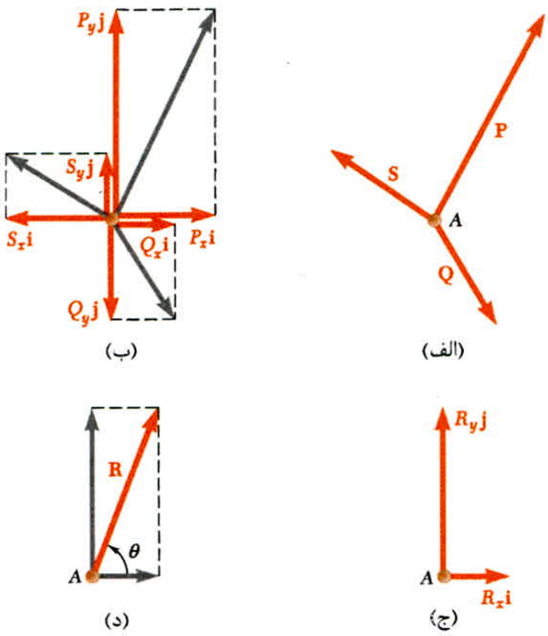
با استفاده از یک ماشین‌حساب[1]، $۱۵۰۰\ \text{lb}$ را به $۷۰۰\ \text{lb}$ تقسیم می‌کنیم و بعد، از آن آرک تانژانت می‌گیریم، $\theta = ۶۵{,}۰°$ به‌دست می‌آید. از حل دومین معادله از معادله‌های (۸.۲) برای F، داریم

$$F = \frac{F_y}{\sin\theta} = \frac{۱۵۰۰\ \text{lb}}{\sin ۶۵{,}۰°} = ۱۶۵۵\ \text{lb}$$

اگر مقدار F_y را موقع ورود به ماشین، به حافظه بسپاریم، آخرین محاسبه آسانتر می‌شود، زیرا می‌توان آن را فراخواند و بر $\sin\theta$ تقسیم کرد.

۸.۱ جمع نیروها از طریق جمع‌بستن مؤلفه‌های X و Y آنها

در بخش ۲.۲ دیدید که نیروها را باید طبق قانون متوازی‌الاضلاع با هم جمع کرد. از این قانون، دو روش عملی ساده‌تر دیگر برای حل ترسیمی مسئله‌ها، در بخشهای ۴.۲



شکل ۲۵.۲

و ۵.۲ به‌دست آمد: یکی قاعدهٔ مثلث برای جمع دو نیرو و دیگری قاعدهٔ چندضلعی برای جمع سه یا چند نیرو. همچنین دیدید که مثلث نیروها را می‌شود برای حل مثلثاتی هم به کار گرفت.

وقتی بخواهیم سه یا چند نیرو را با هم جمع کنیم، از چندضلعی نیرو که برایند نیروها را تعیین می‌کند، نمی‌شود یک راه‌حل عملی مثلثاتی به‌دست آورد. در این‌مورد، جواب تحلیلی مسئله را می‌توانیم با تجزیهٔ هریک از نیروها به دو مؤلفهٔ قائم پیدا کنیم. برای مثال سه نیروی $\mathbf{P}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{S}$ را که به ذرهٔ A [شکل ۲۵.۲(الف)] اثر می‌کنند در نظر بگیرید. برایند آنها ($\mathbf{R}$) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \qquad (۱۱.۲)$$

هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم آنها تجزیه می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} &= P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y \qquad (۱۲.۲)$$

یا، به اختصار،

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad (۱۳.۲)$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌های اسکالر (R_x و R_y) برایند ($\mathbf{R}$) چند نیروی وارد بر یک ذره از جمع جبری مؤلفه‌های اسکالر متناظر آن نیروها به‌دست می‌آیند.[1]

در عمل، تعیین برایند $\mathbf{R}$، مطابق شکل ۲۵.۲ در سه مرحله انجام می‌شود. ابتدا، نیروهای نشان داده شده در شکل ۲۵.۲ (الف) را به مؤلفه‌های x و y آنها تجزیه

---

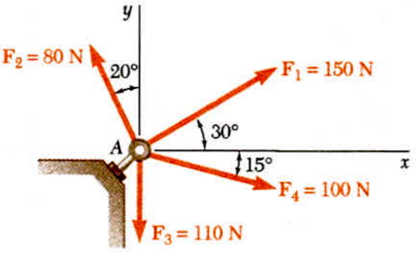
۱. فرض می‌شود که ماشین‌حساب مورد استفاده کلیدهایی برای محاسبهٔ توابع مثلثاتی و توابع معکوس مثلثاتی دارد. بعضی از ماشین‌حسابها کلیدهایی برای تبدیل مستقیم مختصات قائم به مختصات قطبی و بالعکس هم دارند. با استفاده از چنین ماشین‌حسابهایی، نیازی به محاسبهٔ توابع مثلثاتی در مثالهای ۱، ۲، و ۳ و در مسئله‌های نظیر آنها نیست.

۱. واضح است که این نتیجه را می‌شود برای جمع سایر کمیتهای برداری مثل سرعت، شتاب یا اندازه حرکت هم به کار برد.

می‌کنیم [شکل ۲۵.۲ (ب)]. بعد با جمع کردن این مؤلفه‌ها، مؤلفه‌های x و y برایند ($\mathbf{R}$) را به‌دست می‌آوریم [شکل ۲۵.۲ (ج)]. سرانجام، برایند $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$ را با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع پیدا می‌کنیم [شکل ۲۵.۲ (د)]. اگر این محاسبه‌ها را در یک جدول ثبت و مرتب کنیم، مراحل بالا را می‌شود با بازده بیشتری انجام داد. اگرچه این تنها روش تحلیلی عملی برای جمع سه یا چند نیروست، اما اغلب در مورد جمع دو نیرو هم استفاده از آن، به کاربرد روش حل مثلثاتی ترجیح داده می‌شود.

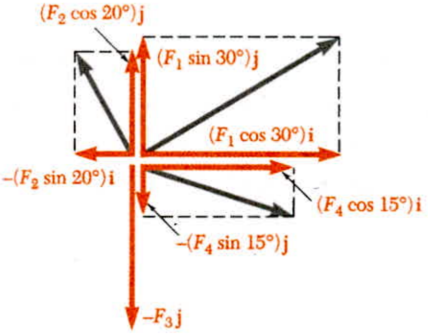
مسئلهٔ نمونه ۳.۲

چهار نیرو مطابق شکل به پیچ A وارد می‌شوند. برایند نیروهای وارد بر پیچ را پیدا کنید.



حل:

مؤلفه‌های x و y هریک از نیروها را به روش مثلثاتی مطابق شکل تعیین و آنها را در



جدول وارد می‌کنیم. طبق قرارداد پذیرفته شده در بخش ۷.۲، عدد اسکالر نمایانگر یک مؤلفهٔ نیروی مثبت است، به شرطی که هم‌جهت با جهت مثبت محور مربوط باشد. بنابراین مؤلفه‌های x به‌طرف راست، و مؤلفه‌های y به‌طرف بالا را با اعداد مثبت نشان داده‌ایم.

نیرو	بزرگی، N	مؤلفهٔ x، N	مؤلفه y، N
$\mathbf{F}_۱$	۱۵۰	+۱۲۹٫۹	+۷۵٫۰
$\mathbf{F}_۲$	۸۰	−۲۷٫۴	+۷۵٫۲
$\mathbf{F}_۳$	۱۱۰	۰	−۱۱۰٫۰
$\mathbf{F}_۴$	۱۰۰	+۹۶٫۶	−۲۵٫۹
		$R_x = +۱۹۹٫۱$	$R_y = +۱۴٫۳$

بنابراین، برایند این چهار نیرو ($\mathbf{R}$) برابر است با

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (۱۹۹٫۱\ \text{N})\mathbf{i} + (۱۴٫۳\ \text{N})\mathbf{j}$$

بزرگی و راستای برایند را می‌توانیم از مثلثی مطابق شکل تعیین کنیم، داریم

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{۱۴٫۳\ \text{N}}{۱۹۹٫۱\ \text{N}} \qquad \alpha = ۴٫۱°$$

$$R = \frac{۱۴٫۳\ \text{N}}{\sin\alpha} = ۱۹۹٫۶\ \text{N} \qquad \mathbf{R} = ۱۹۹٫۶\ \text{N} \measuredangle ۴٫۱°$$

با ماشین‌حساب، می‌توان محاسبه آخری را ساده‌تر کرد، به‌شرطی که مقدار R_y را پس از ورود به ماشین به حافظه بدهیم؛ در این صورت می‌شود آن را فراخواند و بر $\sin\alpha$ تقسیم کرد.

چگونه مسئله حل کنیم

در درس گذشته دیدید که برایند دو نیرو را می‌شود به طریق ترسیمی یا از روی روابط مثلثاتی یک مثلث ناقائمه تعیین کرد.

(الف) اگر سه نیرو یا بیشتر در کار باشد، بهترین راه تعیین برایند ($\mathbf{R}$) آنها این است که اول هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه کنیم. بسته به چگونگی تعریف نیروها، با دو حالت ممکن است مواجه شویم.

حالت ۱. بزرگی نیروی $\mathbf{F}$ (یعنی F) و زاویه‌ای که $\mathbf{F}$ با محور xها تشکیل می‌دهد (یعنی α) معلوم است. در این مورد مؤلفه‌های x و y این نیرو را می‌توان به‌ترتیب از ضرب F در $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ به‌دست آورد [مثال ۱].

حالت ۲. بزرگی نیروی $\mathbf{F}$ و مختصات دو نقطهٔ A و B واقع بر روی خط اثر آن معلوم است (شکل ۲۳.۲). اول زاویهٔ α را که $\mathbf{F}$ با محور xها تشکیل می‌دهد به طریق مثلثاتی تعیین کنید و بعد مؤلفه این نیرو را به‌دست آورید. البته مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ را می‌شود مستقیماً بدون تعیین α و از روی نسبتهای اندازه‌ها هم به‌دست آورد [مثال ۲].

(ب) مؤلفه‌های قائم برایند. مؤلفه‌های R_x و R_y برایند را می‌شود با جمع جبری مؤلفه‌های متناظر نیروها به‌دست آورد [مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۲].

می‌توانید برایند را با استفاده از بردارهای یکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ که به‌ترتیب در امتداد محورهای x و y هستند به‌صورت برداری بنویسید:

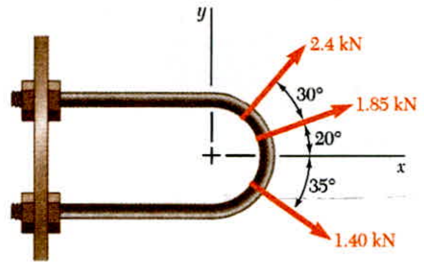
$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

یا می‌توانید مثلث قائم‌الزاویهٔ به اضلاع R_x و R_y را درنظر بگیرید و با حل آن بزرگی $\mathbf{R}$ و زاویه‌ای را که برایند با محور xها تشکیل می‌دهد پیدا کنید.

در مثالهای مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۲ این درس، محورهای x و y به‌ترتیب افقی و عمودی‌اند. اما در بعضی از مسائل بهتر است که آنها را با یک یا چند نیروی وارد شده درنظر بگیریم.

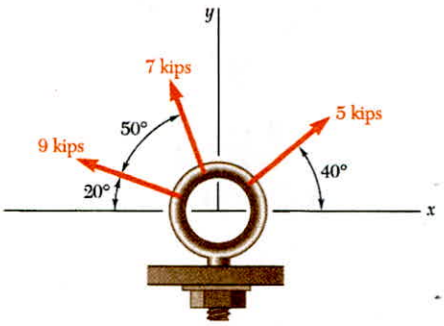
مسئله‌ها

۲۱.۲ مؤلفه‌های x و y هریک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.



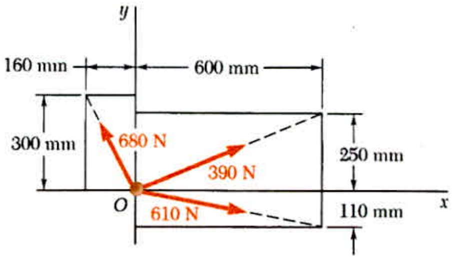
شکل م ۲۱.۲

۲۲.۲ مؤلفه‌های x و y هریک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.

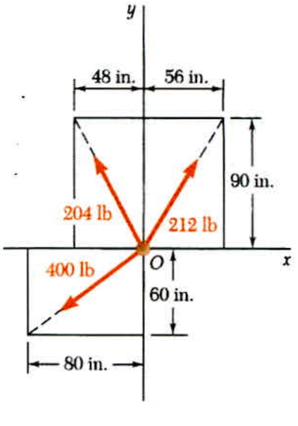


شکل م ۲۲.۲

۲۳.۲ و ۲۴.۲ مؤلفه‌های x و y هریک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.

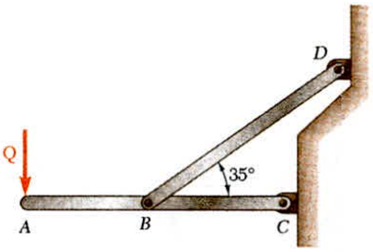


شکل م ۲۳.۲



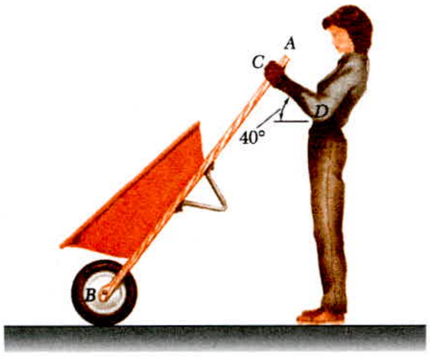
شکل م ۲۴.۲

۲۵.۲ عضو BD نیروی **P** را در امتداد خط BD بر عضو ABC وارد می‌کند. می‌دانیم **P** دارای مؤلفهٔ عمودی ۹۶۰ N است. معین کنید (الف) بزرگی نیروی **P** را، (ب) مؤلفه افقی آن را.



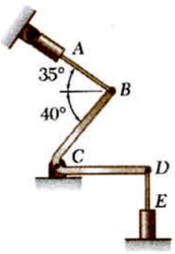
شکل م ۲۵.۲

۲۶.۲ باغبانی بر هر دسته AB چرخ‌دستی خالی نیروی **P** در راستایی در امتداد خط CD وارد می‌کند. می‌دانیم که **P** باید یک مؤلفهٔ افقی ۳۰ lb داشته باشد، معین کنید (الف) بزرگی نیروی **P**، (ب) مؤلفهٔ قائم آن را.



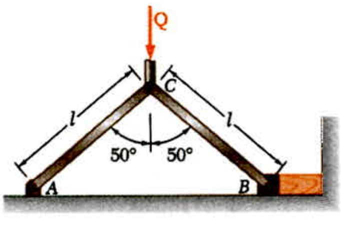
شکل م ۲۶.۲

۲۷.۲ میلهٔ فعالساز AB بر روی لنگ BCD نیروی **P** را در امتداد خط AB وارد می‌کند. می‌دانیم که **P** باید دارای یک مؤلفهٔ عمودی ۲۵ lb بر بازوی BC لنگ باشد. مطلوب است (الف) مقدار نیروی **P**، (ب) مؤلفهٔ در امتداد خط BC.



شکل م ۲۷.۲

۲۸.۲ عضو CB گیره نشان داده شده نیروی **P** را در امتداد خط CB بر قطعهٔ B وارد می‌کند. می‌دانیم که **P** باید دارای مؤلفهٔ افقی ۲۶۰ lb باشد. معین کنید، (الف) بزرگی نیروی **P**، (ب) مؤلفهٔ قائم آن را.



شکل م ۲۸.۲

۲۹.۲ دیرکی مطابق شکل برای باز کردن پنجره به‌کار می‌رود. می‌دانیم که دیرک نیروی P را که بزرگی مؤلفهٔ قائم آن برابر ۴۵ N و در امتداد دیرک است بر پنجره وارد می‌کند. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی P، (ب) بزرگی مؤلفه افقی.

شکل م ۲۹.۲ و م ۳۰.۲

۳۰.۲ دیرکی مطابق شکل برای باز کردن پنجره به‌کار می‌رود. می‌دانیم که دیرک نیروی P را که بزرگی مؤلفهٔ افقی آن برابر ۱۸ N و در امتداد دیرک است بر پنجره وارد می‌کند. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی P، (ب) بزرگی مؤلفه قائم.

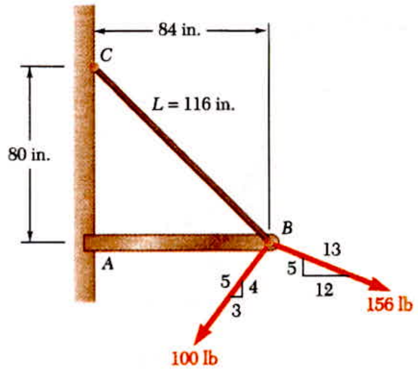
۳۱.۲ برایند سه نیروی وارد در مسئلهٔ ۲۱.۲ را تعیین کنید.

۳۲.۲ برایند سه نیروی مسئلهٔ ۲۲.۲ را تعیین کنید.

۳۳.۲ برایند سه نیروی مسئلهٔ ۲۴.۲ را تعیین کنید.

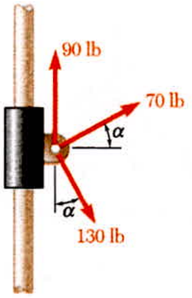
۳۴.۲ برایند سه نیروی مسئلهٔ ۲۳.۲ را تعیین کنید.

۳۵.۲ می‌دانیم که کشش در کابل BC برابر ۱۴۵ lb است، برایند سه نیروی وارد بر نقطهٔ B از تیر AB را به‌دست آورید.



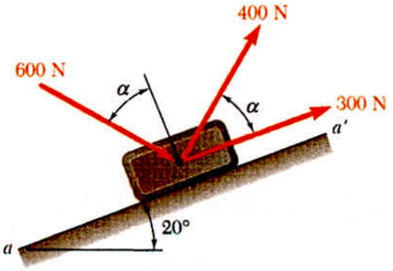
شکل م ۳۵.۲

۳۶.۲ طوقه‌ای می‌تواند حول میلهٔ قائم که مطابق شکل تحت تأثیر سه نیروست، بلغزد. مطلوب است (الف) مقدار زاویه α در حالتی که برایند سه نیرو به‌صورت افقی است، (ب) بزرگی متناظر برایند.



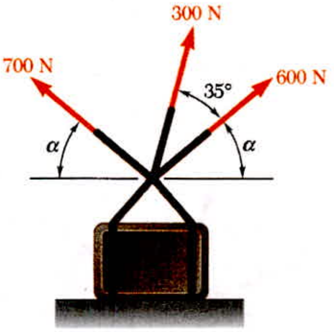
شکل م ۳۶.۲

۳۷.۲ می‌دانیم که $\alpha = ۶۵^\circ$ است. مطلوب است برایند سه نیروی نشان داده شده.



شکل م ۳۷.۲

۳۸.۲ می‌دانیم که $\alpha = ۵۰^\circ$، برایند سه نیروی نشان داده را تعیین کنید.



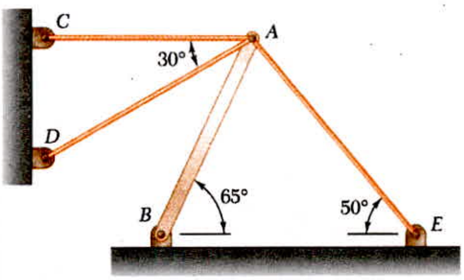
شکل م ۳۸.۲

۳۹.۲ برای تیر مسئلهٔ ۳۵.۲، (الف) اگر برایند سه نیروی وارد بر نقطهٔ B عمود باشد، کشش لازم در کابل BC را تعیین کنید، (ب) مقدار متناظر برایند را به‌دست آورید.

۴۰.۲ برای تیر مسئله ۳۸.۲، (الف) اگر برایند به‌صورت قائم باشد، مقدار لازم α را به‌دست آورید.

۴۱.۲ برای قطعهٔ مسئلهٔ ۳۷.۲، (الف) اگر برایند سه نیرو مطابق شکل که موازی شیب باشد. مقدار α مورد نیاز را به‌دست آورید. (ب) مقدار متناظر برایند را به‌دست آورید.

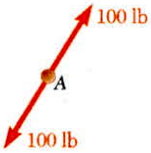
۴۲.۲ آن‌گونه که در شکل می‌بینید بازوی AB با سه کابل نگهداری می‌شود. اگر کشش در کابلهای AC و AD به‌ترتیب ۹۰۰ lb و ۱۲۰۰ lb باشد، (الف) اگر برایند کشش وارد در نقطهٔ A بازو در امتداد AB باشد، کشش کابل AE را به‌دست آورید. (ب) مقدار متناظر برایند را تعیین کنید.



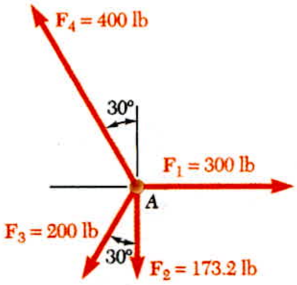
شکل م ۴۲.۲

۹.۲ تعادل یک ذره

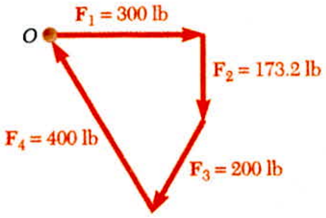
در بخشهای گذشته از روشهای تعیین برایند چند نیروی وارد بر یک ذره صحبت کردیم با آنکه تاکنون در هیچ یک از مسئله‌های مورد نظرمان برایند نیروها صفر نشده است اما احتمال وقوع چنین حالتی کاملاً وجود دارد. در این مورد، که تأثیر خالص نیروها صفر است، می‌گویند که ذره در حال تعادل است. پس می‌شود گفت: وقتی برایند تمام نیروهای وارد بر ذره‌ای صفر باشد، ذره در حال تعادل است.



شکل ۲۶.۲



شکل ۲۷.۲



شکل ۲۸.۲

ذره‌ای که به آن دو نیرو وارد می‌شود به شرطی در تعادل خواهد بود که بزرگی و خط اثر نیروها یکی باشد و جهتشان مخالف هم باشد. در این صورت برایند این دو یرو صفر خواهد بود. این مورد را در شکل ۲۶.۲ نشان داده‌ایم.

مورد دیگری از تعادل یک ذره در شکل ۲۷.۲ نشان داده شده است که در آن چهار یرو به ذرهٔ A وارد شده‌اند. در شکل ۲۸.۲، برایند این چهار نیرو با استفاده از قاعدهٔ چندضلعی تعیین شده است. اگر از نقطهٔ O با نیروی $\mathbf{F}_1$ شروع کنیم و نیروها را یکی س از دیگری مطابق شکل رسم کنیم می‌بینیم که سر $\mathbf{F}_4$ به نقطهٔ O منطبق می‌شود. نابراین برایند ($\mathbf{R}$) سیستم نیروهای شکل ۲۸.۲ صفر، و ذره در حال تعادل است.

چندضلعی بستهٔ شکل ۲۸.۲ درواقع بیان ترسیمی تعادل ذرهٔ A است. بیان جبری سرایط تعادل یک ذره را می‌شود به این صورت نوشت

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = ۰ \qquad (۱۴.۲)$$

تجزیهٔ هریک از نیروها به مؤلفه‌های قائم، خواهیم داشت

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}) = ۰ \quad \text{یا} \quad (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} = ۰$$

تیجه می‌گیریم که شرایط لازم و کافی برای تعادل یک ذره این است که معادله‌های

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \qquad (۱۵.۲)$$

برقرار باشند. حالا دوباره ذرهٔ شکل ۲۷.۲ را در نظر می‌گیریم و صادق بودن شرایط تعادل را در مورد آن امتحان می‌کنیم. می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= ۳۰۰\ \text{lb} - (۲۰۰\ \text{lb}) \sin ۳۰^\circ - (۴۰۰\ \text{lb}) \sin ۳۰^\circ \\
&= ۳۰۰\ \text{lb} - ۱۰۰\ \text{lb} - ۲۰۰\ \text{lb} = ۰ \\
\Sigma F_y &= -۱۷۳{,}۲\ \text{lb} - (۲۰۰\ \text{lb}) \cos ۳۰^\circ + (۴۰۰\ \text{lb}) \cos ۳۰^\circ \\
&= -۱۷۳{,}۲\ \text{lb} - ۱۷۳{,}۲\ \text{lb} + ۳۴۶{,}۴\ \text{lb} = ۰
\end{aligned}$$

۱۰.۲ قانون اول نیوتون درباره حرکت

در اواخر قرن هفدهم سر ایزاک نیوتون سه قانون بنیادی را فرمولبندی کرد، که علم مکانیک مبتنی بر آنهاست. اولین قانون را می‌شود چنین بیان کرد:

اگر نیروی برایند وارد بر یک ذره صفر باشد، ذره در حال سکون باقی خواهد ماند (به‌شرطی که قبلاً ساکن بوده باشد) یا با سرعت ثابت در امتداد یک خط راست حرکت خواهد کرد (به‌شرطی که از اول در حال حرکت بوده باشد).

از این قانون و از تعریفی که از تعادل در بخش ۹.۲ کردیم، معلوم می‌شود که یک ذرهٔ در حال تعادل یا ساکن است و یا دارد با سرعت ثابت در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. در بخش آینده مسئله‌های مختلفی را که به تعادل یک ذره مربوط می‌شوند بررسی خواهیم کرد.

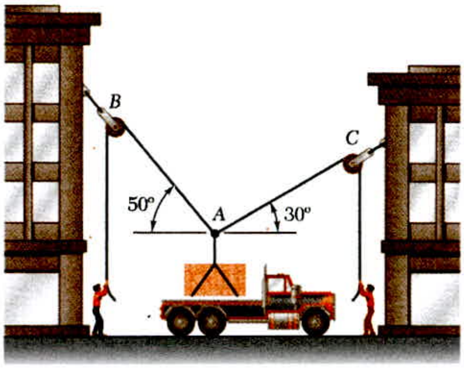
۱۱.۲ مسئله‌های مربوط به تعادل یک ذره. نمودارهای جسم آزاد

عملاً هر مسئله در مکانیک مهندسی از یک وضعیت فیزیکی واقعی اقتباس می‌شود. طرح ساده‌ای که شرایط فیزیکی مسئله را نشان می‌دهد به نمودار فضایی معروف است.

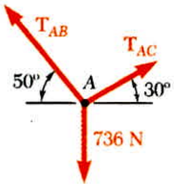
روشهای تحلیلی‌ای را که در بخشهای گذشته مورد بحث قرار دادیم فقط برای سیستم نیروهایی می‌شود به کار برد که نقطهٔ اثرشان ذره باشد. با این حال بسیاری از مسئله‌های مربوط به سازه‌های واقعی را می‌شود به مسئله‌هایی تبدیل کرد که شامل تعادل یک ذره باشند. این کار با انتخاب یک ذره و ترسیم نمودار جداگانه‌ای انجام می‌شود که این ذره و تمام نیروهای وارد بر آن را نشان بدهد. به چنین نموداری نمودار جسم آزاد می‌گویند.

به‌عنوان مثال، صندوق ۷۵ کیلوگرمی نمایش داده شده در نمودار فضایی شکل ۲۹.۲ (الف) را در نظر بگیرید. این صندوق بین دو ساختمان واقع بوده و حالا در حال بارگیری بر روی یک کامیون است. صندوق توسط یک کابل عمودی نگه داشته شده که به نقطهٔ اتصال دو طناب متصل است. طنابها از روی دو قرقرهٔ B و C که متصل به ساختمانها هستند عبور کرده‌اند. می‌خواهیم کشش در هریک از طنابهای AB و AC را پیدا کنیم.

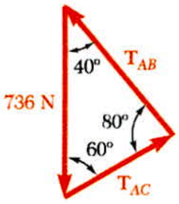
برای حل این مسئله، باید یک نمودار جسم آزاد بکشیم که ذره‌ای را در حال تعادل نشان بدهد. چون می‌خواهیم کشش طنابها را پیدا کنیم نمودار جسم آزاد باید حداقل



(الف) نمودار فضایی

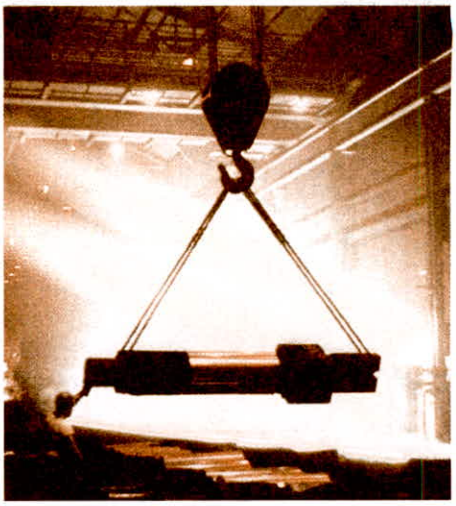


(ب) نمودار جسم آزاد



(ج) مثلث نیرو

شکل ۲۹.۲



عکس ۲.۲ چنانکه در شکل نشان داده شده، با درنظرگرفتن قلاب به‌عنوان یک ذره و بااستفاده از معادله‌های تعادل نیروهای وارد بر قلاب، می‌توان کشش در کابلهای نگهدارنده میل‌ـگردان را تعیین کرد.

یکی از این کششها و در صورت امکان هر دو را شامل بشود. به نظر می‌رسد که نقطهٔ A جسم آزاد خوبی برای این مسئله باشد. نمودار جسم آزاد نقطهٔ A را در شکل ۲۹.۲ (ب) می‌بینید. در این شکل نقطه A، و نیروهایی که کابل عمودی و دو طناب بر آن وارد می‌کنند، دیده می‌شود. نیروی وارد از کابل رو به پایین و برابر با وزن صندوق (W) است. بااستفاده از معادلهٔ (۱.۴)، می‌نویسیم

$$W = mg = (۷۵\,\text{kg})(۹٫۸۱\,\text{m/s}^۲) = ۷۳۶\,\text{N}$$

و این مقدار را در نمودار جسم آزاد نشان می‌دهیم. نیروهایی که طنابها وارد می‌کنند معلوم نیستند. از آنجا که بزرگی این نیروها به‌ترتیب برابر با کشش طنابهای AB و AC است، آنها را با $\mathbf{T}_{AB}$ و $\mathbf{T}_{AC}$ نشان می‌دهیم و از نقطهٔ A در همان جهتی رسم می‌کنیم که در نمودار فضایی نشان داده شده است. به نمودار جسم آزاد چیزی غیر از اینها اضافه نمی‌کنیم.

چون نقطهٔ A در حال تعادل است، سه نیروی وارد بر آن، در صورت ترسیم به شیوهٔ سر به دم باید یک مثلث بسته را تشکیل بدهند. این مثلث نیرو را در شکل ۲۹.۲ (ج) رسم کرده‌ایم. اگر مثلث به مقیاس درست رسم شده باشد، مقادیر T_{AB} و T_{AC} (کشش طنابها) را می‌شود به طریق ترسیمی به‌دست آورد، در غیر این صورت می‌توانیم از روش مثلثاتی استفاده کنیم. اگر این روش را برای حل مسئله انتخاب کنیم، با استفاده از قانون سینوسها می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{T_{AB}}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin ۴۰^\circ} = \frac{۷۳۶\,\text{N}}{\sin ۸۰^\circ}$$

$$T_{AB} = ۶۴۷\,\text{N} \qquad T_{AC} = ۴۸۰\,\text{N}$$

وقتی ذره‌ای تحت تأثیر سه نیرو در حال تعادل باشد، مسئله را می‌شود با رسم مثلث نیروها حل کرد، ولی وقتی ذره‌ای تحت تأثیر بیش از سه نیرو در حال تعادل است، مسئله را باید از راه رسم چندضلعی نیروها حل کرد. اگر حل تحلیلی مورد نظر باشد باید معادله‌های تعادل (بخش ۹.۲) را حل کرد:

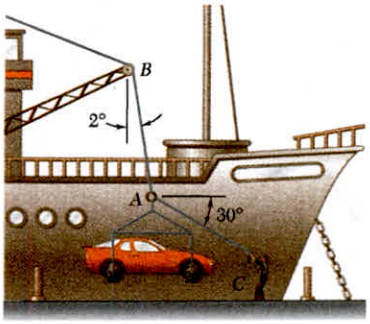
$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \qquad (۱۵.۲)$$

این معادله‌ها را فقط با دو مجهول می‌شود حل کرد. برای مثلث نیروها در مورد تعادل ذره تحت تأثیر سه نیرو هم همین‌طور است.

انواع متداولتر مسئله‌ها عبارت‌اند از مسئله‌هایی که در آنها دو مجهول نمایندهٔ (۱) دو مؤلفهٔ (یا بزرگی و راستای) یک تک‌نیرو، یا (۲) بزرگی دو نیرو با راستاهای معلوم هستند. در بعضی مسئله‌ها هم می‌خواهیم حداکثر یا حداقل بزرگی یک نیرو را پیدا کنیم (نگاه کنید به مسئله‌های ۵۹.۲ تا ۶۳.۲).

مسئلهٔ نمونه ۴.۲

در عملیات تخلیهٔ کشتی، اتومبیلی به وزن ۳۵۰۰ lb به وسیلهٔ یک کابل حمل می‌شود. طنابی را در نقطهٔ A به کابل بسته‌اند و آن را طوری می‌کشند که اتومبیل در جای مناسب قرار بگیرد. زاویهٔ بین کابل و امتداد قائم ۲°، و زاویهٔ بین طناب و خط افقی ۳۰° است. کشش در طناب چقدر است؟



حل:

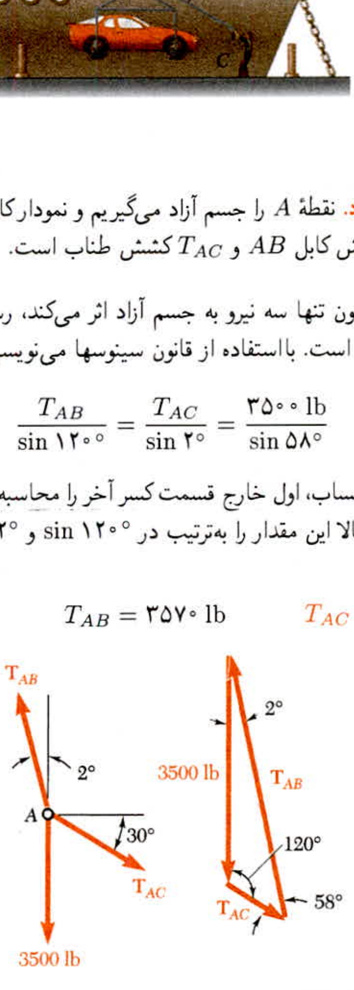
نمودار جسم آزاد. نقطهٔ A را جسم آزاد می‌گیریم و نمودار کامل جسم آزاد را رسم می‌کنیم. T_{AB} کشش کابل AB و T_{AC} کشش طناب است.

شرط تعادل. چون تنها سه نیرو به جسم آزاد اثر می‌کند، رسم مثلث نیروها برای بیان تعادل آن کافی است. بااستفاده از قانون سینوسها می‌نویسیم

$$\frac{T_{AB}}{\sin ۱۲۰^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin ۲^\circ} = \frac{۳۵۰۰\,\text{lb}}{\sin ۵۸^\circ}$$

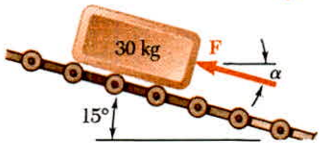
با یک ماشین حساب، اول خارج قسمت کسر آخر را محاسبه می‌کنیم و نتیجه را حافظه می‌دهیم. حالا این مقدار را به‌ترتیب در $\sin ۱۲۰^\circ$ و $\sin ۲^\circ$ ضرب می‌کنیم که نتیجه می‌شود

$$T_{AB} = ۳۵۷۰\,\text{lb} \qquad T_{AC} = ۱۴۴\,\text{lb}\ \blacktriangleleft$$



مسئلهٔ نمونه ۵.۲

بزرگی و راستای کوچکترین نیروی $\mathbf{F}$ را که می‌تواند بسته‌ای مطابق شکل را در حال تعادل نگه دارد تعیین کنید. توجه کنید نیرویی که غلتکها به بسته وارد می‌کنند بر سطح شیب‌دار عمود است.



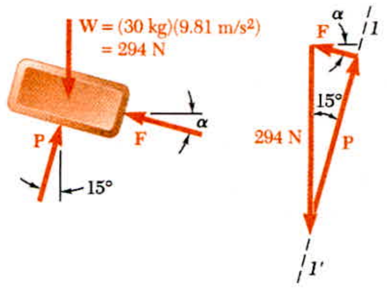
حل:

نمودار جسم آزاد. بسته را جسم آزاد می‌گیریم و فرض می‌کنیم که می‌شود آن را یک ذره در نظر گرفت. نمودار جسم آزاد آن را رسم می‌کنیم.

شرط تعادل. چون تنها سه نیرو بر جسم آزاد اثر می‌کند، برای بیان تعادل آن مثلث نیروها را رسم می‌کنیم. خط ′۱-۱ نشان‌دهندهٔ راستای معلوم نیروی **P** است. برای به‌دست‌آوردن حداقل مقدار نیروی **F**، راستای **F** را عمود بر **P** اختیار می‌کنیم. از خواص هندسی مثلث حاصل، نتیجه می‌گیریم که

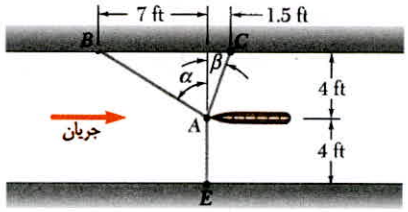
$$F = (۲۹۴\ \text{N}) \sin ۱۵° = ۷۶/۱\ \text{N} \qquad \alpha = ۱۵°$$

◀ $\mathbf{F} = ۷۶/۱\ \text{N} ⦣ ۱۵°$



مسئلهٔ نمونه ۶.۲

به‌عنوان بخشی از طراحی یک قایق بادبانی جدید، می‌خواهیم نیروی واپس‌کشی وارد بر آن را به‌ازای یک سرعت معین تعیین کنیم. برای این کار مدل پیشنهاد شده‌ای از بدنهٔ قایق را در مجرای آزمون قرار می‌دهیم و سینهٔ آن را توسط سه کابل در امتداد خط مرکزی مجرا نگه می‌داریم. دینامومتر نشان می‌دهد که به‌ازای یک سرعت معین، کشش در کابل AB برابر ۴۰ lb و در کابل AE برابر ۶۰ lb است. نیروی واپس‌کشی وارد بر بدنهٔ قایق و کشش در کابل AC را تعیین کنید.

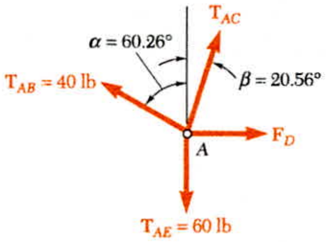


حل:

تعیین زاویه‌ها. ابتدا زاویه‌های α و β را که امتداد کابلهای AB و AC را مشخص می‌کنند تعیین می‌کنیم. می‌نویسیم

$$\tan\alpha = \frac{۷\ \text{ft}}{۴\ \text{ft}} = ۱/۷۵ \qquad \tan\beta = \frac{۱/۵\ \text{ft}}{۴\ \text{ft}} = ۰/۳۷۵$$

$$\alpha = ۶۰/۲۶° \qquad \beta = ۲۰/۵۶°$$



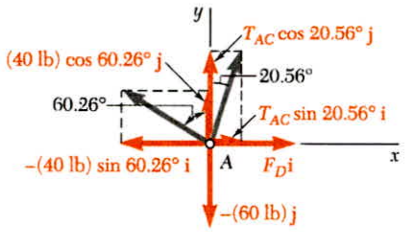
نمودار جسم آزاد. بدنهٔ قایق را به منزلهٔ جسم آزاد می‌گیریم و نمودار آن را مطابق شکل رسم می‌کنیم. این نمودار نیروهای هر سه‌کابل وارد بر روی بدنهٔ قایق، و همچنین نیروی واپس‌کشی $\mathbf{F}_D$، ناشی از جریان آب، را شامل می‌شود.

شرط تعادل. می‌گوییم بدنهٔ قایق در حال تعادل است و برایند نیروهای وارد بر آن صفر است

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = ۰ \qquad (۱)$$

چون با بیش از سه نیرو سروکار داریم، آنها را به مؤلفه‌های x و y تجزیه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= -(۴۰\ \text{lb})\sin ۶۰/۲۶°\mathbf{i} + (۴۰\ \text{lb})\cos ۶۰/۲۶°\mathbf{j}\\
&= -(۳۴/۷۳\ \text{lb})\mathbf{i} + (۱۹/۸۴\ \text{lb})\mathbf{j}\\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC}\sin ۲۰/۵۶°\mathbf{i} + T_{AC}\cos ۲۰/۵۶°\mathbf{j}\\
&= ۰/۳۵۱۲T_{AC}\mathbf{i} + ۰/۹۳۶۳T_{AC}\mathbf{j}\\
\mathbf{T}_{AE} &= -(۶۰\ \text{lb})\mathbf{j}\\
\mathbf{F}_D &= F_D\mathbf{i}
\end{aligned}$$



این عبارتها را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم و از بردارهای **i** و **j** فاکتور می‌گیریم، که نتیجه می‌شود

$$(-۳۴/۷۳\ \text{lb} + ۰/۳۵۱۲T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (۱۹/۸۴\ \text{lb} + ۰/۹۳۶۳T_{AC} - ۶۰\ \text{lb})\mathbf{j} = ۰$$

این معادله فقط در صورتی برقرار است که ضریبهای **i** و **j** برابر با صفر باشند. بنابراین دو معادلهٔ تعادل زیر به‌دست می‌آید، که به‌ترتیب بیان می‌کنند که مجموع مؤلفه‌های x و مجموع مؤلفه‌های y باید صفر باشند.

$$\Sigma F_x = ۰: \qquad -۳۴/۷۳\ \text{lb} + ۰/۳۵۱۲T_{AC} + F_D = ۰ \qquad (۲)$$

$$\Sigma F_y = ۰: \qquad ۱۹/۸۴\ \text{lb} + ۰/۹۳۶۳T_{AC} - ۶۰\ \text{lb} = ۰ \qquad (۳)$$

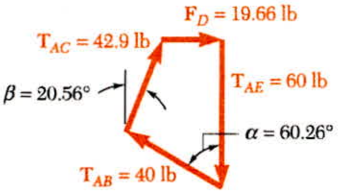
از معادلهٔ (۳) به‌دست می‌آوریم

◀ $T_{AC} = +۴۲/۹\ \text{lb}$

و با قراردادن این مقدار در معادلهٔ (۲)

◀ $F_D = +۱۹/۶۶\ \text{lb}$

موقع رسم نمودار جسم آزاد، یک جهت فرضی برای هر یک از نیروهای مجهول اختیار کردیم. علامت مثبت در جواب نشان می‌دهد که جهت فرض شده درست است. صحت جوابها را می‌توانیم با رسم چند ضلعی کامل نیروها امتحان کنیم.



چگونه مسئله حل کنیم

وقتی ذره‌ای در حال تعادل است، برایند نیروهای وارد بر ذره باید صفر باشد. اگر این واقعیت را در مورد ذرهٔ تحت تأثیر نیروهای هم‌صفحه بیان کنیم، دو رابطه میان این نیروها به‌دست می‌آید. همان‌طور که در مسئله‌های نمونه دیدید، این روابط را می‌شود برای تعیین دو مجهول به‌کار برد ــ که می‌تواند بزرگی و راستای یک نیرو یا بزرگی دو نیرو باشد.

وقتی می‌خواهید یک مسئلهٔ ذرهٔ در حال تعادل را حل کنید اول از همه نمودار جسم آزاد را بکشید. این نمودار ذره و کلیه نیروهای وارد بر آن را نشان می‌دهد. در نمودار جسم آزاد مقادیر نیروهای معلوم و همچنین زوایا یا ابعادی را که مشخصهٔ راستای یک نیرو هستند نشان بدهید. برای بزرگی نیروهای مجهول یا زاویه‌ای که مقدارش معلوم نیست یک نماد مناسب اختیار کنید. غیر از اینها چیزی وارد نمودار جسم آزاد نکنید.

رسم یک نمودار واضح و صحیح لازمهٔ حل هر مسئلهٔ تعادل است. چشم‌پوشی از رسم نمودار جسم آزاد اگرچه ممکن است موجب صرفه‌جویی در قلم و کاغذ شود، ولی می‌تواند به پاسخ غلط بینجامد.

حالت ۱. اگر در نمودار جسم آزاد فقط سه تا نیرو در کار باشد بهترین راه حل بقیهٔ مسئله این است که با رسم نیروها به شیوهٔ سر به دم مثلث نیروها را تشکیل بدهید. این مثلث را می‌توانید ــ در صورتی که حداکثر دو تا مجهول داشته باشد ــ به‌طریق ترسیمی یا مثلثاتی حل کنید [مسئله‌های نمونه ۴.۲ و ۵.۲].

حالت ۲. اگر بیشتر از سه نیرو دارید، به نفع‌تان است که از راه حل تحلیلی استفاده کنید. محورهای x و y را انتخاب کنید و هر یک از نیروهای نشان داده شده در نمودار جسم آزاد را به مؤلفه‌های x و y تجزیه کنید. وقتی رابطهٔ صفر بودن مجموع مؤلفه‌های x و مجموع مؤلفه‌های y همهٔ نیروها را بنویسید، دو معادله به‌دست می‌آورید که می‌توانید آنها را برای حداکثر دو مجهول حل کنید [مسئله نمونهٔ ۶.۲].

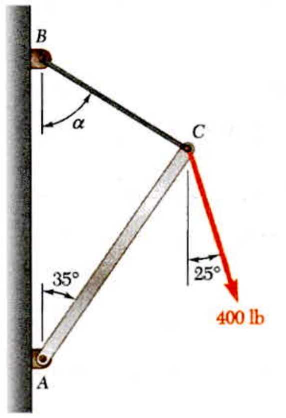
قویاً توصیه می‌کنیم که موقع استفاده از راه حل تحلیلی معادله‌های تعادل را به‌همان صورت معادله‌های (۲) و (۳) در مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۲ بنویسید. اینکه مثل بعضیها مجهولها را در طرف چپ و کمیتهای معلوم را در طرف راست معادله بگذارید ممکن است شما را در به‌کار بردن علامت مناسب برای هر جمله سردرگم کند.

دیدیم که روش مورد استفاده برای حل یک مسئله تعادل دوبعدی هرچه که باشد، حداکثر دوتا مجهول را می‌توانیم پیدا کنیم. اگر یک مسئلهٔ دوبعدی شامل بیش از دو مجهول باشد، باید از اطلاعات موجود در صورت مسئله یک یا چند رابطهٔ اضافی به‌دست آورد.

بعضی از مسئله‌ها همراه قرقره‌ای کوچک‌اند. فرض می‌کنیم قرقره‌ها بدون اصطکاک‌اند: بنابراین کشش در طناب یا کابل روی قرقره در هر طرف قرقره یکسان‌اند. برای اینکه بدانیم چرا کشش یکسان است، در فصل ۴ بحث خواهد شد. آن‌گونه که در فصل ۱۰ توضیح خواهیم داد، بزرگی نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر جسم توسط فنر کشیده شده یا فشرده‌شده از $F = kx$ به‌دست می‌آید. که در آن k ثابت فنر و x طول فنر در حالت کشیده یا فشرده شده است.

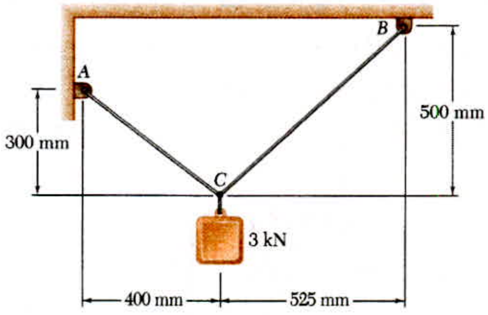
مسئله‌ها

۴۳.۲ می‌دانیم که $\alpha = ۵۰°$ و تیر AC بر پین C نیرویی در امتداد AC وارد می‌کند. مطلوب است: (الف) بزرگی نیرو، (ب) کشش در کابل BC.



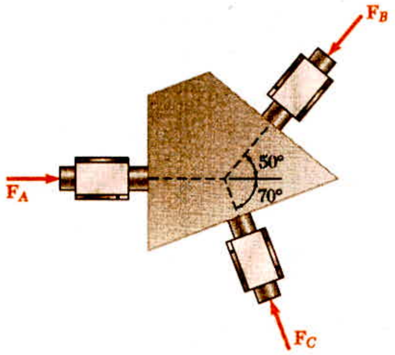
شکل م ۴۳.۲

۴۴.۲ دوکابل در نقطهٔ C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. مطلوب است کشش در: (الف) کابل AC، (ب) کابل BC.



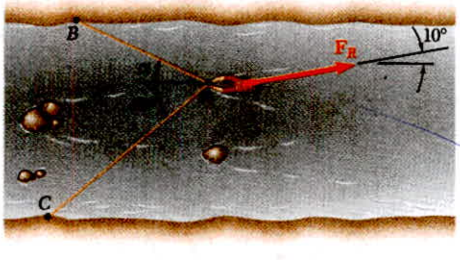
شکل م ۴۴.۲

۴۵.۲ یک قطعه نامنظم در وضعیت نشان داده شده توسط سه قید نگهداری می‌شود. می‌دانیم که $F_A = ۹۴۰$ N. مطلوب است بزرگی نیروهای F_B و F_C وارد شده توسط دو قید دیگر



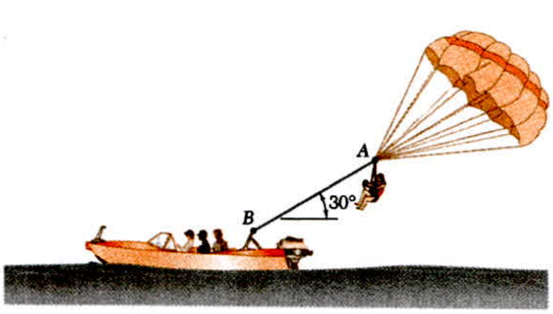
شکل م ۴۵.۲

۴۶.۲ طنابهای AB و AC برای قایقرانی که قایقش واژگون شده، پرتاب شده است. می‌دانیم که $\alpha = ۲۵°$ و بزرگی نیروی $\mathbf{F}_R$ وارد شده توسط رودخانه بر قایقران ۷۰ lb است. مطلوب است کشش (الف) در طناب AB، (ب) در طناب AC.



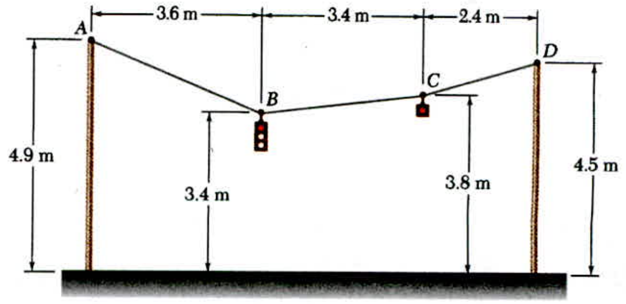
شکل م ۴۶.۲

۴۷.۲ قایقی یک چتر و یک چترباز را با سرعت ثابت می‌کشد. می‌دانیم که وزن چتر با ۵۵۰ N و برایند نیروی R وارد بر یوغ A با سطح افق زاویهٔ ۶۵° تشکیل می‌دهد. مطلوب است (الف) کشش طناب AB، (ب) بزرگی $\mathbf{R}$.



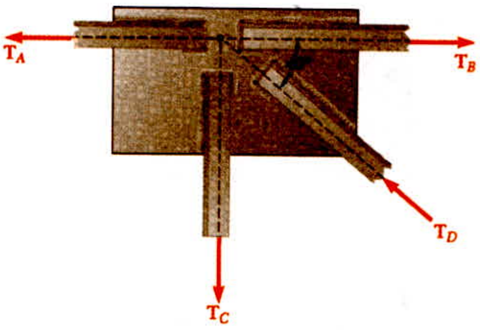
شکل م ۴۷.۲

۴۸.۲ دو علامت راهنمایی و رانندگی مطابق شکل موقتاً از کابلی آویزان شده‌اند. می‌دانیم که علامت در B برابر ۳۰۰ N است. مطلوب است وزن علامت در نقطهٔ C.



شکل م ۴۸.۲

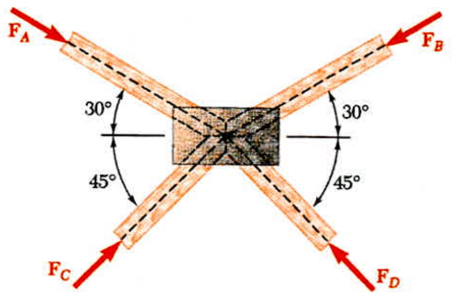
۴۹.۲ دو نیرو به بزرگی $T_A = ۸\,\text{kip}$ و $T_B = ۱۵\,\text{kip}$ مطابق شکل به قطعه‌ای جوش داده شده‌اند. می‌دانیم که اتصال در حالت تعادل است. مطلوب است بزرگی نیروهای T_C و T_D.



شکل م ۴۹.۲ و م ۵۰.۲

۵۰.۲ دو نیرو به بزرگی $T_A = ۶۷\,\text{kip}$ و $T_C = ۹\,\text{kip}$ مطابق شکل به قطعه‌ای جوش داده شده‌اند. می‌دانیم که اتصال در حالت تعادل است. مطلوب است بزرگی نیروهای T_B و T_D.

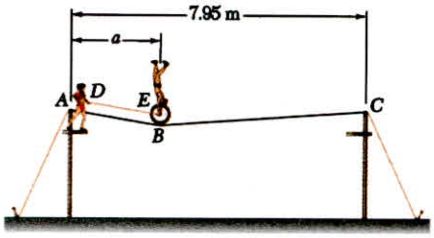
۵۱.۲ چهار عضو چوبی به صفحه‌ای فلزی متصل شده‌اند و مطابق شکل تحت تأثیر چهار نیرو در حالت تعادل قرار گرفته‌اند. می‌دانیم که $F_A = ۲٫۳\,\text{kN}$ و $F_B = ۲٫۱\,\text{kN}$. مطلوب است بزرگی دو نیروی دیگر.



شکل م ۵۱.۲ و م ۵۲.۲

۵۲.۲ چهار عضو چوبی به صفحه‌ای فلزی متصل شده‌اند و مطابق شکل تحت تأثیر چهار نیرو در حالت تعادل قرار گرفته‌اند. می‌دانیم که $F_A = ۱٫۹\,\text{kN}$ و $F_C = ۲٫۴\,\text{kN}$. مطلوب است بزرگی دو نیروی دیگر.

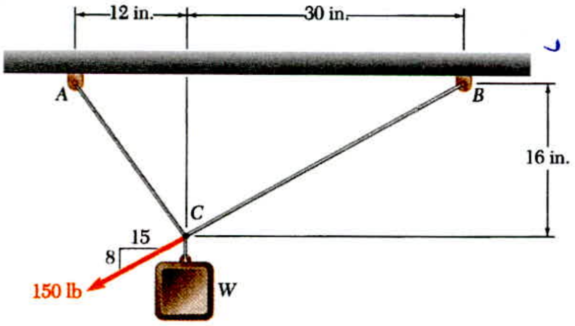
۵۳.۲ در یک عمل نمایشی سیرک یک بازیگر در حالی که دستهایش روی یک چرخ و پاهایش رو به هواست توسط شخص دیگری، با سیم ABC به‌طول ۸ m، مطابق شکل، کشیده می‌شود. می‌دانیم که کشش در طناب DE برابر ۳۵ N و در $a = ۲٫۵\,\text{m}$ در حالت تعادل است. مطلوب است (الف) وزن بازیگر، (ب) کشش سیم.



شکل م ۵۳.۲ و م ۵۴.۲

۵۴.۲ در یک عمل نمایشی سیرک یک بازیگر در حالی که دستهایش روی یک چرخ و پاهایش رو به هواست توسط شخص دیگری با سیم ABC به طول ۸ m، مطابق شکل، کشیده می‌شود. می‌دانیم که وزن بازیگر ۷۲۰ N و در $a = ۳\,\text{m}$ در تعادل است. مطلوب است (الف) کشش در سیم، (ب) کشش در طناب.

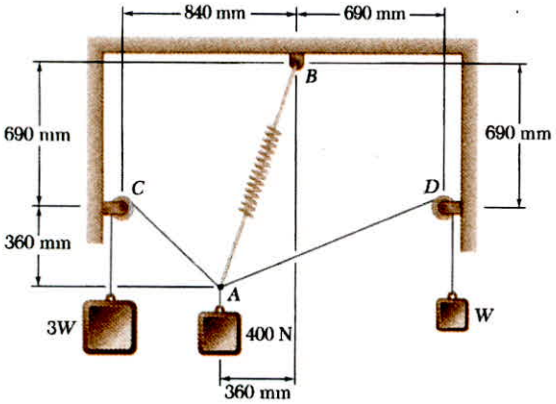
۵۵.۲ دو کابل در نقطهٔ C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. می‌دانیم که $W = ۱۹۰\,\text{lb}$. مطلوب است کشش (الف) در کابل AC، (ب) در کابل BC.



شکل م ۵۵.۲ و م ۵۶.۲

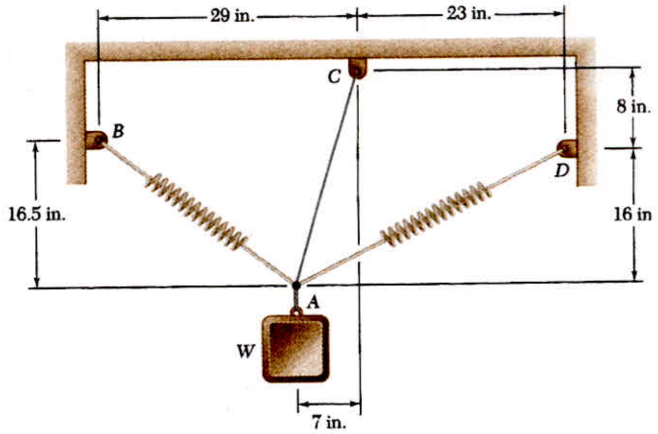
۵۶.۲ دو کابل در نقطهٔ C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. مطلوب است گستره مقادیر W به نحوی که کشش هر کابل از ۲۴۰ lb تجاوز نکند.

۵۷.۲ باری به وزن ۴۰۰ N با یک فنر و دو طناب متصل به دو قطعه به وزنهای $۳W$ و W، مطابق شکل آویزان است. می‌دانیم که ثابت فنر ۸۰۰ N/m. مطلوب است (الف) مقدار W، (ب) طول آزاد فنر.



شکل م ۵۷.۲

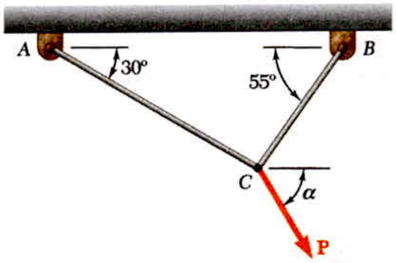
۵۸.۲ باری به وزن W از یک طناب به طول ۲۵ in و دو فنر که طول آزاد هر یک ۲۲٫۵ in است آویزان می‌باشد. می‌دانیم که ثابتهای فنر $k_{AB} = 9\,lb/in$ و $k_{AD} = 3\,lb/in$ است. مطلوب است (الف) کشش در طناب، (ب) وزن قطعه.



شکل م ۵۸.۲

۵۹.۲ برای طنابهای نیروی مورد نظر مسئله ۴۶.۲، مطلوب است (الف) مقدار α وقتی که کشش طناب AB کمترین مقدار ممکن باشد. (ب) مقدار متناظر کشش.

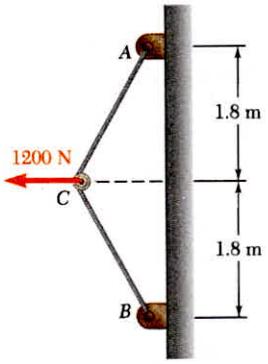
۶۰.۲ دو کابل در نقطهٔ C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. اگر حداکثر کشش مجاز هر کابل ۹۰۰ N باشد، مطلوب است (الف) بزرگی بیشترین نیروی $\mathbf{P}$ را که بتوان بر C وارد کرد. (ب) مقدار متناظر α.



شکل م ۶۰.۲ و م ۶۱.۲

۶۱.۲ دو کابل در نقطهٔ C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. اگر حداکثر کشش مجاز ۱۴۰۰ N در کابل AC و ۷۰۰ N در کابل B باشد، مطلوب است (الف) مقدار حداکثر نیروی P که می‌توان بر C وارد کرد. (ب) مقدار متناظر α.

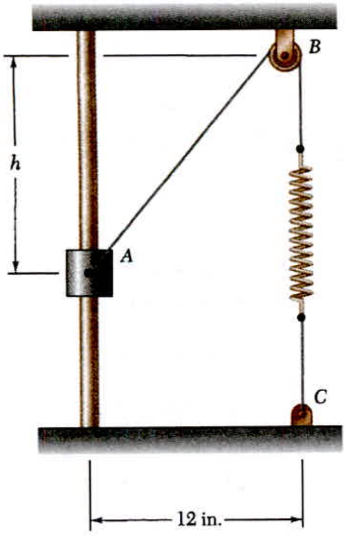
۶۲.۲ می‌دانیم که قسمتهای AC و BC از کابل ACB باید برابر باشند. مطلوب است کوتاهترین طول کابلی که می‌توان برای نگهداری بار نشان داده شده به کاربرد، در حالی که کشش در کابل از ۸۷۰ N تجاوز نکند.



شکل م ۶۲.۲

۶۳.۲ در سازه و بارگذاری مسئله ۴۳.۲، مطلوب است (الف) اندازه α در حالتی که کشش در کابل BC به‌اندازهٔ ممکن کوچک باشد. (ب) مقدار متناظر کشش.

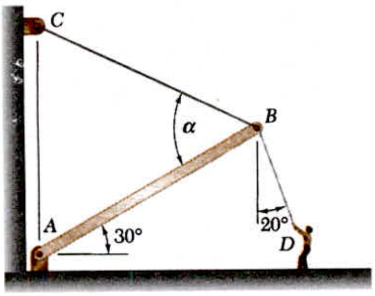
۶۴.۲ طوقهٔ A نشان داده شده می‌تواند روی میلهٔ قائم بدون اصطکاکی بلغزد و به فنری متصل است. ثابت فنر ۴ lb/in و فنر در حالت آزاد ۱۲ in است. می‌دانیم که اگر سیستم در حالت تعادل باشد h باید ۱۶ in باشد. مطلوب است وزن طوقه.



شکل م ۶۴.۲ و م ۶۵.۲

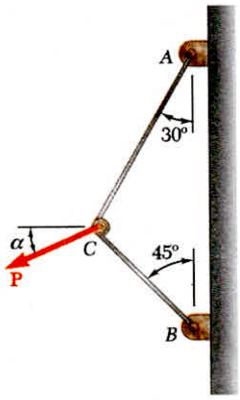
۶۵.۲ طوقه A برابر ۹ lb می‌تواند روی میله عمودی بدون اصطکاک بلغزد و از طرفی فنری مطابق شکل متصل است. در حالت $h = 12\,in$ فنر به حالت آزاد است. می‌دانیم که ثابت فنر ۳ lb/in است، معین کنید اندازه h را برای اینکه سیستم در وضع تعادل باشد.

۶۶.۲ تیر بادبان AB از یک طرف توسط کابل BC و از طرف دیگر توسط لولا نگهداری می‌شود. می‌دانیم که تیر بر پین B نیرویی در امتداد تیر وارد می‌کند و اینکه کشش در طناب BD برابر ۳۱۰ N است. معین کنید (الف) مقدار α را برای اینکه کشش در کابل BC تا حد امکان کوچک باشد، (ب) مقدار متناظر کشش را.



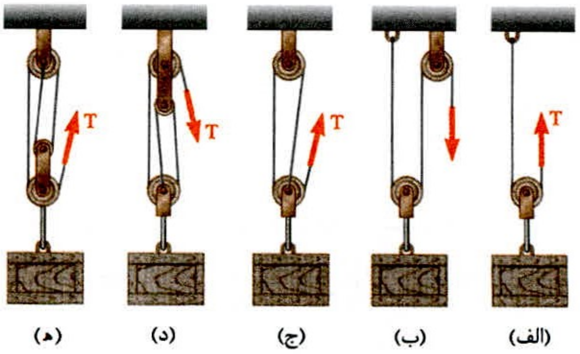
شکل م ۶۶.۲

۶۷.۲ نیروی $\mathbf{P}$ بر چرخ کوچکی که روی کابل ACB می‌غلتد وارد می‌شود. می‌دانیم کشش در دو قسمت کابل ۱۴۰ lb است. معین کنید مقدار و امتداد $\mathbf{P}$ را.



شکل م ۶۷.۲

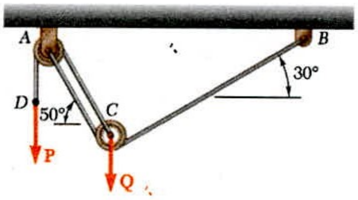
۶۸.۲ صندوق kg- ۲۸۰ توسط چندین طناب و قرقره مطابق شکل به‌ترتیب نگهداری می‌شود. ـشش در طناب را برای هر حالت به‌دست آورید. (**راهنمایی:** کشش در طناب روی هر طرف ـرقره ساده یکسان است. این را می‌توان با روش فصل ۴ اثبات کرد.)



شکل م ۶۸.۲

۶۹ قسمتهای (ب) و (د) مسئله ۶۸.۲ را با فرض اینکه سرهای آزاد طناب به صندوق ـصل است حل کنید.

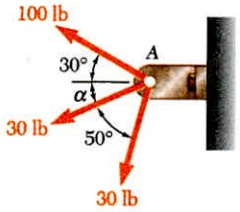
۷۰.۲ بار **Q** بر قرقره C که می‌تواند روی کابل ACB بغلتد وارد می‌شود. قرقره در وضع ـسان داده شده توسط کابل دیگر CAD است که از روی قرقره A عبور می‌کند و بار **P** را نگه ـدارد. می‌دانیم که $P = ۸۰۰$ N، معین کنید (الف) کشش در کابل ACB، (ب) مقدار بار ـ را.



شکل م ۷۰.۲ و م ۷۱.۲

۷۱. بار $\mathbf{Q} = ۲۰۰۰$ N بر قرقره C که می‌تواند روی کابل ACB بغلتد وارد می‌شود. ـره در وضع نشان داده شده توسط کابل دیگر CAD از روی قرقره A گذشته و بار **P** را ـگه می‌دارد. معین کنید (الف) کشش در کابل ACB، (ب) مقدار بار **P** را.

۷۲.۲ سه نیرو بر نقطه A وارد می‌شوند. امتدادهای دو نیروی lb- ۳۰ را می‌توان تغییر داد، ـی زاویه بین نیروها معمولاً °۵۰ است. معین کنید حدود مقدار α را برای اینکه مقدار برایند ـوهای وارد بر A کمتر از lb ۱۲۰ باشد.

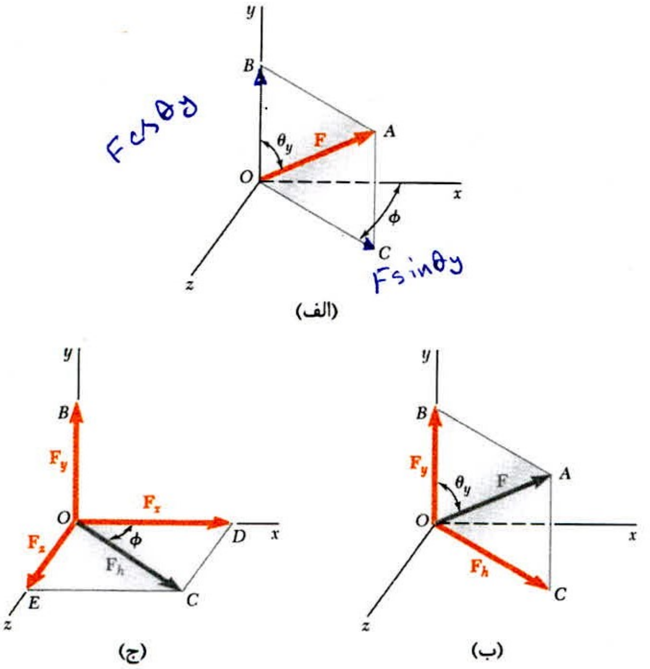


شکل م ۷۲.۲

نیروها در فضا

۱۲.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو در فضا

ـسئله‌هایی را که تا اینجا ملاحظه کردید تنها دو بعد را شامل می‌شدند؛ آنها را می‌توانستیم در یک صفحه فرمولبندی و بعد حل کنیم. حالا در این بخش و بخشهای باقیمانده از این فصل می‌خواهیم مسئله‌هایی را بررسی کنیم که سه بعد فضا را شامل می‌شوند.



شکل ۳۰.۲

نیروی **F** را در نظر بگیرید که به مبدأ دستگاه مختصات قائم x، y، و z وارد می‌شود. برای تعیین راستای **F**، صفحهٔ قائم $OBAC$ را که **F** را هم شامل می‌شود رسم می‌کنیم [شکل ۲ـ۳۰(الف)]. این صفحه از محور قائم y می‌گذرد و با صفحهٔ xy زاویهٔ ϕ تشکیل می‌دهد. راستای نیروی **F** در این صفحه، با زاویهٔ θ_y ــ که **F** با محور y تشکیل می‌دهد ــ مشخص می‌شود. نیروی **F** را می‌شود به دو مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{F}_y$ و افقی $\mathbf{F}_h$ تجزیه کرد؛ این عمل که در شکل ۳۰.۲ (ب) نشان داده شده است، در صفحهٔ $OBAC$ و طبق قاعده‌های تدوین‌شده در بخش اول این فصل، انجام می‌شود. مؤلفه‌های اسکالر F_y و F_h عبارت‌اند از

$$F_y = F\cos\theta_y \qquad F_h = F\sin\theta_y \tag{۱۶.۲}$$

ولی $\mathbf{F}_h$ را می‌شود به دو مؤلفهٔ قائم دیگر $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_z$ در امتداد محورهای x و z تجزیه کرد. این عمل که در شکل ۳۰.۲ (ج) نشان داده شده است، در صفحهٔ xz انجام می‌شود. حالا رابطه‌های زیر را برای مؤلفه‌های اسکالر متناظر با این نیروها به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h\cos\phi = F\sin\theta_y\cos\phi \\ F_z &= F_h\sin\phi = F\sin\theta_y\sin\phi \end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

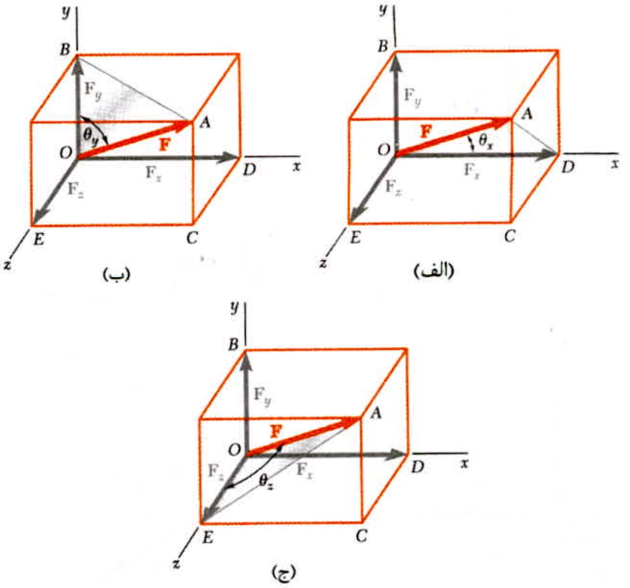
پس نیروی مفروض **F** به سه بردار قائم $\mathbf{F}_x$ ، $\mathbf{F}_y$ ، و $\mathbf{F}_z$ تجزیه شده است که در امتداد محورهای مختصات‌اند.

بنا به قضیهٔ فیثاغورث می‌توانیم در مورد مثلثهای OAB و OCD (در شکل ۳۰.۲) بنویسیم

$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

اگر F_h^2 را بین این دو معادله حذف کنیم و نتیجه را برحسب F بنویسیم، رابطهٔ زیر را بین **F** و سه مؤلفهٔ اسکالر قائم آن به‌دست می‌آوریم:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{۱۸.۲}$$



شکل ۳۱.۲

اگر «جعبه‌ای» با یالهای $\mathbf{F}_x$، $\mathbf{F}_y$، و $\mathbf{F}_z$ بکشیم تجسم رابطه‌ای که میان نیروی **F** و سه مؤلفهٔ آن ($\mathbf{F}_z$ ، $\mathbf{F}_y$ ، $\mathbf{F}_x$) وجود دارد آسانتر می‌شود (شکل ۳۱.۲). در این صورت نیروی **F** همان قطر OAی این جعبه خواهد بود. شکل ۳۱.۲(ب) مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB را نشان می‌دهد که برای به‌دست آوردن رابطهٔ (۱۶.۲): $F_y = F\cos\theta_y$ به کار رفته است. در شکلهای ۳۱.۲(الف) و (ج)، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر OAD و OAE هم رسم شده است. می‌بینید که مکان این مثلثها در داخل جعبه با مکانی که مثلث OAB اشغال کرده قابل مقایسه است. اگر زاویهٔ بین نیروی **F** و محورهای x و z را به‌ترتیب با θ_x و θ_z نشان بدهیم، می‌توانیم دو فرمول دیگر مشابه با $F_y = F\cos\theta_y$ به‌دست بیاوریم. پس می‌نویسیم

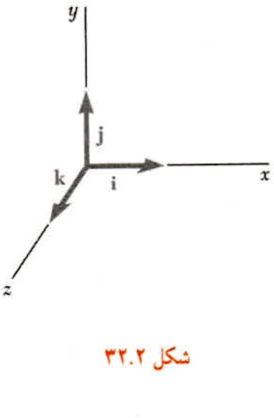
$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z \qquad (۱۹.۲)$$

سه زاویهٔ θ_x، θ_y، و θ_z راستای نیروی **F** را مشخص می‌کنند؛ این زاویه‌ها برای این منظور از زاویه‌های θ_y و ϕ که در آغاز این بخش معرفی کردیم، متداولترند. کسینوسهای θ_x ، θ_y ، و θ_z به کسینوس‌های هادی نیروی **F** معروف‌اند.

نیروی **F** را می‌شود با معرفی بردارهای یکه **i**، **j**، و **k** که به‌ترتیب در امتداد محورهای x، y، و z قرار دارند (شکل ۳۲.۲) به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (۲۰.۲)$$

که مؤلفه‌های اسکالر F_x ، F_y ، F_z با رابطه‌های (۱۹.۲) مشخص می‌شوند.



شکل ۳۲.۲

مثال ۱. یک نیروی ۵۰۰ نیوتونی با محورهای x، y، و z به‌ترتیب زاویه‌های ۶۰°، ۴۵°، و ۱۲۰° تشکیل می‌دهد. مؤلفه‌های F_x، F_y، و F_z این نیرو را پیدا کنید.

با قرار دادن $F = ۵۰۰\ \mathrm{N}$، $\theta_x = ۶۰°$، $\theta_y = ۴۵°$، $\theta_z = ۱۲۰°$ در رابطه‌های (۱۹.۲)، نتیجه می‌شود که

$$F_x = (۵۰۰\ \mathrm{N})\cos ۶۰° = +۲۵۰\ \mathrm{N}$$
$$F_y = (۵۰۰\ \mathrm{N})\cos ۴۵° = +۳۵۴\ \mathrm{N}$$
$$F_z = (۵۰۰\ \mathrm{N})\cos ۱۲۰° = -۲۵۰\ \mathrm{N}$$

اگر این مقادیر را در معادلهٔ (۲۰.۲) به‌جای مؤلفه‌های اسکالر **F** بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{F} = (۲۵۰\ \mathrm{N})\mathbf{i} + (۳۵۴\ \mathrm{N})\mathbf{j} - (۲۵۰\ \mathrm{N})\mathbf{k}$$

در اینجا هم مثل مسئله‌های دوبعدی، علامت مثبت نشان می‌دهد که مؤلفه با محور متناظرش هم‌جهت است، و علامت منفی حاکی از این است که مؤلفه در خلاف جهت محور مربوط قرار دارد.

زاویه‌ای را که یک نیروی **F** با یک محور تشکیل می‌دهد باید از طرف مثبت محور اندازه‌گیری کرد و این زاویه همواره بین صفر و ۱۸۰° خواهد بود. یک زاویهٔ θ_x کوچکتر از ۹۰° (حاده یا تند) نشان می‌دهد که **F** (که فرض می‌شود مبدأ آن نقطهٔ O است) در همان طرفی از صفحهٔ yz قرار دارد که جهت مثبت محور x است؛ در این صورت $\cos\theta_x$ و F_x هم مثبت خواهند بود. اگر زاویهٔ θ_x بزرگتر از ۹۰° (منفرجه یا باز) باشد، حاکی از این است که **F** در طرف دیگر صفحهٔ yz است؛ درنتیجه $\cos\theta_x$ و F_x منفی‌اند. در مثال ۱ زاویه‌های θ_x و θ_y حاده‌اند، در حالی که θ_z منفرجه است؛ در نتیجه، F_x و F_y مثبت‌اند، در صورتی که F_z منفی است.

اگر عبارتهای معادل با F_x، F_y، و F_z رابطهٔ (۱۹.۲) را در معادلهٔ (۲۰.۲) قرار دهیم، می‌نویسیم

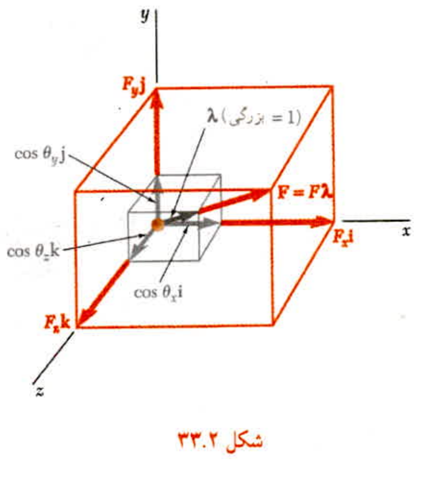
$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \qquad (۲۱.۲)$$

که نشان می‌دهد نیروی **F** را می‌شود به صورت ضرب اسکالر F و بردار

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k} \qquad (۲۲.۲)$$

نوشت. واضح است که بردار λ برداری است که بزرگی‌اش برابر با ۱ و راستایش هم راستای **F** است (شکل ۳۳.۲). به بردار λ می‌گویند بردار یکهٔ در امتداد خط اثر **F**. از رابطهٔ (۲۲.۲) نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های بردار یکهٔ λ به‌ترتیب برابر با کسینوس‌های هادی خط اثر **F**اند، یعنی

$$\lambda_x = \cos\theta_x \qquad \lambda_y = \cos\theta_y \qquad \lambda_z = \cos\theta_z \qquad (۲۳.۲)$$



شکل ۳۳.۲

باید متوجه این نکته باشیم که مقادیر زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z مستقل از یکدیگر
ستند. حالا با توجه به این مطلب که مجموع مربعات مؤلفه‌های یک بردار برابر با مربع
گی آن است، می‌نویسیم

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

ده اگر معادلهای آنها را از رابطهٔ (۲۳.۲) قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \qquad (۲۴.$$

مثلاً در مثال ۱، وقتی مقادیر $\theta_x = 60°$ و $\theta_y = 45°$ را اختیار کردیم، مقدار θ_z
ید برابر با ۶۰° یا ۱۲۰° باشد تا در اتحاد (۲۴.۲) صدق کند.

مؤلفه‌های F_x، F_y، و F_z نیروی **F** را که بدانیم، بزرگی نیروی F را می‌توانیم از
ی رابطهٔ (۱۸.۲) به‌دست بیاوریم و بعد رابطه‌های (۱۹.۲) را برحسب کسینوس‌های
ادی حل کنیم

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \qquad (۲۵.۱$$

زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z را که مشخصهٔ نیروی **F** هستند، پیدا کنیم.

مثال ۲. مؤلفه‌های یک نیروی **F** عبارت‌اند از $F_x = 20\ \text{lb}$، $F_y = -30\ \text{lb}$،
$F_z = 60\ \text{lb}$. بزرگی نیروی F و زوایای θ_x، θ_y، و θ_z را که این نیرو با محورهای
ختصات تشکیل می‌دهد پیدا کنید.

از رابطهٔ (۱۸.۲) داریم[1]

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(20\ \text{lb})^2 + (-30\ \text{lb})^2 + (60\ \text{lb})^2} = \sqrt{4900}\ \text{lb} = 70\ \text{lb}$$

قراردادن مقادیر مؤلفه‌ها و بزرگی **F** در معادله‌های (۲۵.۲)، نتیجه می‌شود

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20\ \text{lb}}{70\ \text{lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30\ \text{lb}}{70\ \text{lb}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60\ \text{lb}}{70\ \text{lb}}$$

محاسبهٔ خارج قسمت هر کسر و آرک کسینوس آن، داریم

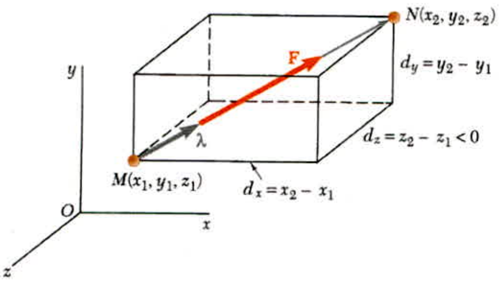
$$\theta_x = 73{,}4° \qquad \theta_y = 115{,}4° \qquad \theta_z = 31{,}0°$$

ن محاسبات را می‌شود به راحتی با یک ماشین حساب انجام داد.

۱۳.۱ نیرو با بزرگی‌اش و دو نقطه واقع بر روی خط اثرش تعریف می‌شود

در بسیاری از موارد، راستای نیروی **F** توسط مختصات دو نقطه، مثل $M(x_1, y_1, z_1)$
و $N(x_2, y_2, z_2)$، مشخص می‌شود که بر روی خط اثر نیرو واقع هستند (شکل
۳۴.۲). بردار $\overrightarrow{MN}$ را که از اتصال M و N به‌دست می‌آید و هم‌جهت با **F** است در

۱. با استفاده از یک ماشین‌حساب برنامه‌ریزی‌شده برای تبدیل مختصات قائم به مختصات قطبی، که
روش زیر F را سریعتر می‌شود به‌دست آورد: اول F_h را از روی دو مؤلفهٔ قائم F_x و F_z [شکل
۳۰.۲(ج)] تعیین کنید، بعد F را با استفاده از دو مؤلفهٔ قائم F_h و F_y [شکل ۳۰.۲(ب)] پیدا کنید.
تیب ورود سه مؤلفهٔ F_x، F_y، و F_z بی‌اهمیت است.



شکل ۳۴.۲

نظر بگیرید. اگر مؤلفه‌های اسکالر این بردار را به‌ترتیب با d_x، d_y، و d_z نشان بدهیم،
می‌توانیم بنویسیم

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \qquad (۲۶.۲)$$

بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ را که در امتداد خط اثر **F** (یعنی در امتداد خط MN) قرار دارد می‌شود
از تقسیم بردار $\overrightarrow{MN}$ بر بزرگی MN به‌دست آورد. با توجه به رابطهٔ (۲۶.۲) و اینکه
MN برابر با فاصلهٔ d از M تا N است، می‌نویسیم

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (۲۷.۲)$$

و چون قبلاً دیدیم که **F** برابر با حاصلضرب F و λ است، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (۲۸.۲)$$

که از آن نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های اسکالر **F** به‌ترتیب برابرند با

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \qquad (۲۹.۲)$$

رابطه‌های (۲۹.۲) تعیین مؤلفه‌های یک نیرو (**F**) را که بزرگی‌اش (F) معلوم و
خط اثرش بوسیلهٔ دو نقطهٔ M و N مشخص شده باشد به‌طور قابل ملاحظه‌ای
ساده می‌کنند. با کم کردن مختصات M از N، ابتدا مختصات بردار $\overrightarrow{MN}$ و فاصلهٔ
$M(d)$ تا N را تعیین می‌کنیم:

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$
$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

اگر معادلهای F و d_x، d_y، d_z، و d را در رابطه‌های (۲۹.۲) بگذاریم مؤلفه‌های F_x،
F_y، و F_z این نیرو به‌دست می‌آیند.

حالا می‌شود زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z را که **F** با محورهای مختصات تشکیل
می‌دهد از روی معادله‌های (۲۵.۲) به‌دست آورد. با مقایسهٔ معادله‌های (۲۲.۲) و
(۲۷.۲)، می‌توانیم بنویسیم

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{y} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d} \qquad (۳۰.۲)$$

و زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z را مستقیماً از روی مؤلفه‌ها و بزرگی بردار $\overrightarrow{MN}$ پیدا می‌کنیم.

۱۴.۲ جمع بستن نیروهای همرس در فضا

حالا می‌خواهیم برایند (**R**) دو یا چند نیرو را در فضا با جمع بستن مؤلفه‌های قائم
آنها تعیین کنیم. استفاده از روشهای ترسیمی یا مثلثاتی معمولاً در مورد نیروهای واقع
در فضا عملی نیست.

روشی که در اینجا دنبال می‌کنیم مشابه همان روشی است که در بخش ۸.۲ برای نیروهای هم‌صفحه به کار بردیم. با قرار دادن

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه می‌کنیم و می‌نویسیم

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})$$
$$= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \qquad (۳۱.۲)$$

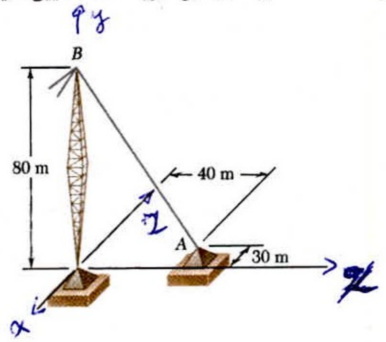
بزرگی برایند و زوایای θ_x، θ_y، و θ_z میان برایند و محورهای مختصات از روش بخش ۱۲.۲ به‌دست می‌آید. می‌نویسیم

$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲ + R_z^۲} \qquad (۳۲.۲)$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} \qquad (۳۳.۲)$$

مسئلهٔ نمونه ۷.۲

یک سر سیم مهار یک دکل انتقال نیرو را با پیچ به نقطهٔ A بسته‌اند. کشش در سیم ۲۵۰۰ N است. (الف) مؤلفه‌های F_x، F_y، و F_z نیروی وارد بر پیچ و (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z را که مشخصهٔ راستای این نیرو هستند تعیین کنید.



حل:

(الف) مؤلفه‌های نیرو. خط اثر نیروی وارد بر پیچ از نقطه‌های A و B می‌گذرد و راستای نیرو از A به B است. مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ ــ که با مؤلفه‌های نیرو هم‌جهت هستند ــ عبارت‌اند از

$$d_x = -۴۰\text{ m} \qquad d_y = +۸۰\text{ m} \qquad d_z = +۳۰\text{ m}$$

و کل فاصلهٔ از A تا B برابر است با

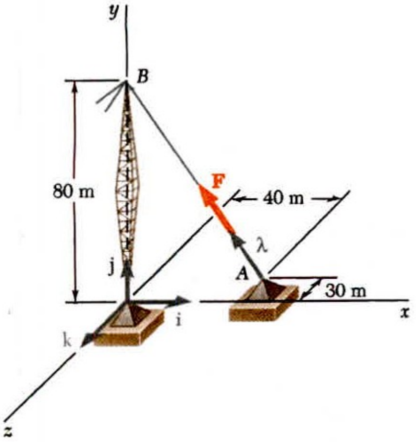
$$AB = d = \sqrt{d_x^۲ + d_y^۲ + d_z^۲} = ۹۴{,}۳\text{ m}$$

$\overrightarrow{AB}$ برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ در امتداد محور مختصات عبارت است از

$$\overrightarrow{AB} = -(۴۰\text{ m})\mathbf{i} + (۸۰\text{ m})\mathbf{j} + (۳۰\text{ m})\mathbf{k}$$

با معرفی بردار یکهٔ $\lambda = \overrightarrow{AB}/AB$، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{F} = F\lambda = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{۲۵۰۰\text{ N}}{۹۴{,}۳\text{ m}}\overrightarrow{AB}$$



حالا اگر عبارت بالا را به جای $\overrightarrow{AB}$ بگذاریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{F} = \frac{۲۵۰۰\text{ N}}{۹۴{,}۳\text{ m}}[-(۴۰\text{ m})\mathbf{i} + (۸۰\text{ m})\mathbf{j} + (۳۰\text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(۱۰۶۰\text{ N})\mathbf{i} + (۲۱۲۰\text{ N})\mathbf{j} + (۷۹۵\text{ N})\mathbf{k}$$

بنابراین، مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ عبارت‌اند از

◄ $F_x = -۱۰۶۰\text{ N} \quad F_y = +۲۱۲۰\text{ N} \quad F_z = +۷۹۵\text{ N}$

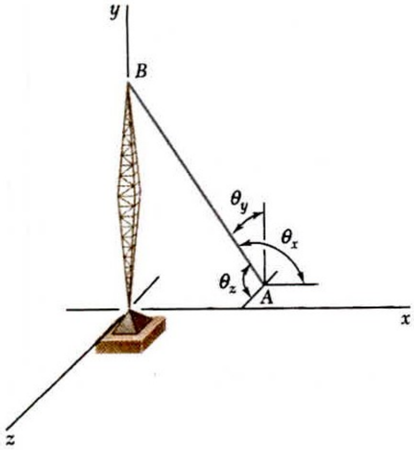
(ب) راستای نیرو. با استفاده از معادله‌های (۲۵.۲)، می‌نویسیم

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-۱۰۶۰\text{ N}}{۲۵۰۰\text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+۲۱۲۰\text{ N}}{۲۵۰۰\text{ N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+۷۹۵\text{ N}}{۲۵۰۰\text{ N}}$$

با محاسبهٔ خارج قسمت هر یک از کسرها و آرک کسینوس آنها نتیجه می‌شود

◄ $\theta_x = ۱۱۵{,}۱^\circ \quad \theta_y = ۳۲{,}۰^\circ \quad \theta_z = ۷۱{,}۵^\circ$

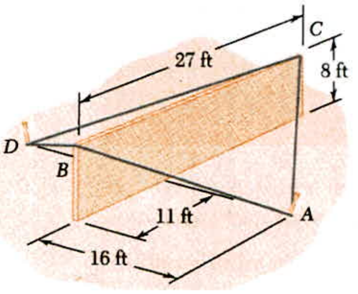


(توجه: این نتیجه را می‌توانستیم به‌جای استفاده از مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ و بزرگی آن، از رو مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ و بزرگی آن به‌دست بیاوریم.)

مسئلهٔ نمونه ۸.۲

یک دیوار بتنی پیش‌ساخته را به‌طور موقت به‌وسیلهٔ کابلهایی که می‌بینید نگه داشته‌اند اگر کشش در کابل AB برابر با ۸۴۰ lb و در کابل AC برابر با ۱۲۰۰ lb باشد

...گی و راستای براینِد نیروهایی را که کابلهای AB و AC به میخ A وارد می‌کنند پیدا ...



...ـل:

مؤلفه‌های نیروها. نیروی وارد از هر کابل به میخ A را به مؤلفه‌های x، y، و z ...زیه می‌کنیم. ابتدا مؤلفه‌ها و بزرگی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را با اندازه‌گیری آنها از A طرف دیوار تعیین می‌کنیم. با توجه به بردار یکه‌های $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ داریم

$$\overrightarrow{AB} = -(۱۶\text{ ft})\mathbf{i} + (۸\text{ ft})\mathbf{j} + (۱۱\text{ ft})\mathbf{k} \implies AB = ۲۱\text{ ft}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(۱۶\text{ ft})\mathbf{i} + (۸\text{ ft})\mathbf{j} - (۱۶\text{ ft})\mathbf{k} \implies AC = ۲۴\text{ ft}$$

...ار یکهٔ در امتداد AB را λ_{AB} می‌نامیم، داریم

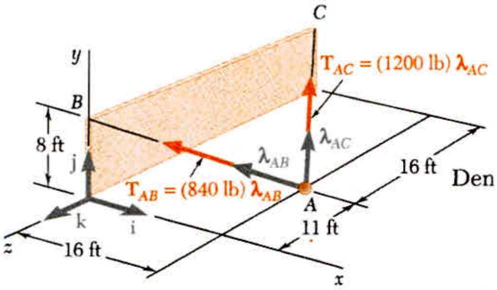
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{۸۴۰\text{ lb}}{۲۱\text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

اگر عبارت بالا را به‌جای $\overrightarrow{AB}$ بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{۸۴۰\text{ lb}}{۲۱\text{ ft}}[-(۱۶\text{ ft})\mathbf{i} + (۸\text{ ft})\mathbf{j} + (۱۱\text{ ft})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(۶۴۰\text{ lb})\mathbf{i} + (۳۲۰\text{ lb})\mathbf{j} + (۴۴۰\text{ lb})\mathbf{k}$$

...همین ترتیب، بردار یکهٔ در امتداد AC را با $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ نشان می‌دهیم که نتیجه می‌شود

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{۱۲۰۰\text{ lb}}{۲۴\text{ ft}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(۸۰۰\text{ lb})\mathbf{i} + (۴۰۰\text{ lb})\mathbf{j} - (۸۰۰\text{ lb})\mathbf{k}$$



براینِد نیروها. براینِد $(\mathbf{R})$ نیروهایی که کابلها وارد می‌کنند برابر است با

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(۱۴۴۰\text{ lb})\mathbf{i} + (۷۲۰\text{ lb})\mathbf{j} - (۳۶۰\text{ lb})\mathbf{k}$$

حالا بزرگی و راستای براینِد را تعیین می‌کنیم

$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲ + R_z^۲} = \sqrt{(-۱۴۴۰)^۲ + (۷۲۰)^۲ + (-۳۶۰)^۲}$$

$$R = ۱۶۵۰\text{ lb} \quad ◄$$

از معادله‌های (۳۳.۲) داریم

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-۱۴۴۰\text{ lb}}{۱۶۵۰\text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+۷۲۰\text{ lb}}{۱۶۵۰\text{ lb}}$$
$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-۳۶۰\text{ lb}}{۱۶۵۰\text{ lb}}$$

با محاسبهٔ خارج قسمت هر یک از کسرها و آرک‌کسینوسهای آنها، نتیجه می‌شود

$$\theta_x = ۱۵۰{,}۸^\circ \quad \theta_y = ۶۴{,}۱^\circ \quad \theta_z = ۱۰۲{,}۶^\circ \quad ◄$$

چگونه مسئله حل کنیم

در این درس دیدیم که نیروهای واقع در فضا را می‌شود با بزرگی و راستایشان یا با سه مؤلفه ...ئم F_x، F_y، و F_z مشخص کرد.

(الف) اگر بزرگی و راستای نیرو مشخص باشد، مؤلفه‌های قائم F_x، F_y، و F_z آن می‌شود چنین به‌دست آورد:

حالت ۱. اگر راستای نیروی $\mathbf{F}$ مطابق شکل ۳۰.۲ با زوایای θ_y و ϕ معین شده باشد، ...صاویر F با این زوایا یا مکملهای آنها، مؤلفه‌های F را به‌دست می‌دهند [معادلات (۱۷.۲)]. ...توجه کنید که برای پیدا کردن مؤلفه‌های x و z نیروی $\mathbf{F}$ اول باید تصویر $\mathbf{F}$ را روی صفحهٔ ...فقی به‌دست آورد؛ بعد می‌شود این‌تصویر $(\mathbf{F}_h)$ را به مؤلفه‌های $\mathbf{F}_x$، و $\mathbf{F}_z$ تجزیه کرد [شکل ۳۰ (ج)].

...نگام حل مسئله‌هایی بدین‌شکل، شدیداً تشویق می‌شوید، ابتدا نیروی $\mathbf{F}$ را رسم کنید و سپس تصویر $\mathbf{F}_h$ و مؤلفه‌های F_x، F_y، و F_z را پیش از شروع حل ریاضی انجام دهید.

حالت ۲. اگر راستای نیروی $\mathbf{F}$ با زوایای θ_x، θ_y، و θ_z، که $\mathbf{F}$ با محورهای مختصات می‌سازد، مشخص شده باشد، هر مؤلفه را می‌شود از ضرب بزرگی F در کسینوس زاویهٔ مربوط به‌دست‌آورد [مثال ۱]:

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z$$

حالت ۳. اگر راستای نیروی $\mathbf{F}$ با دو نقطهٔ M و N واقع بر روی خط اثر آن مشخص شده باشد (شکل ۳۴.۲)، اول بردار $\overrightarrow{MN}$ را برحسب مؤلفه‌های d_x، d_y، و d_z و بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بنویسید:

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

بعد، بردار $\overrightarrow{MN}$ را به بزرگی‌اش MN تقسیم کنید تا بردار یکهٔ امتداد خط اثر $\mathbf{F}$، یعنی $\boldsymbol{\lambda}$، به‌دست بیاید و آن را در بزرگی $\mathbf{F}$ ضرب کنید تا عبارتی برای $\mathbf{F}$ برحسب مؤلفه‌های قائم آن به‌دست بیاید [مسئلهٔ نمونهٔ ۷.۲]:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

وقتی می‌خواهید مؤلفه‌های قائم یک نیرو را تعیین کنید بهتر است سیستمی را برای نمادگذاری

به کار ببرید که سازگار و بامعنی باشد. روشی را که در این کتاب به کار برده‌ایم در مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۲ نشان داده‌ایم. مثلاً $\mathbf{T}_{AB}$ نیرویی است که از A به طرف B اثر می‌کند. توجه کنید که زیرنویسها را طوری نوشته‌ایم که با امتداد نیرو سازگار باشند. توصیه می‌کنیم که شما هم همین نمادگذاری را به‌کار ببرید، چون کمک می‌کند که نقطهٔ ۱ (اولین حرف زیرنویس) و نقطهٔ ۲ (دومین حرف زیرنویس) را تشخیص بدهید. وقتی بردار معرف خط اثر یک نیرو را تشکیل می‌دهید مؤلفه‌های اسکالر آن را می‌توانید تعداد گامهایی بگیرید که باید در امتداد هریک از محورهای مختصات بردارید تا از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۲ برسید. لازم است که همیشه به‌خاطر داشته باشید که به هریک از مؤلفه‌ها علامت صحیح را تخصیص بدهید.

(ب) اگر نیرویی با مؤلفه‌های قائمش F_x ، F_y ، و F_z مشخص شده باشد، می‌توانید بزرگی $\mathbf{F}$ را با نوشتن رابطهٔ

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

به‌دست بیاورید. کسینوس هادیهای خط اثر F را هم از تقسیم مؤلفه‌های نیرو به $\mathbf{F}$ تعیین کنید:

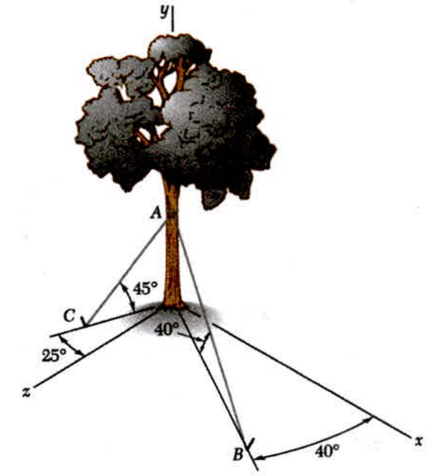
$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

از روی این کسینوس هادیها می‌توانید زوایای θ_x، θ_y، و θ_z را که $\mathbf{F}$ با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد به‌دست بیاورید [مثال ۲].

(ج) برای تعیین برایند ($\mathbf{R}$) دو یا چند نیروی واقع در فضای سه بعدی اول مؤلفه‌های قائم تک‌تک نیروها را با یکی از روشهایی که در بالا گفتیم پیدا کنید. بعد این مؤلفه‌ها را جمع کنید تا مؤلفه‌های R_x، R_y، R_z برایند به‌دست بیایند. آن‌وقت می‌توانید بزرگی و راستای برایند را مطابق آنچه در بالا برای یک نیروی $\mathbf{F}$ بیان کردیم به‌دست بیاورید [مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۲].

مسئله‌ها

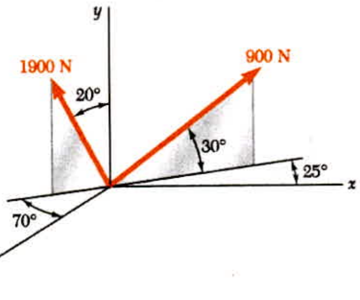
۷۳.۲ برای استحکام درختی که قسمتی از ریشه‌های آن در اثر طوفان کنده شده، کابلهای AB و AC را به بالای تنه درخت متصل کرده و سپس کابلها را با میله‌های فولادی تعبیه شده در زمین محکم می‌بندند. اگر کشش در کابل AB برابر lb ۹۵۰ باشد معین کنید (الف) مؤلفه‌های نیروی وارد توسط این کابل بر درخت. (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z که این نیرو در نقطه A با محورهایی موازی با محور مختصات تشکیل می‌دهند.



شکل م ۷۳.۲ و م ۷۴.۲

۷۴.۲ برای استحکام درختی که قسمتی از ریشه‌های آن در اثر طوفان کنده شده، کابلهای AB و AC را بالای تنه درخت متصل کرده و سپس کابلها را با میله‌های فولادی تعبیه شده در زمین محکم می‌بندند. اگر کشش در کابل AC برابر lb ۸۱۰ باشد، معین کنید (الف) مؤلفه‌های نیروی وارد در این کابل بر درخت، (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z که این نیرو در نقطه A با محورهایی موازی با محور مختصات تشکیل می‌دهند.

۷۵.۲ معین کنید (الف) x، y، و z مؤلفه‌های نیروی N-۹۰۰، (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z که این نیرو با محور مختصات تشکیل می‌دهد.



شکل م ۷۵.۲ و م ۷۶.۲

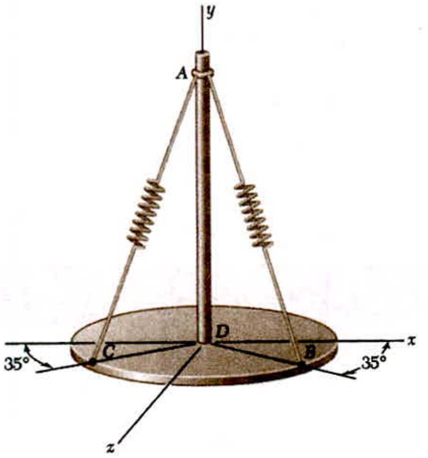
۷۶.۲ معین کنید (الف) x، y، و z مؤلفه‌های نیروی N-۱۹۰۰، (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z که این نیرو با محور مختصات تشکیل می‌دهد.

۷۷.۲ تفنگی نقطه A واقع در °۲۰ شمال غربی را هدف قرار داده است. می‌دانیم که تفنگ با افق زاویهٔ °۳۵ تشکیل می‌دهد و ماکزیمم نیروی پس‌زن lb ۱۸۰ می‌باشد، معین کنید (الف) x، y، و z مؤلفه‌های این نیرو را، (ب) اندازه زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z که نیروی پس‌زن تفنگ را معین می‌کند (فرض کنید که محورهای x، y، و z به‌ترتیب در امتداد شرق، بالا و جنوب می‌باشند.

۷۸.۲ مسئله ۷۷.۲ را با فرض اینکه نقطه A در °۲۵ شمال غربی واقع شده باشد و اینکه تفنگ با افق زاویه °۳۰ تشکیل دهد، حل کنید.

۷۹.۲ زاویه بین فنر AB و ستون DA برابر °۳۰ است. می‌دانیم که کشش در فنر N ۱۱۰ است. معین کنید (الف) x، y، و z مؤلفه‌های نیروی وارد از فنر را روی تیر قائم، (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z که این نیرو با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد.

۸۰.۲ زاویه بین فنر AC و ستون AD برابر °۳۰ است. می‌دانیم که مؤلفه x نیروی وارد شده توسط فنر بر ستون N ۱۸۰ است. معین کنید (الف) کشش در فنر AC، (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z را که نیروی وارد شده در نقطه C با محور مختصات تشکیل می‌دهد.



شکل م ۷۹.۲ و م ۸۰.۲

۸۱.۲ مطلوب است بزرگی و جهت نیروی $\mathbf{F} = (۶۵\ \text{N})\mathbf{i} - (۸۰\ \text{N})\mathbf{j} - (۲۰۰\ \text{N})\mathbf{k}$ را.

۸۲.۲ مطلوب است بزرگی و جهت نیروی زیر

$$\mathbf{F} = (۴۵۰\ \text{N})\mathbf{i} + (۶۰۰\ \text{N})\mathbf{j} - (۱۸۰۰\ \text{N})\mathbf{k}$$

۸۳.۲ نیروی وارد بر مبدأ محور مختصات در امتدادی است که زاویه‌های $\theta_x = ۴۳{,}۲°$ و $\theta_z = ۸۳{,}۸°$ را تشکیل می‌دهد. می‌دانیم که مؤلفه y نیرو برابر lb ۵۰− است. معین کنید (الف) زاویهٔ θ_y، (ب) مؤلفه‌های دیگر و بزرگی نیرو را.

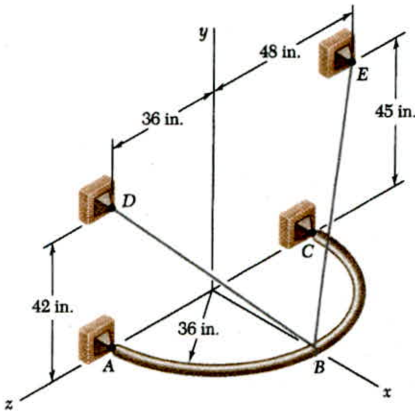
۸۴.۲ نیروی وارد بر مبدأ محور مختصات در امتدادی است که زاویه‌های $\theta_x = ۱۱۳{,}۲°$ و $\theta_y = ۷۸{,}۴°$ را تشکیل می‌دهد. می‌دانیم که مؤلفه z نیرو برابر lb ۳۵− است. معین کنید

ف) زاویه θ_z، (ب) مؤلفه‌های دیگر و بزرگی نیرو را.

۸۵. نیروی **F** به بزرگی ۲۵۰ N در مبدأ محور مختصات وارد می‌شود. می‌دانیم که $F_x =$ ۸۰ N، $\theta_y =$ ۷۲٫۴°، و $F_z >$ ۰ است. معین کنید (الف) مؤلفه‌های F_y و F_z، (ب) زاویه‌های θ_x و θ_z.

۸۶.۲ نیروی **F** به بزرگی ۳۲۰ N در مبدأ محور مختصات وارد می‌شود. می‌دانیم که $\theta_x =$ ۱۰۴٫۵، $F_z = -$۱۲۰ N، و $F_y <$ ۰. معین کنید (الف) مؤلفه‌های F_x و F_y، ب) زاویه‌های θ_y و θ_z را.

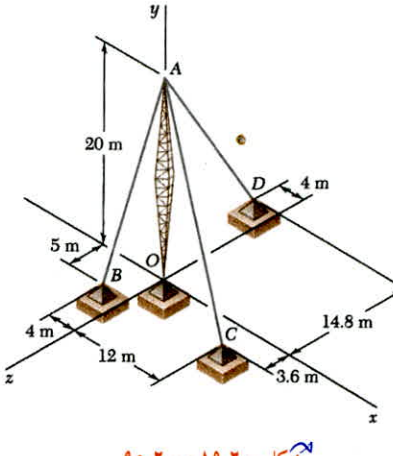
۸۷. میله فولادی به دو نیم حلقه دایروی به شعاع ۳۶ in خم شده است و توسط کابلهای BD و BE که جداگانه به حلقه‌ای در B متصل هستند، نگهداری می‌شوند. می‌دانیم که کشش در کابل BD برابر ۵۵ lb است. معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط کابل برنگهدارنده D را.



شکل م ۸۷.۲ و م ۸۸.۲

۸۸. میلهٔ فولادی به دو نیم حلقه دایروی به شعاع ۳۶ in خم شده است و توسط کابلهای BD و BE که جداگانه به حلقه‌ای در B متصل هستند، نگهداری می‌شوند. می‌دانیم که کشش در کابل BE برابر ۶۰ lb است، معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط کابل نگهدارنده DE.

۸۹.۲ برج انتقال نیرو با سه سیم مهار توسط پیچهای B، C، و D استحکام یافته است. اگر کشش سیم AD برابر ۲۱۰۰ N باشد، معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط سیم روی پیچ B.

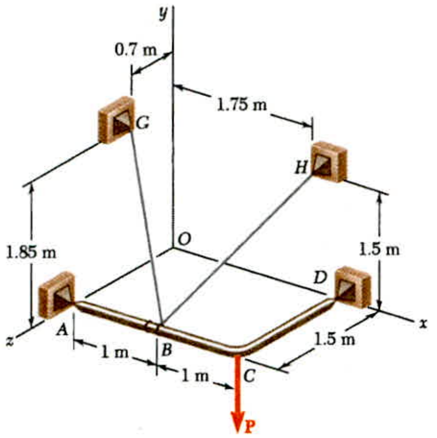


شکل م ۸۹.۲ و م ۹۰.۲

۹۰.۲ برج انتقال نیرو با سه سیم مهار توسط پیچهای B، C، و D استحکام یافته است. اگر کشش در سیم AD برابر ۱۲۶۰ N باشد، معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط سیم در پیچ D.

۹۱.۱ دوکابل BG و BH مطابق شکل به قاب ACD متصل‌اند. می‌دانیم که کشش درکابل BG برابر ۴۵۰ N است. معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد ازکابل BG روی قاب در نقطه B.

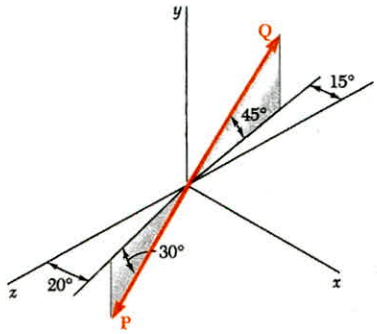
۹۲. دوکابل BG و BH مطابق شکل به قاب ACD متصل‌اند. می‌دانیم که کشش در کابل BH برابر ۶۰۰ N است. معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد درکابل BH روی قاب در نقطه B.



شکل م ۹۱.۲ و م ۹۲.۲

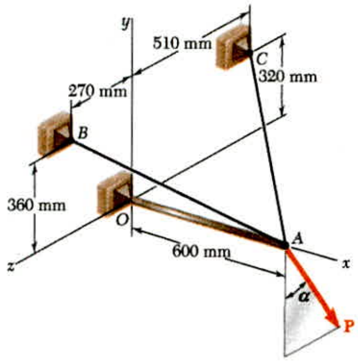
۹۳.۲ بزرگی و راستای برایند دو نیروی نشان داده شده را تعیین کنید. می‌دانیم که $P =$ ۴ kip و $Q =$ ۸ kip.

۹۴.۲ بزرگی و راستای برایند دو نیروی نشان داده شده را تعیین کنید. می‌دانیم که $P =$ ۶ kip و $Q =$ ۷ kip.



شکل م ۹۳.۲ و م ۹۴.۲

۹۵.۲ تیر OA بار **P** را حمل می‌کند و مطابق شکل توسط دو کابل نگهداری می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر ۵۱۰ N و در کابل AC برابر ۷۶۵ N است. بزرگی و راستای برایند نیروهای وارد بر A را از طرف دو کابل تعیین کنید.



شکل م ۹۵.۲

۹۶.۲ با فرض اینکه در مسئلهٔ ۹۵.۲ کشش درکابل AB برابر ۷۶۵ N و درکابل AC برابر ۵۱۰ N باشد، معین کنید بزرگی و راستای برایند نیروهای وارد از طرف دو کابل در نقطه A.

۹۷.۲ برای درخت مسئله ۷۳.۲، می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر ۷۶۰ lb و برایند نیروهای وارد بر A توسط کابلهای AB و AC در صفحه yz قرار دارد. معین کنید (الف) کشش در AC، (ب) بزرگی و راستای برایند دو نیرو.

۹۸.۲ برای درخت مسئله ۷۳.۲ می‌دانیم که کشش در کابل AC برابر ۹۶۰ lb و برایند نیروهای وارد بر A توسط کابلهای AB و AC در صفحه yz قرار دارد. معین کنید (الف)

کشش در AB، (ب) بزرگی و راستای برایند دو نیرو را.

۹۹.۲ برای تیر مسئلهٔ ۹۵.۲، می‌دانیم که $\alpha = ۰$، کشش در کابل AB برابر ۶۰۰ N، و برایند بار **P** و نیروهای وارد در نقطه A توسط کابلها در امتداد OA است. معین کنید (الف) کشش در کابل AC، (ب) مقدار بار **P**.

۱۰۰.۲ برای برج انتقال نیرو مسئله ۸۹.۲، معین کنید کشش در کابلهای AB و AD. می‌دانیم که کشش در کابل AC برابر ۱۷۷۰ N و برایند نیروهای وارد توسط سه کابل در نقطه A باید قائم باشد.

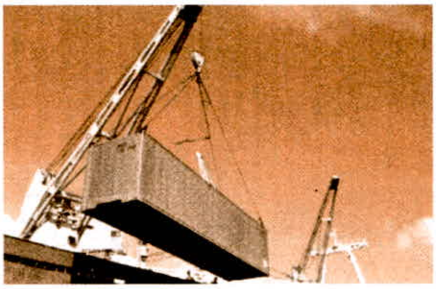
۱۵.۲ تعادل ذره در فضا

طبق تعریفی که در بخش ۹.۲ ارائه شد، ذرهٔ A به‌شرطی در تعادل است که برایند همهٔ نیروهای وارد بر A صفر باشد. مؤلفه‌های R_x، R_y، و R_z برایند، از رابطه‌های (۳۱.۲) به‌دست می‌آیند؛ برای بیان صفر بودن مؤلفه‌های برایند می‌نویسیم

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \qquad \Sigma F_z = ۰ \tag{۳۴.۲}$$

معادله‌های (۳۴.۲) شرطهای لازم و کافی برای تعادل یک ذره در فضا را بیان می‌کنند. از این معادله می‌شود برای حل مسئله‌های مربوط به تعادل ذره که حداکثر سه مجهول دارند استفاده کرد.

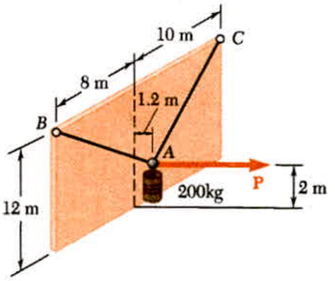
برای حل چنین مسئله‌هایی، ابتدا باید نمودار جسم آزاد نشان‌دهندهٔ ذرهٔ در حال تعادل و همهٔ نیروهای وارد بر آن را رسم کنید. بعد می‌توانید معادله‌های تعادل (۳۴.۲) را بنویسید و آنها را برای سه مجهول حل کنید. در انواع متداولتر مسئله‌ها، این مجهولها عبارت‌اند از (۱) سه مؤلفهٔ یک تک‌نیرو یا (۲) بزرگیهای سه نیرو که راستاهاشان معلوم است.



عکس ۳.۲ اگرچه کشش در چهار کابل نگهدارنده کانتینر کشتی را نمی‌توانید با استفاده از سه معادلهٔ (۳۴.۲) به‌دست آورید، اما با درنظر گرفتن تعادل می‌توانید رابطه‌ای بین کششهای حلقه پیدا کنید.

مسئلهٔ نمونه ۹.۲

یک استوانهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی از دو کابل AB و AC که متصل به بالای یک دیوار عمودی هستند آویزان شده است. نیروی افقی **P** که عمود بر دیوار است، استوانه را در مکان نشان داده شده نگه می‌دارد. بزرگی **P** و کشش در هر کابل را پیدا کنید.

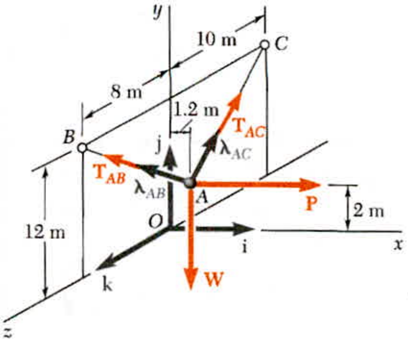


حل:

نمودار جسم آزاد. نقطهٔ A را به‌عنوان جسم آزاد اختیار می‌کنیم؛ این نقطه تحت تأثیر چهار نیروست، که بزرگی سه تای آنها مجهول است.

با معرفی بردارهای یکهٔ **i**، **j**، و **k**، هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه می‌کنیم

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(۲۰۰\ \text{kg})(۹{,}۸۱\ \text{m/s}^۲)\mathbf{j} = -(۱۹۶۲\ \text{N})\mathbf{j} \tag{۱}$$



در مورد $\mathbf{T}_{AB}$ و $\mathbf{T}_{AC}$ اول باید مؤلفه‌ها و بزرگیهای بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تعیین کنیم. بردار یکهٔ در امتداد AB را با $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{AB} = -(۱{,}۲\ \text{m})\mathbf{i} + (۱۰\ \text{m})\mathbf{j} + (۸\ \text{m})\mathbf{k}$$
$$AB = ۱۲{,}۸۶۲\ \text{m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{۱۲{,}۸۶۲\ \text{m}} = -۰{,}۰۹۳۳۰\mathbf{i} + ۰{,}۷۷۷۵\mathbf{j} + ۰{,}۶۲۲۰\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB}$$
$$= -۰{,}۰۹۳۳۰T_{AB}\mathbf{i} + ۰{,}۷۷۷۵T_{AB}\mathbf{j} + ۰{,}۶۲۲۰T_{AB}\mathbf{k} \tag{۲}$$

به همین ترتیب، بردار یکهٔ در امتداد AC را با $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{AC} = -(۱{,}۲\ \text{m})\mathbf{i} + (۱۰\ \text{m})\mathbf{j} - (۱۰\ \text{m})\mathbf{k} \qquad AC = ۱۴{,}۱۹۳\ \text{m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{۱۴۱{,}۱۹۳\ \text{m}} = -۰{,}۰۸۴۵۵\mathbf{i} + ۰{,}۷۰۴۶\mathbf{j} - ۰{,}۷۰۴۶\underline{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC}$$
$$= -۰{,}۰۸۴۵۵T_{AC}\mathbf{i} + ۰{,}۷۰۴۶T_{AC}\mathbf{j} - ۰{,}۷۰۴۶T_{AC}\mathbf{k} \tag{۳}$$

شرط تعادل. چون A در حال تعادل است، باید داشته باشیم

$$\Sigma\mathbf{F} = ۰: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = ۰$$

یا، با قراردادن معادلهای نیرو از (۱)، (۲)، و (۳) و فاکتور گرفتن از **i**، **j**، و **k**،

$$(-۰{,}۰۹۳۳۰T_{AB} - ۰{,}۰۸۴۵۵T_{AC} + P)\mathbf{i} + (۰{,}۷۷۷۵T_{AB}$$
$$+ ۰{,}۷۰۴۶T_{AC} - ۱۹۶۲\ \text{N})\mathbf{j} + (۰{,}۶۲۲۰T_{AB} - ۰{,}۷۰۴۶T_{AC})\mathbf{k} = ۰$$

با مساوی صفر قراردادن ضریبهای **i**، **j**، و **k** سه معادلهٔ اسکالر می‌نویسیم، که حاکی از آنند که مجموع مؤلفه‌های x، y، و z نیروها به‌ترتیب برابر با صفرند.

$$\Sigma F_x = ۰: \qquad -۰{,}۰۹۳۳۰T_{AB} - ۰{,}۰۸۴۵۵T_{AC} + P = ۰$$
$$\Sigma F_y = ۰: \qquad +۰{,}۷۷۷۵T_{AB} + ۰{,}۷۰۴۶T_{AC} - ۱۹۶۲\ \text{N} = ۰$$
$$\Sigma F_z = ۰: \qquad +۰{,}۶۲۲۰T_{AB} - ۰{,}۷۰۴۶T_{AC} = ۰$$

با حل این معادله‌ها، نتیجه می‌شود

$$P = ۲۳۵\ \text{N} \quad T_{AB} = ۱۴۰۲\ \text{N} \quad T_{AC} = ۱۲۳۸\ \text{N} \blacktriangleleft$$

چگونه مسئله حل کنیم

قبلاً دیدیم که برایند نیروهای وارد بر یک ذرهٔ در حال تعادل باید صفر باشد. اگر این واقعیت را در مورد تعادل یک ذرهٔ واقع در فضای سه بعدی بیان کنید سه رابطه به‌دست می‌آورید که نیروهای وارد بر ذره را به هم مربوط می‌کنند. این رابطه‌ها را می‌توانید برای تعیین سه مجهول مسئله ـــ که معمولاً بزرگی نیروها هستند ـــ به کار ببرید.

مسئله را به این ترتیب حل کنید:

۱. نمودار جسم آزاد ذره را بکشید. این نمودار ذره و کلیه نیروهای وارد بر آن را نشان می‌دهد. روی این نمودار بزرگی نیروهای معلوم و همچنین تمام زوایا یا اندازه‌هایی را که مشخصهٔ راستای یک نیرو هستند نشان بدهید. برای هر یک از زوایای مجهول یک نماد مناسب اختیار کنید. غیر از اینها چیزی به نمودار جسم آزاد اضافه نکنید.

۲. تک‌تک نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه کنید. مثل درس قبلی برای هر نیروی $\mathbf{F}$، بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ را که مشخصهٔ راستای آن نیرو است تعیین کنید و $\mathbf{F}$ را به‌صورت حاصلضرب بزرگی آن (F) و بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ بنویسید که عبارتی به‌شکل زیر به‌دست خواهید آورد

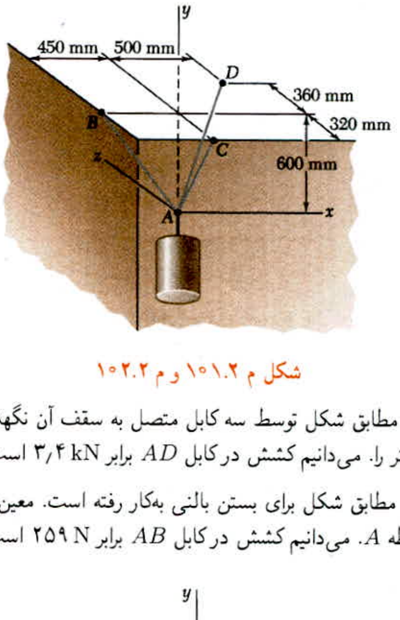
$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

که در آن d ، d_x ، d_y ، و d_z طولهایی هستند که از روی نمودار جسم آزاد به‌دست آمده‌اند. اگر بزرگی و راستای یک نیرو معلوم باشد، آن‌وقت F معلوم است و عبارت نمایندهٔ $\mathbf{F}$ به‌خوبی مشخص می‌شود؛ در غیر این صورت $\mathbf{F}$ یکی از سه مجهولی است که باید تعیین کنید.

۳. برایند، یا مجموع، نیروهای وارد بر ذره را مساوی صفر قرار بدهید. به این ترتیب یک معادلهٔ برداری به‌دست می‌آورید که شامل جمله‌های بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، یا $\mathbf{k}$ خواهد بود. جمله‌های شامل بردارهای یکه مشترک را دسته‌بندی کنید و از این بردار مشترک فاکتور بگیرید. برای اینکه معادله برداری برقرار باشد، ضریب تک‌تک بردارهای یکه را باید مساوی صفر قرار بدهید. به این ترتیب سه معادله اسکالر به‌دست می‌آید که می‌توانید آنها را حداکثر با سه مجهول حل کنید [مسئلهٔ نمونهٔ ۹.۲].

مسئله‌ها

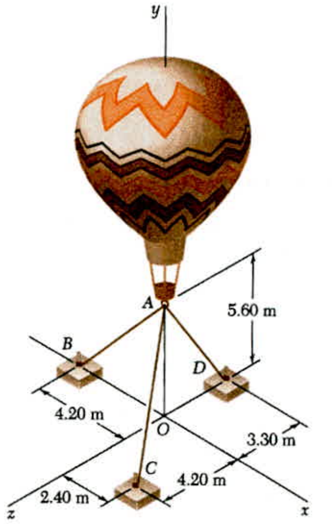
۱۰۱.۲ کانتینری مطابق شکل توسط سه کابل متصل به سقف آن نگهداری می‌شود. معین کنید وزن W کانتینر را. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر ۶ kN است.



شکل م ۱۰۱.۲ و م ۱۰۲.۲

۱۰۲.۲ کانتینری مطابق شکل توسط سه کابل متصل به سقف آن نگهداری می‌شود. معین کنید وزن W کانتینر را. می‌دانیم کشش در کابل AD برابر ۳٫۴ kN است.

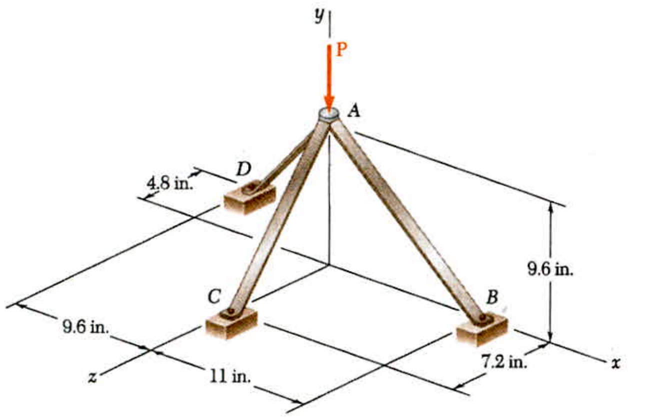
۱۰۳.۲ سه کابل مطابق شکل برای بستن بالنی به‌کار رفته است. معین کنید نیروی قائم P وارد بر بالن در نقطه A. می‌دانیم کشش در کابل AB برابر ۲۵۹ N است.



شکل م ۱۰۳.۲ و م ۱۰۴.۲

۱۰۴.۲ سه کابل مطابق شکل برای بستن بالنی به‌کار رفته است. معین کنید نیروی قائم P وارد بر بالن در نقطه A. می‌دانیم کشش در کابل AC برابر ۴۴۴ N است.

۱۰۵.۲ مجموع تکیه‌گاههای نشان داده شده در نقاط B، C، و D پیچ شده‌اند و نیروی نگهدارنده P را به سمت پایین در نقطه A تحمل می‌کنند. اگر نیروها در عضوهای AB، AC، و AD به‌ترتیب در امتداد عضوهای مربوط نیرو در عضو B برابر ۲۹٫۲ باشد، بزرگی P را تعیین کنید.



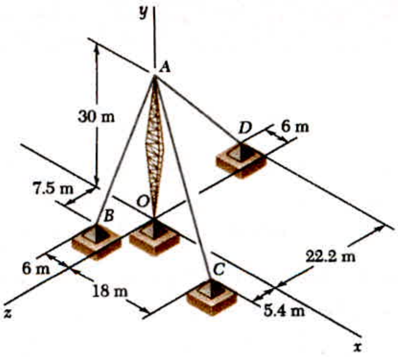
شکل م ۱۰۵.۲ و م ۱۰۶.۲

۱۰۶.۲ مجموع تکیه‌گاههای نشان داده شده در نقاط B، C، و D پیچ شده‌اند و نیروی نگهدارنده P را که رو به پایین است در نقطهٔ A تحمل می‌کنند. اگر نیروها در عضوهای AB، AC، و AD به‌ترتیب در امتداد عضوهای مربوط و $P = 45\ \text{lb}$ باشد، معین کنید نیروهای در عضوها را.

۱۰۷.۲ دکل انتقال نیرو با سه سیم مهار در نقطه A به پایین متصل و با پیچهایی در نقاط B، C، و D محکم شده است. اگر کشش در سیم AB برابر ۳٫۶ kN باشد، نیروی قائم P وارد توسط دکل بر روی پین A را به‌دست آورید.

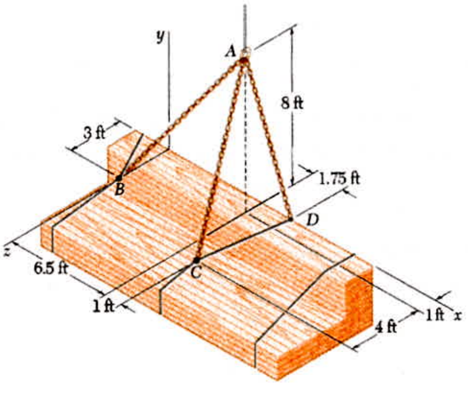
۱۰۸.۲ دکل اتصال نیرو با سه سیم مهار در نقطهٔ A به پین متصل است و با پیچهایی در B، C، و D محکم شده است. اگر کشش در سیم AC برابر ۲٫۶ kN باشد، نیروی قائم P وارد توسط دکل روی پین در نقطه A را به‌دست آورید.

۱۰۹.۲ بار الوار ۳۲۰-lb را با استفاده از یک قلاب سه شاخه بالا می‌برند. می‌دانیم که در لحظه نشان داده شده الوار ساکن است. کشش در هر شاخه قلاب را به‌دست آورید.



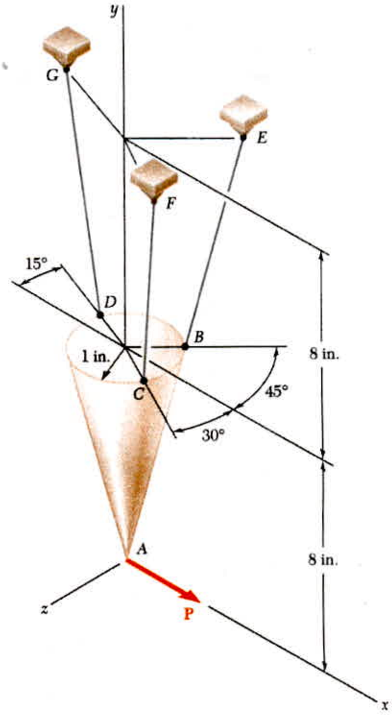
شکل م ۱۰۷.۲ و م ۱۰۸.۲

۱۱۰.۲ بار الوار را با استفاده از یک قلاب سه شاخه بالا می‌برند. می‌دانیم که در لحظه نشان داده شده الوار ساکن و کشش در شاخه AD برابر ۲۲۰ lb است. وزن الوار را حساب کنید.



شکل م ۱۰۹.۲ و م ۱۱۰.۲

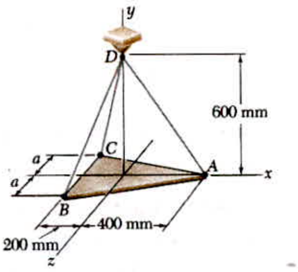
۱۱۱.۲ نیروی P مطابق شکل بر یک مخروط یکنواخت وارد می‌شود که توسط سه طناب نگهداری می‌شود. خطوط اثر طنابها از رأس A مخروط می‌گذرند. اگر $P = 0$ و کشش در طناب BE برابر ۰٫۲ lb باشد، مطلوب است وزن W مخروط.



شکل م ۱۱۱.۲ و م ۱۱۲.۲

۱۱۲.۲ نیروی P مطابق شکل بر یک مخروط یکنواخت وارد می‌شود که توسط سه طناب نگهداری می‌گردد. خطوط اثر طنابها از میان رأس مخروط می‌گذرد. می‌دانیم که وزن مخروط ۱٫۶ lb است. معین کنید حدود مقادیر P را برای اینکه طناب CF کشیده و سخت باشد.

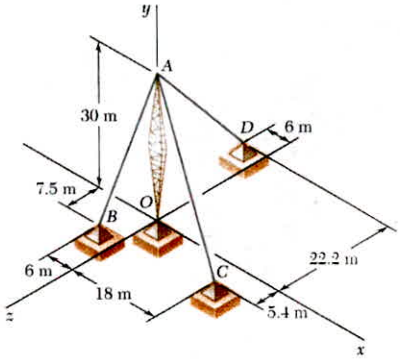
۱۱۳.۲ صفحه مثلثی ۱۶-kg مطابق شکل توسط سه سیم نگهداری می‌شود. می‌دانیم که $a = 150$ mm، معین کنید کشش در هر سیم را.



شکل م ۱۱۳.۲ و م ۱۱۴.۲

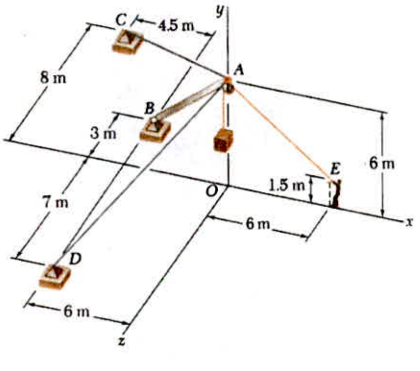
۱۱۴.۲ صفحه مثلث شکل ۱۶-kg مطابق شکل توسط سه سیم آویزان است. می‌دانیم که $a = 200$ mm است. کشش در هر سیم را به‌دست آورید.

۱۱۵.۲ دکل انتقال نیرو توسط سه سیم که به یک پین در نقطه A متصل شده و در نقاط B، C، و D با پیچ و مهره محکم شده است، نگهداری می‌شود. می‌دانیم که برج نیروی ۸-kN عمودی به‌طرف بالابر بر نقطه A وارد می‌کند. کشش در هر سیم را به‌دست آورید.



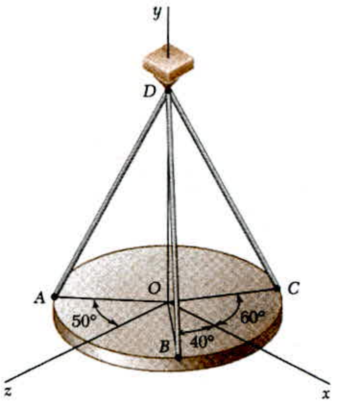
شکل م ۱۱۵.۲

۱۱۶.۲ تیر جرثقیل توسط کابلهای AC و AD مهار شده است. کارگری قطعه ۲۰-kg را با کشش روی یک طناب داخل قرقره در A می‌گذراند. می‌دانیم که تیر AB نیرویی در A که راستای آن از B به A است وارد می‌کند. این نیرو و نیرویی که بر هر دو کابل وارد می‌شود را به‌دست آورید.



شکل م ۱۱۶.۲

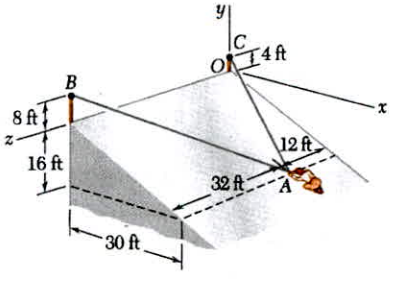
۱۱۷.۲ صفحه افقی دایروی به وزن ۶۲ lb مطابق شکل آویزان شده است و با سه سیم که به تکیه‌گاه D متصل است و با خط قائم زاویه‌های ۳۰° تشکیل می‌دهد. معین کنید کشش در هر سیم را.



شکل م ۱۱۷.۲

۱۱۸.۲ برای مخروط مسئله ۱۱۲.۲ معین کنید گستره مقادیر P را برای اینکه طناب DG کشیده و سفت باشد و $\mathbf{P}$ در جهت $x-$ امتداد یابد

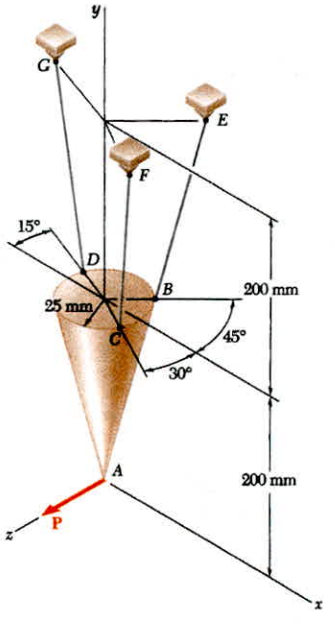
۱۱۹.۲ در حالت سخت و پرزحمتی برای حرکت در سطح یخی لغزنده شخصی به وزن ۱۷۵lb با استفاده از دو طناب AB و AC حرکت می‌کند. می‌دانیم که نیروی وارد بر شخص توسط سطح یخ عمود بر آن سطح است. معین کنید کشش در هر طناب را.



شکل م ۱۱۹.۲

۱۲۰.۲ مسئله ۱۱۹.۲ را با این فرض حل کنید که دوستی با یاری رساندن در A با کششی به نیروی $\mathbf{P} = -(۴۵\,\text{lb})\mathbf{k}$ بر شخص وارد می‌کند.

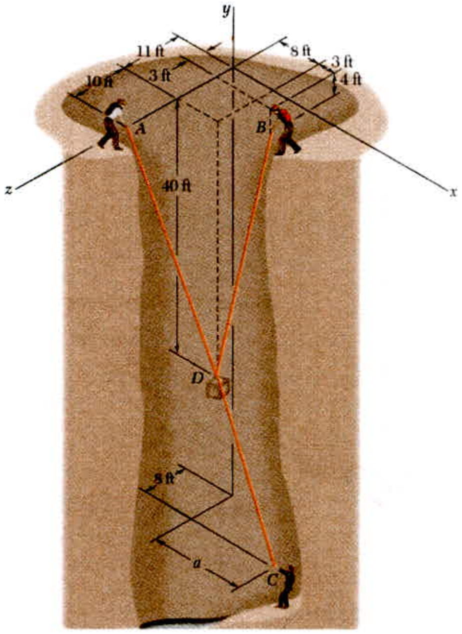
۱۲۱.۲ نیروی $\mathbf{P}$ مطابق شکل بر مخروط یکنواخت که توسط سه طناب نگهداری می‌شود، وارد می‌گردد. خطوط اثر طنابها از رأس A مخروط می‌گذرد. می‌دانیم که وزن مخروط ۱۰٫۵ N و $P = ۰$، است. کشش در هر طناب را به‌دست آورید.



شکل م ۱۲۱.۲ و م ۱۲۲.۲

۱۲۲.۲ نیروی P مطابق شکل بر مخروط یکنواخت که توسط سه طناب نگهداری می‌شود، وارد می‌گردد. خطوط اثر طنابها از رأس A مخروط می‌گذرد. می‌دانیم که وزن مخروط ۱۰٫۵ N و $P = ۰٫۵\,\text{N}$ است. کشش در هر طناب را به‌دست آورید.

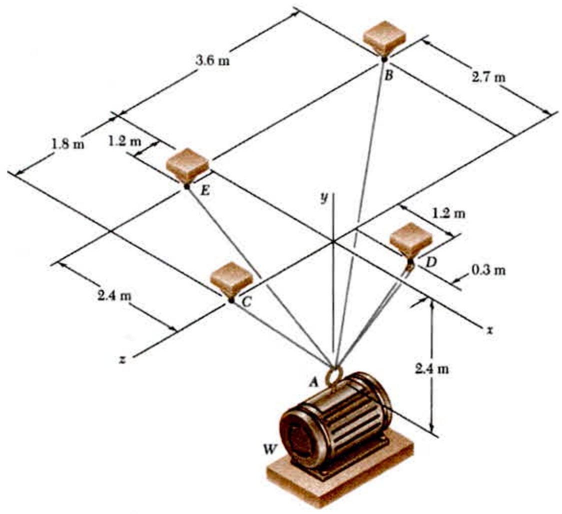
۱۲۳.۲ برای کاهش کوله‌پشتی به وزن W در نقطه C، گردش کنندگان در A و B طناب ADB را در داخل حلقه مستقل به کوله‌بار در نقطه D عبور داده‌اند. گردش کننده در نقطه C به طول ۶۴ ft زیر A هدایت کننده کوله‌بار بوده و کشش در طناب CD برابر ۱۷ lb است. معین کنید کشش در طناب ADB و وزن کوله‌بار را. (**راهنمایی:** کشش در هر دو قسمت طناب ADB یکسان است.)



شکل م ۱۲۳.۲ و م ۱۲۴.۲

۱۲۴.۲ برای کاهش کوله‌پشتی به وزن W در نقطهٔ C، گردش کنندگان در A و B طناب ADB از داخل یک حلقه عبور داده‌اند که به طناب دیگر CD متصل است. می‌دانیم که $W = ۱۲۰\ \text{lb}$ و اینکه در لحظه نشان داده شده کوله‌بار ساکن است. معین کنید کشش در هر طناب. (**راهنمایی:** کشش در دو قسمت طناب ADB یکسان است)

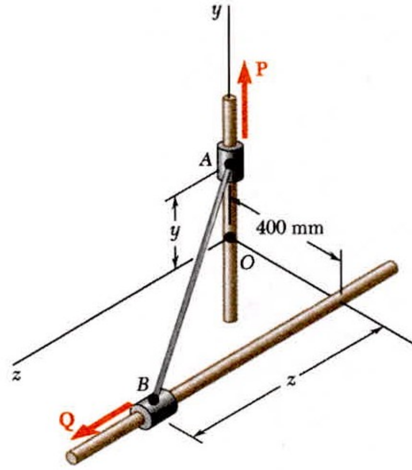
۱۲۵.۲ قطعه‌ای از ماشین به وزن W موقتاً توسط کابلهای AB، AC و ADE نگهداری می‌شود. کابل ADE به حلقه A متصل است و از روی قرقره D می‌گذرد و دوباره به حلقه برمی‌گردد و به تکیه‌گاه E متصل می‌شود. می‌دانیم که $W = ۱۴۰۰\ \text{N}$. مطلوب است کشش در هر کابل. (**راهنمایی**، کشش در تمام قسمتهای کابل ADE یکسان‌اند.)



شکل م ۱۲۵.۲ و م ۱۲۶.۲

۱۲۶.۲ قطعه‌ای از ماشین به وزن W موقتاً توسط کابلهای AB، AC، و ADE تحمل می‌شود. کابل ADE متصل به حلقه A که از روی قرقره D می‌گذرد دوباره به حلقه برمی‌گردد و به تکیه‌گاه در نقطه E متصل می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر ۳۰۰ N است. معین کنید (الف) کشش در AC، (ب) کشش در ADE، (ج) وزن W. (**راهنمایی:** کشش در تمام قسمتهای کابل ADE یکسان‌اند.)

۱۲۷.۲ طوقه‌های A و B به سیمی به طول ۱ m متصل‌اند و می‌توانند آزادانه روی میله‌های بدون اصطکاک بلغزند. اگر نیروی $\mathbf{P} = (۶۸۰ \text{ N})\mathbf{j}$ در نقطه A وارد شود، معین کنید (الف) کشش در سیم را در حالتی که $y = ۳۰۰$ mm است. (ب) بزرگی Q لازم را برای اینکه سیستم به حال تعادل باقی بماند.



شکل م ۱۲۷.۲

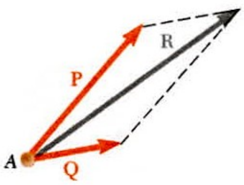
۱۲۸.۲ مسئله ۱۲۷.۲ را با فرض اینکه $y = ۵۵۰$ mm باشد حل کنید.

دوره و خلاصه فصل ۲

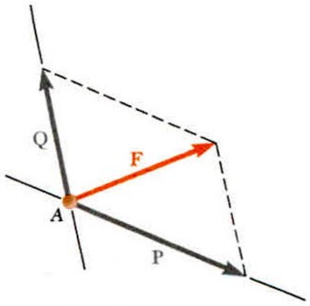
در این فصل اثر نیروها بر روی ذره‌ها را مطالعه کردیم، یعنی اجسامی را در نظر گرفتیم که به خاطر شکل و اندازه‌شان می‌توانستیم فرض کنیم که همهٔ نیروهای وارد بر آنها به یک نقطه وارد می‌شوند.

نیروها کمیتهای برداری‌اند؛ و با نقطهٔ اثر، بزرگی و راستاهاشان مشخص می‌شوند و طبق قانون متوازی‌الاضلاع با هم جمع می‌شوند (شکل ۳۵.۲). بزرگی و راستای برایند دو نیروی **P** و **Q** را می‌شود به طریق ترسیمی و یا مثلثاتی ــ با استفاده از قانون کسینوسها و قانون سینوسها ــ تعیین کرد [مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۲].

هر نیرویی را که به یک ذره اثر می‌کند می‌توانیم به دو یا چند مؤلفه تجزیه کنیم، یعنی می‌توانیم به جای آن دو یا چند نیروی دیگر قرار بدهیم که همان اثر را بر روی ذره دارند. یک نیروی **F** را می‌توانیم با رسم متوازی‌الاضلاعی که **F** قطر آن باشد به دو مؤلفهٔ **P** و **Q** تجزیه کنیم؛ در این صورت دو مؤلفهٔ **P** و **Q** دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع‌اند (شکل ۳۶.۲) و می‌توانیم آنها را به روش ترسیمی یا مثلثاتی تعیین کنیم [بخش ۶.۲].



شکل ۳۵.۲



شکل ۳۶.۲

اگر مؤلفه‌های $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ عمود بر هم و در امتداد محورهای مختصات باشند، می‌گویند که نیروی **F** به دو مؤلفهٔ قائم تجزیه شده است (شکل ۳۷.۲). با معرفی بردارهای یکهٔ **i** و **j** به‌ترتیب در امتداد محورهای x و y، می‌نویسیم [بخش ۷.۲]

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \qquad (۶.۲)$$

و

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \qquad (۷.۲)$$

که F_x و F_y مؤلفه‌های اسکالر **F** هستند. این مؤلفه‌ها، که می‌توانند مثبت یا منفی باشند، با رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\sin\theta \qquad (۸.۲)$$

وقتی مؤلفه‌های قائم F_x و F_y نیروی **F** معلوم باشند، زاویهٔ θ که راستای نیرو را مشخص می‌کند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \qquad (۹.۲)$$

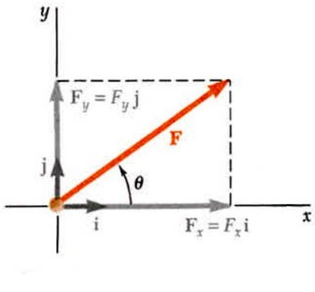
بزرگی نیروی F را می‌شود با حل یکی از معادله‌های (۸.۲) برحسب F، یا با به‌کاربردن قضیهٔ فیثاغورث و نوشتن رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad (۱۰.۲)$$

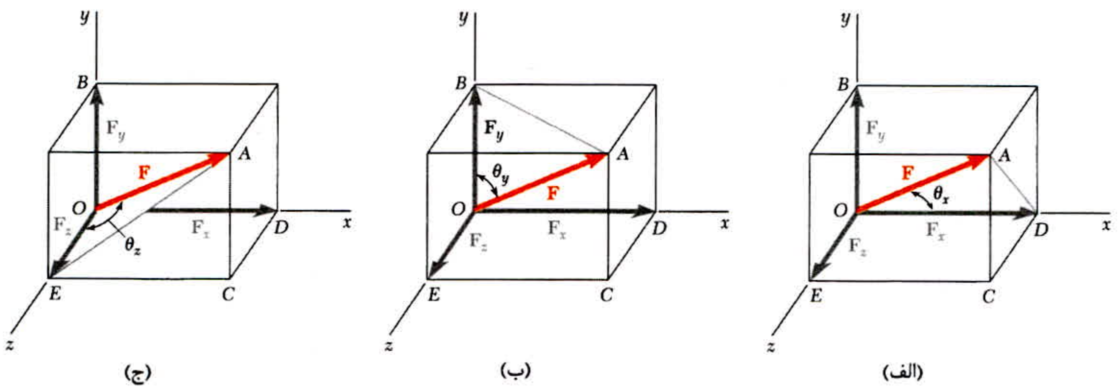
وقتی سه یا چند نیروی هم‌صفحه به ذره‌ای وارد می‌شوند، مؤلفه‌های قائم برایندشان، R، را می‌شود از جمع جبری مؤلفه‌های متناظر نیروهای مفروض به‌دست آورد [بخش ۸.۲]. داریم

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad (۱۳.۲)$$

بزرگی و راستای R را می‌شود از رابطه‌هایی نظیر معادله‌های (۹.۲) و (۱۰.۲) به‌دست آورد [مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۲].



شکل ۳۷.۲



شکل ۳۸.۲

نیروی **F** در فضای سه‌بعدی را می‌شود به مؤلفه‌های قائم $\mathbf{F}_x$، $\mathbf{F}_y$، و $\mathbf{F}_z$ [بخش ۱۲.۲] تجزیه کرد. اگر زوایایی را که **F** با محورهای x، y، و z تشکیل می‌دهد به‌ترتیب θ_x، θ_y، و θ_z نشان بدهیم، (شکل ۳۸.۲)، خواهیم داشت

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z \qquad (۱۹.۲)$$

سینوسهای θ_x ، θ_y ، و θ_z را کسینوس‌های هادی نیروی **F** می‌گویند. با معرفی دارهای یکهٔ **i**، **j**، و **k** در امتداد محورهای مختصات، می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (۲۰.۲)$$

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \qquad (۲۱.۲)$$

، نشان می‌دهد (شکل ۳۹.۲ **F**) برابر با حاصلضرب بزرگی **F** و بردار یکهٔ

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}$$

ست. از آنجا که بزرگی $\boldsymbol{\lambda}$ برابر با یک است، باید داشته باشیم

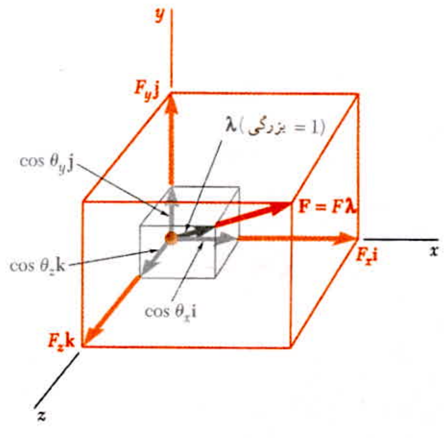
$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \qquad (۲۴.۲)$$

وقتی مؤلفه‌های قائم F_x ، F_y ، و F_z نیروی **F** معلوم باشند، بزرگی F از رابطه یر به‌دست می‌آید:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (۱۸.۲)$$

ر کسینوس‌های هادی **F** از معادله‌های (۱۹.۲) به‌دست می‌آیند. داریم

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \qquad (۲۵.۲)$$



شکل ۳۹.۲

وقتی نیروی **F** در فضای سه‌بعدی توسط بزرگی‌اش F و دو نقطهٔ M و N روی خط اثرش تعریف شده باشد [بخش ۱۳.۲] مؤلفه‌های قائم آن را می‌توان چنین به‌دست آورد: ابتدا بردار $\overrightarrow{MN}$ را که از اتصال نقطه‌های M و N به‌دست می‌آید، برحسب مؤلفه‌های d_x، d_y، و d_z بیان می‌کنیم (شکل ۴۰.۲)؛ می‌نویسیم

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \qquad (۲۶.۲)$$

سپس بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ را در امتداد خط اثر **F**، با تقسیم $\overrightarrow{MN}$ بر بزرگی‌اش $MN = d$ تعیین می‌کنیم:

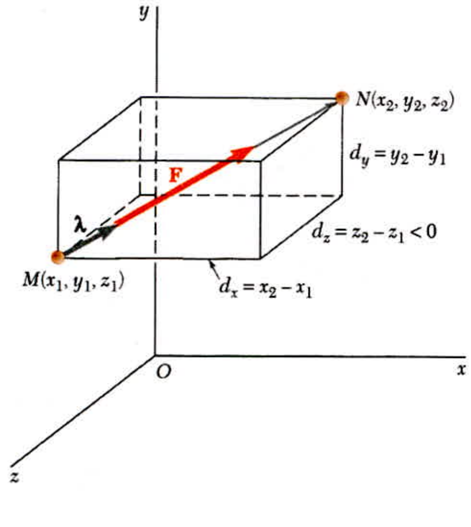
$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (۲۷.۲)$$

نظر به اینکه **F** برابر با حاصلضرب F و $\boldsymbol{\lambda}$ است، داریم

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (۲۸.۲)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که [مسئله‌های نمونهٔ ۷.۲ و ۸.۲] مؤلفه‌های اسکالر **F** به‌ترتیب برابرند با

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \qquad (۲۹.۲)$$



شکل ۴۰.۲

وقتی دو یا چند نیرو بر ذره‌ای در فضای سه‌بعدی وارد می‌شوند، مؤلفه‌های قائم برایندشان، $\mathbf{R}$، را می‌شود با جمع جبری مؤلفه‌های متناظر نیروهای مفروض به‌دست آورد [بخش ۱۴.۲]. داریم

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \tag{۳۱.۲}$$

بزرگی و راستای $\mathbf{R}$ را می‌شود از رابطه‌هایی نظیر معادله‌های (۱۸.۲) و (۲۵.۲) به‌دست آورد [مسئلهٔ نمونه ۸.۲].

ذره‌ای را در حال تعادل می‌گویند که برایند تمامی نیروهای وارد بر آن صفر باشد [بخش ۹.۲]. در این صورت ذره در حال سکون باقی خواهد ماند (اگر ابتدا در حال سکون بوده باشد)، یا با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت خواهد کرد (اگر از ابتدا در حرکت بوده باشد) [بخش ۱۰.۲].

برای حل یک مسئلهٔ مربوط به ذره در حال تعادل، ابتدا باید نمودار جسم آزاد ذره را که نشان‌دهندهٔ تمامی نیروهای وارد بر آن است رسم کرد [بخش ۱۱.۲]. اگر تنها سه نیروی هم‌صفحه بر ذره وارد شود، برای بیان تعادل ذره می‌توان مثلث نیروها را رسم کرد. این مثلث را می‌توان به‌روش ترسیم مثلثاتی حل کرد، به شرط آنکه بیش از دو مجهول درکار نباشد [مسئله نمونهٔ ۴.۲]. اگر بیش از سه نیروی هم‌صفحه داشته باشیم باید معادله‌های تعادل

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \tag{۱۵.۲}$$

را به کار برد، به شرط آنکه بیش از دو مجهول درکار نباشد [مسئله نمونهٔ ۶.۲].

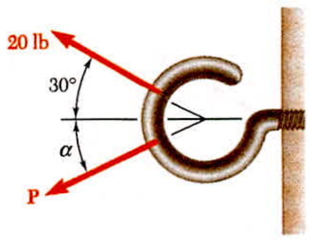
وقتی ذره‌ای در وضعیت تعادل در فضای سه‌بعدی است [بخش ۱۵.۲]، باید سه معادلهٔ تعادل

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \qquad \Sigma F_z = ۰ \tag{۳۴.۲}$$

را به‌کار برد؛ این معادله‌ها را با بیش از سه مجهول نمی‌شود حل کرد [مسئلهٔ نمونهٔ ۹.۲].

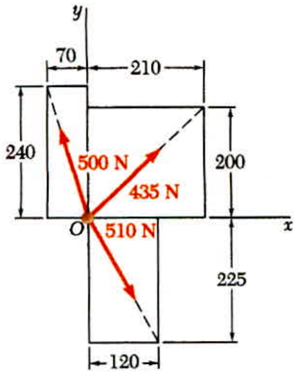
مسئله‌های دوره‌ای

۱۲۹.۲ دو نیرو مطابق شکل بر حلقه تکیه‌گاه وارد می‌شوند. با استفاده از روش مثلثاتی و دانستن اینکه بزرگی نیروی $\mathbf{P}$ برابر ۱۴ lb است، مطلوب است (الف) زاویه لازم α، اگر برایند $\mathbf{R}$ دو نیروی وارد شده بر تکیه‌گاه افقی باشد. (ب) مقدار متناظر $\mathbf{R}$.



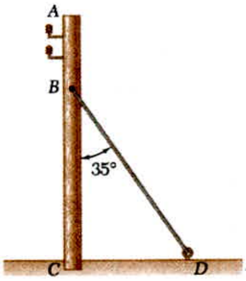
شکل م ۱۲۹.۲

۱۳۰.۲ مؤلفه‌های x و y هر یک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.



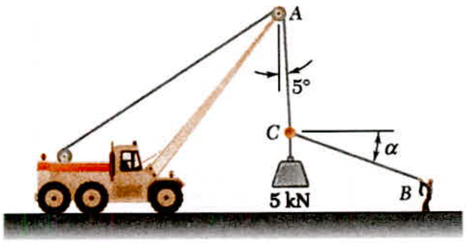
شکل م ۱۳۰.۲

۱۳۱.۲ سیم مهار BD بر تیر تلفن AC نیروی $\mathbf{P}$ در امتداد BD را وارد می‌کند. می‌دانیم که $\mathbf{P}$ دارای مولفه ۴۵۰-N در امتداد AC است. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی $\mathbf{P}$، (ب) مؤلفه‌های در راستای قائم با AC را.



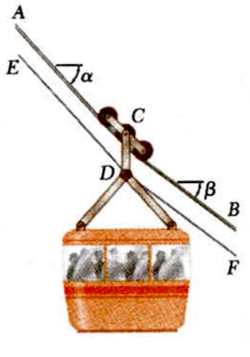
شکل م ۱۳۱.۲

۱۳۲.۲ می‌دانیم که $\alpha = ۲۵°$، مطلوب است کشش (الف) درکابل AC، (ب) در طناب BC.



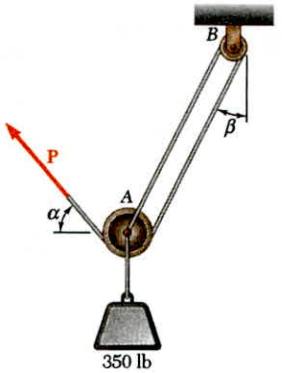
شکل م ۱۳۲.۲

۱۳۳.۲ کابین یک واگن هوایی از یک چرخ که می‌تواند آزادانه روی کابل ACB متکی باشد و با سرعت ثابت توسط کابل DE بغلطد. اگر $\alpha = ۴۲°$ و $\beta = ۳۲°$ باشد و کشش کابل DE برابر ۲۰ kN باشد و از کشش درکابل DF صرف‌نظر شود، معین کنید (الف) وزن کابل واگن، تکیه‌گاه سیستم آن، و مسافران، (ب) کشش در تکیه‌گاه کابل ACB.



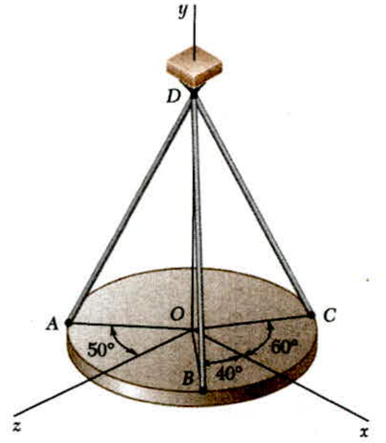
شکل م ۱۳۳.۲

۱۳۴.۲ بار lb- ۳۵۰ توسط طناب و قرقره با آرایش نشان داده شده حمل می‌شود. می‌دانیم که $\beta = ۲۵°$، معین کنید بزرگی و راستای نیروی $\mathbf{P}$ که می‌تواند بر سرهای آزاد طناب وارد کند تا تعادل برقرار شود. (مسئله ۶۸.۲ را ببینید)



شکل م ۱۳۴.۲

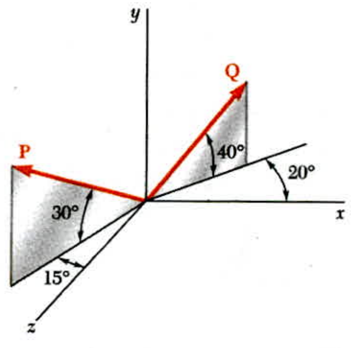
۱۳۵.۲ صفحه افقی دایروی که مطابق شکل با سه سیم به تکیه‌گاه D متصل و با راستای قائم زاویه ۳۰° می‌سازد، آویزان شده است. می‌دانیم که مولفه x نیروی وارد شده توسط سیم AD روی صفحه ۲۲۰٫۶ N است. معین کنید (الف) کشش در سیم AD، (ب) زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z که نیروی وارد شده در A با محور مختصات تشکیل می‌دهد.



شکل م ۱۳۵.۲

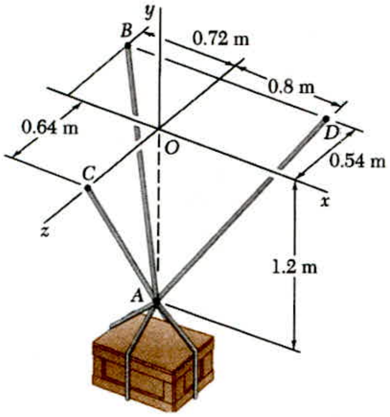
۱۳۶. نیروی $\mathbf{F}$ به بزرگی ۶۰۰ lb در مبدأ مختصات وارد می‌شود. می‌دانیم که $F_x = ۲۰۰$ lb، $\theta_z = ۱۳۶٫۸°$، و $F_y < ۰$. مطلوب است (الف) مؤلفه‌های F_y و F_z، (ب) زاویه‌های θ_x و θ_y.

۱۳۷. بزرگی و راستای برایند دو نیروی نشان داده شده را به‌دست آورید. می‌دانیم که $P = ۵۰۰$ lb و $Q = ۶۰۰$ lb است.



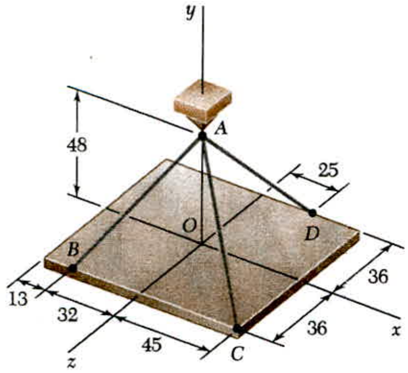
شکل م ۱۳۷.۲

۱۳۸.۲ صندوق نشان داده شده با سه کابل حمل می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر ۳ kN است. وزن صندوق را به‌دست آورید.



شکل م ۱۳۸.۲

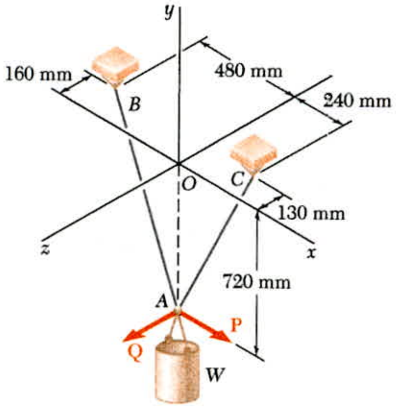
۱۳۹.۲ صفحه مستطیلی با سه کابل نشان داده شده آویزان می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AD برابر ۱۲۰ lb است. معین کنید وزن صفحه را.



ابعاد برحسب اینچ

شکل م ۱۳۹.۲

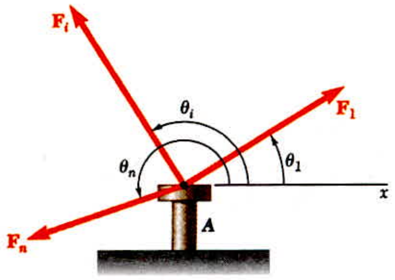
۱۴۰.۲ کانتینری به وزن W از حلقه A آویزان است. کابل BAC از داخل حلقه گذشته و به تکیه‌گاههایی ثابت در B و C متصل است. نیروهای $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ و $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ برای نگهداری کانتینر در وضعیت نشان داده شده بر حلقه وارد می‌شوند. می‌دانیم که $W = ۱۲۰۰$ N است. مطلوب است P و Q. (**راهنمایی:** کشش در هر دو قسمت کابل BAC یکسان‌اند.)



شکل م ۱۴۰.۲

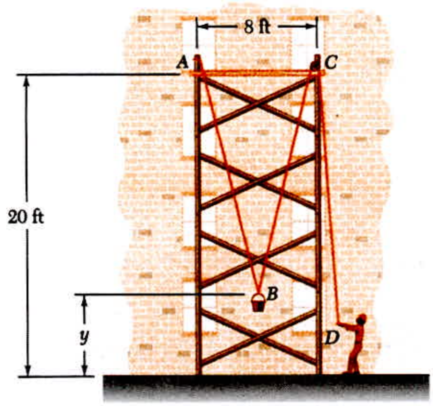
مسئله‌های کامپیوتری

۲.ک ۱ با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی، بزرگی و راستای برایند n نیروهای همصفحه وارد بر نقطه A را محاسبه کنید. از این برنامه برای حل مسئله‌های ۳۱.۲، ۳۲.۲، ۳۳.۲، و ۳۴.۲ استفاده کنید.



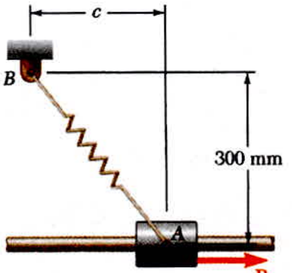
شکل م ۲.ک۱

۲.ک ۲ کارگری می‌خواهد برای بالا بردن سطل رنگ ۵ گالنی به وزن ۶۰ lb طراحی کند. به همین منظور طنابی را در نقطه A به داربست می‌بندد. سپس طناب را در نقطه B از درون سطل و از روی قرقره C می‌گذراند. (الف) کشش طناب را برحسب تابعی از ارتفاع y برای $۲ \text{ ft} \leq y \leq ۱۸ \text{ ft}$ رسم کنید. (ب) طرح کارگر را ارزیابی کنید.



شکل م ۲.ک۲

۲.ک ۳ طوقه A می‌تواند مطابق شکل آزادانه روی میله افقی بدون اصطکاک بلغزد. فنر متصل به طوقه دارای ضریب ثابت k است و وقتی طوقه زیرتکیه‌گاه قرار دارد در حالت آزاد است. بزرگی نیروی **P** لازم برای حفظ تعادل سیستم برحسب k و فاصله c را بیان کنید. P را برحسب تابعی از c به‌ازای مقادیر c از صفر تا ۶۰۰ mm را در حالتهای زیر رسم کنید: (الف) $k = ۲ \text{ N/mm}$، (ب) $k = ۳ \text{ N/mm}$، (ج) $k = ۴ \text{ N/mm}$.



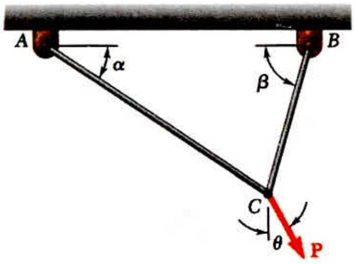
شکل م ۲.ک۳

۲.ک ۴ بار **P** مطابق شکل توسط دو کابل نگهداری می‌شود. با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی کشش در هر کابل را برحسب تابعی از P به‌دست آورید. برای سه مجموعه زیر مقادیر عددی به‌دست آورید. کشش‌های به‌ازای مقادیر θ از $\theta_1 = \beta - ۹۰°$ تا $\theta_2 = ۹۰°$ را رسم کنید و سپس از طریق رسم (الف) مقدار θ را برای وقتی که کشش در دو کابل تا حد امکان کوچک باشد، (ب) مقدار متناظر کشش را.

(۱) $\alpha = ۳۵°$، $\beta = ۷۵°$، $P = ۱٫۶ \text{ kN}$

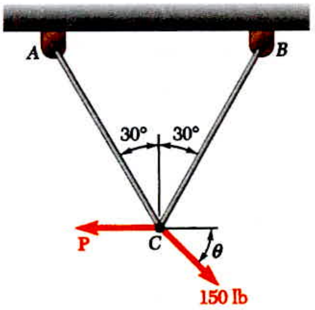
(۲) $\alpha = ۵۰°$، $\beta = ۳۰°$، $P = ۲٫۴ \text{ kN}$

(۳) $\alpha = ۴۰°$، $\beta = ۶۰°$، $P = ۱٫۰ \text{ kN}$



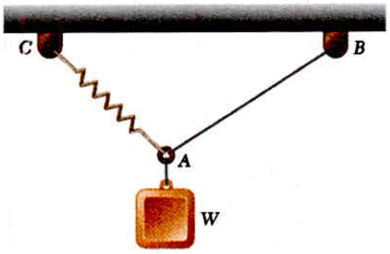
شکل م ۲.ک۴

۲.ک ۵ کابلهای AC و BC در نقطه C به هم وصل و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. می‌دانیم که $P = ۱۰۰ \text{ lb}$ است، (الف) کشش هر کابل را برحسب تابعی از θ بنویسید. (ب) کشش در هر کابل را به‌ازای $۰ \leq \theta \leq ۹۰°$ رسم کنید. (ج) از رسم به‌دست آمده در قسمت (الف) کمترین مقدار θ را برای اینکه هر دو کابل در حالت کشیده باشند به‌دست آورید.



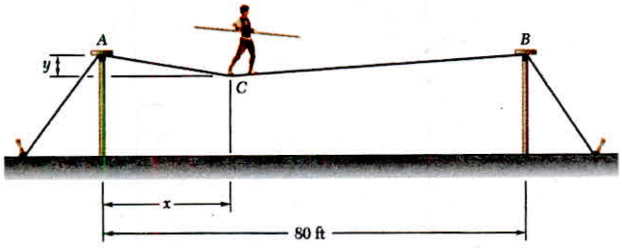
شکل م ۲.ک۵

۲.ک ۶ ظرفی به وزن W از حلقه A که به آن کابل AB به‌طول ۵ m و فنر AC متصل است، آویزان کرده‌ایم. ثابت فنر ۱۰۰ N/m و طول آزاد آن ۳ m است. کشش کابل را وقتی (الف) $W = ۱۲۰ \text{ N}$، (ب) $W = ۱۶۰ \text{ N}$ باشد به‌دست آورید.



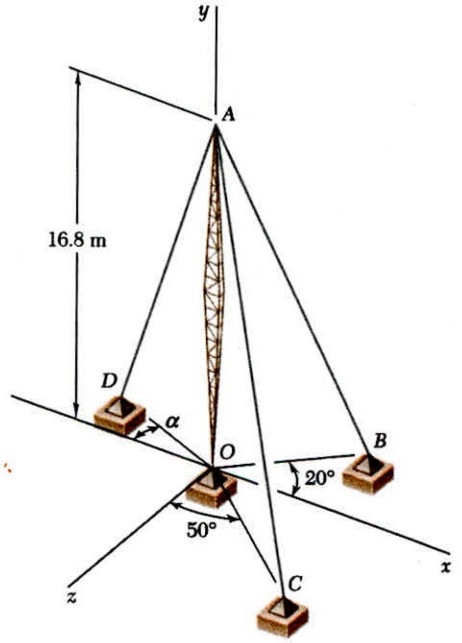
شکل م ۲.ک۶

۲.ک ۷ بندبازی روی طناب کشیده‌ای به طول $L = ۸۰٫۳ \text{ ft}$ که به تکیه‌گاههای A و B متصل است راه می‌رود. فاصله دو تکیه‌گاه ۸۰٫۰ ft است. وزن بندباز و میله روی هم ۲۰۰ lb و اصطکاک بین کفشهای بندباز و طناب به‌اندازه‌ای است که از لغزش جلوگیری کند. از وزن طناب و هرگونه تغییر شکل کشسانی صرفنظر کنید. با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی تغییر مکان y و کشش در قسمتهای AC و BC طناب برای اندازه‌های x از ۰٫۵ ft تا ۴۰ ft با افزایش رشد ۰٫۵ ft را به‌دست آورید. از نتایج به‌دست آمده مطلوب است (الف) حداکثر خیز طناب، (ب) حداکثر کشش طناب، (ج) حداقل کشش در قسمتهای AC و BC طناب.



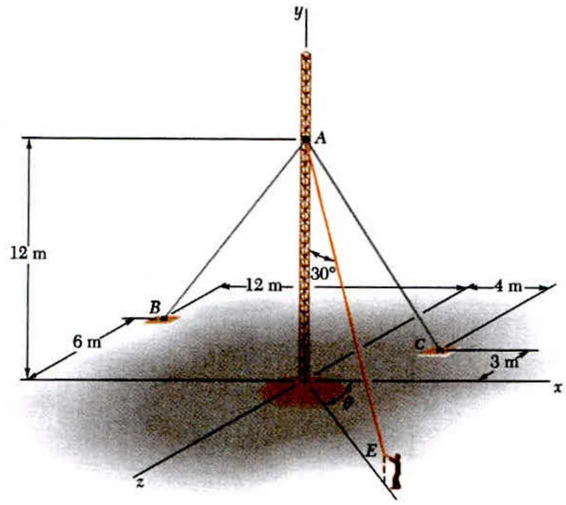
شکل م ۲.ک۷

[illegible]۸ دکل انتقال نیرو نشان داده شده در شکل به پین A متصل است و در نقاط B، C و [illegible] مهار شده است. طول کابل AD برابر ۲۱ m و کشش آن ۲۰ kN است. (الف) مؤلفه‌های x، y، و z نیروی وارد شده توسط کابل AD بر نقطه D و زاویه‌های متناظر θ_x، θ_y، و θ_z را بر[illegible]سب زاویه α به‌دست آورید. (ب) مؤلفه‌های این نیرو و زاویه‌های θ_x، θ_y، و θ_z را به‌ازای ۰ $\leq \alpha \leq$ [illegible] رسم کنید.



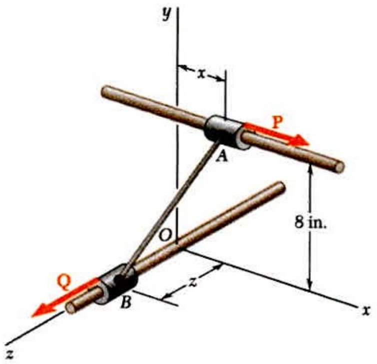
شکل م ۲.ک۸

[illegible]۹ دکلی با کابلهای AB و AC مهار شده است. کارگری طنابی به طول ۱۲ m را در A به دکل بسته است و نیروی ثابت ۱۶۰ N را بر طناب وارد می‌کند. (الف) کشش در [illegible]ابل را برحسب تابعی از θ به‌دست آورید. می‌دانیم که برایند کشش در کابلها و طناب به سمت پایین است. (ب) کشش در هر کابل را برحسب تابعی از θ برای ۰ $\leq \theta \leq$ ۱۸۰° رسم [illegible] و از این رسم، گستره مقادیر θ را که به‌ازای آن هر دو کابل کشیده شده‌اند به‌دست آورید.



شکل م ۲.ک۹

۲.ک ۱۰ طوقه‌های A و B با سیمی به طول ۱۰ in به هم متصل‌اند و می‌توانند آزادانه روی میله‌ای بدون اصطکاک بلغزند. اگر نیروی **Q** مطابق شکل برابر ۲۰ lb بر طوقه B وارد شود، کشش سیم و بزرگی متناظر نیروی **P** لازم برای ماندن در تعادل را به‌دست آورید. کشش در سیم و بزرگی نیروی **P** را برای ۵ $\leq x \leq$ ۰ رسم کنید.



شکل م ۲.ک۱۰

فصل ۳

اجسام صلب:
سیستم نیروهای معادل

در این فصل نشان می‌دهیم که نیروهای ناهمرس وارد بر بادبان کشتی را می‌توان با سیستم معادل جایگزین کرد.

اجسام صلب: سیستم نیروهای معادل

۱.۳ مقدمه
۲.۳ نیروهای خارجی و نیروهای داخلی
۳.۳ اصل قابلیت انتقال. نیروهای معادل
۴.۳ ضرب برداری دو بردار
۵.۳ حاصلضرب برداری برحسب مؤلفه‌های قائم
۶.۳ گشتاور نیروی حول یک نقطه
۷.۳ قضیه وارینون
۸.۳ مؤلفه‌های قائم گشتاور یک نیرو
۹.۳ ضرب اسکالر دو بردار
۱۰.۳ ضرب سه‌گانه مختلط سه بردار
۱۱.۳ گشتاور یک نیرو حول محور معین
۱۲.۳ گشتاور کوپل
۱۳.۳ کوپلهای معادل
۱۴.۳ جمع‌بستن کوپلها
۱۵.۳ کوپلها را می‌توان با بردار نمایش داد
۱۶.۳ تجزیه یک نیروی معین به یک نیرو در نقطهٔ O و یک کوپل
۱۷.۳ تبدیل سیستم نیروها به یک نیرو و یک کوپل
۱۸.۳ سیستم نیروهای معادل
۱۹.۳ سیستم بردارهای هم‌سنگ
۲۰.۳ بیشتر خلاصه کردن سیستم نیروها
۲۱.۳ خلاصه‌کردن سیستم نیروها به یک رنچ

۱.۳ مقدمه

در فصل گذشته فرض کردیم که اجسام مورد نظرمان را می‌توانیم ذره تلقی کنیم. اما چنین فرضی همیشه امکانپذیر نیست و عموماً باید جسم را به‌صورت مجموعهٔ ذرات در نظر بگیریم. باید اندازهٔ جسم را به‌حساب آوریم و این نکته را هم در نظر بگیریم که نیروها به ذره‌های مختلف وارد می‌شوند و بنابراین نقطه اثرهای متفاوتی دارند.

بیشتر اجسامی که در مکانیک مقدماتی با آنها مواجه می‌شویم صلب فرض می‌شوند. اگر جسمی تغییر شکل ندهد جسم صلب نامیده می‌شود. اما سازه‌ها و ماشینهای واقعی هرگز به طور مطلق صلب نیستند و در اثر بارهایی که به آنها وارد می‌شود، تغییر شکل می‌دهند. اما این تغییر شکلها معمولاً کوچک‌اند و اثر قابل ملاحظه‌ای روی شرایط تعادل یا حرکت سازهٔ مورد نظر نمی‌گذارند. با این حال، هر وقت که مقاومت سازه تا حد مورد نظر باشد، این نیروها مهم‌اند و در مطالعهٔ مکانیک مواد (مقاومت مصالح) به حساب خواهند آمد.

در این فصل می‌خواهیم تأثیر نیروها بر روی اجسام صلب را مطالعه کنیم و ببینیم که چگونه می‌شود یک سیستم از نیروهای معین را به یک سیستم معادل ساده‌تر تبدیل کرد. تحلیل ما با انتقال دادن، بر این فرض اساسی مبتنی خواهد بود که اگر یک نیرو را در امتداد خط اثرش حرکت بدهیم تغییری در تأثیر آن نیرو برروی یک جسم صلب پیش نمی‌آید (اصل قابلیت انتقال). بنابراین نتیجه می‌شود، چنانکه پیش از این در بخش ۳.۲ متذکر شدیم، در مورد اجسام صلب نیروها را می‌توان با بردارهای لغزان نشان داد.

اثر یک نیرو بر روی جسم صلب دو مفهوم را در برمی‌گیرد که عبارت‌اند از: گشتاور یک نیرو حول یک نقطه (بخش ۶.۳) و گشتاور یک نیرو حول یک محور (بخش ۱۱.۳). از آنجا که تعیین این کمیتها مستلزم محاسبهٔ حاصلضربهای برداری و حاصلضربهای اسکالر دو بردار است، مبانی جبر برداری را در این فصل ارائه می‌کنیم و آنها را ... حل مسئله‌های مربوط به تأثیر نیرو بر روی جسم صلب به‌کار می‌بریم.

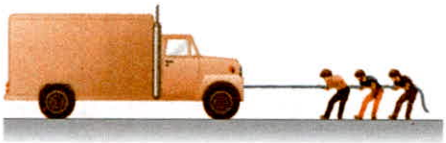
مفهوم دیگری که در این فصل معرفی خواهیم کرد مفهوم کوپل است که ترکیبی است از دو نیرو با بزرگیهای مساوی و خط اثرهای موازی که در خلاف جهت ... باشند (بخش ۱۲.۳). چنانکه بعداً خواهیم دید، هر سیستم از نیروهای وارد بر ... یک جسم صلب را می‌توان به یک سیستم معادل تبدیل کرد که شامل یک نیرو ... یک نقطهٔ معین و یک کوپل باشد. این سیستم را سیستم کوپل-نیرو می‌گویند. در ... نیروهای همرس، هم‌صفحه، یا موازی، سیستم کوپل-نیروی معادل را می‌شود از این هم ساده‌تر کرد و آن را به یک تک‌نیرو تبدیل کرد، آن را برایند سیستم نامید، یا به یک تک‌کوپل تبدیل کرد و آن را کوپل برایند سیستم نامید.

۲.۳ نیروهای خارجی و نیروهای داخلی

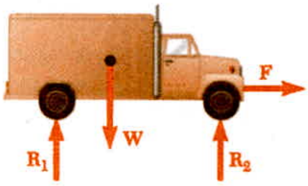
نیروهایی که به اجسام صلب وارد می‌شوند به طور کلی دو دسته‌اند: (۱) نیروهای خارجی، و (۲) نیروهای داخلی.

۱. نیروهای خارجی، نمایندهٔ کنش سایر اجسام بر روی جسم صلب مورد نظ... این نیروها رفتار خارجی جسم صلب را کاملاً توجیه می‌کنند. نیروهای خارجی جسم را یا به حرکت در می‌آورند و یا آن را همچنان ساکن نگه می‌دارند. در این فصل و فصلهای ۴ و ۵ فقط با نیروهای خارجی سروکار داریم.

۲. نیروهای داخلی، نیروهایی هستند که ذرات تشکیل‌دهندهٔ جسم صلب ... کنار هم نگه می‌دارند. اگر جسم صلب از لحاظ ساختاری از چند جزء مختلف تش... شده باشد، آن نیروهایی هم که به ماندن این اجزا در کنار هم کمک می‌کنند نیرو... داخلی‌اند. بحث دربارهٔ نیروهای داخلی را به فصلهای ۶ و ۷ موکول می‌کنیم.



شکل ۱.۳



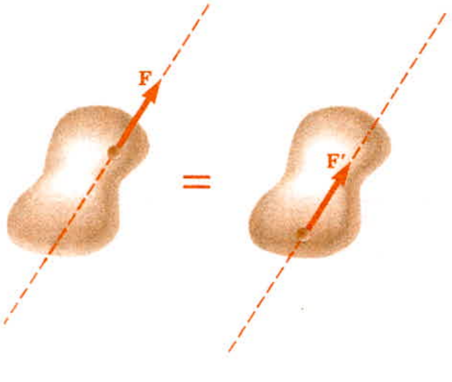
شکل ۲.۳

به‌عنوان مثال، برای نیروهای خارجی، نیروهایی را در نظر بگیرید که به یک کامیون ازکار افتاده وارد می‌شوند و چند نفر آن را توسط طناب متصل به سپر جلوی کامیون می‌کشند (شکل ۱.۳). نیروهای خارجی وارد بر این کامیون را در نمودار جسم آزاد (شکل ۲.۳) می‌بینید. اول از همه وزن کامیون را در نظر می‌گیریم. اگرچه وزن، اثر کشش زمین بر روی همهٔ ذرات تشکیل‌دهندهٔ کامیون است، اما می‌شود آن را با یک نیروی **W** نمایش داد. نقطهٔ اثر این نیرو، یعنی نقطه‌ای که این نیرو به آن وارد می‌شود، بنا به تعریف مرکز گرانی کامیون است. در فصل ۵ روش پیدا کردن مرکز گرانی را مطرح خواهیم کرد. وزن کامیون (**W**) می‌خواهد آن را در امتداد قائم و رو به پایین حرکت دهد، یعنی اگر کامیون بر روی زمین نبود سقوط می‌کرد. در واقع، زمین به وسیلهٔ عکس‌العملهایش ($\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$) با حرکت رو به پایین کامیون مخالفت می‌کند. اینها نیروهایی هستند که زمین به کامیون وارد می‌کند و بنابراین باید جزء نیروهای خارجی وارد به کامیون باشند.

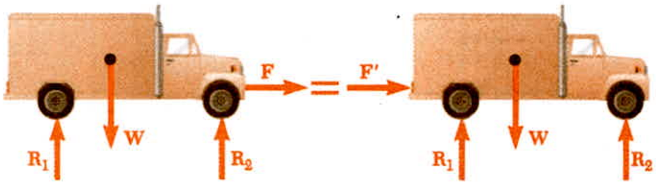
افرادی که کامیون را با طناب می‌کشند نیروی **F** را به آن وارد می‌کنند. نقطهٔ اثر **F** روی سپر جلوی کامیون است. نیروی **F** می‌خواهد کامیون را به جلو، و در امتداد خط راست حرکت دهد و عملاً این کار را هم می‌کند، زیرا هیچ نیروی خارجی‌ای برای مخالفت با این حرکت درکار نیست. (البته به خاطر سهولت از مقاومت غلتشی چرخها صرف‌نظر کرده‌ایم). این حرکت رو به جلوی کامیون را، که در طی آن همهٔ خطوط حرکت موازی هستند (کف کامیون افقی و دیوارهایش در تمام مدت عمودی می‌مانند)، انتقال می‌گویند. نیروهای دیگر ممکن است که حرکتی متفاوت از انتقال ایجاد کنند. مثلاً نیرویی که یک جک واقع در زیر محور چرخهای جلو اعمال می‌کند، باعث می‌شود که کامیون حول محور عقبی‌اش بچرخد. چنین حرکتی را دوران می‌گویند. بنابراین می‌شود نتیجه گرفت که هریک‌از نیروهای خارجی وارد بر یک جسم صلب، اگر با نیروی مخالفی روبه‌رو نشود، می‌تواند به جسم صلب حرکت انتقالی یا دورانی بدهد، و یا اینکه هر دو را ایجاد کند.

۳.۳ اصل قابلیت انتقال. نیروهای معادل

اصل قابلیت انتقال می‌گوید که شرایط تعادل یا حرکت یک جسم صلب بدون تغییر می‌ماند اگر نیروی **F** وارد بر نقطه‌ای مفروض از جسم صلب را توسط نیروی **F′** که مقدار و امتدادی برابر با **F** دارد، اما در نقطه‌ای دیگر وارد می‌شود جایگزین کنیم، به شرط اینکه دو نیرو دارای یک خط اثر باشند (شکل ۳.۳). دو نیروی **F** و **F′** تأثیر یکسانی بر روی جسم صلب می‌گذارند و اصطلاحاً می‌گویند که معادل‌اند. این اصل، که می‌گوید اثر یک نیرو را می‌توان در امتداد خط اثرش منتقل کرد، مبتنی بر شواهد



شکل ۳.۳



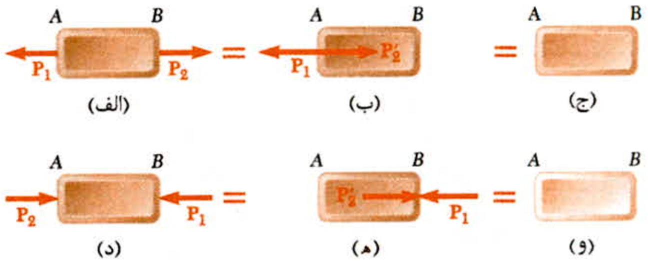
شکل ۴.۳

تجربی است و نمی‌شود آن را از روی خواصی که تا اینجا ثابت کرده‌ایم به‌دست آورد و بنابراین باید آن را به‌منزلهٔ یک قانون تجربی پذیرفت. اما، بعداً در قسمت ۵.۱۶ در درس دینامیک خواهیم دید که همین اصل قابلیت انتقال را می‌شود از مطالعهٔ دینامیک اجسام صلب به‌دست آورد، ولی این مطالعه مستلزم معرفی قوانین دوم و سوم نیوتون و بعضی مفاهیم دیگر است. بنابراین استاتیک اجسام صلب را براساس همان سه اصلی که تا به حال بیان کرده‌ایم، یعنی قانون جمع متوازی‌الاضلاع، قانون اول نیوتون، و اصل قابلیت انتقال، مطالعه می‌کنیم.

در فصل ۲ دیدید که نیروهای وارد بر یک ذره را می‌توان با بردارها نمایش داد. این بردارها نقطه اثر کاملاً معینی داشتند که همان خود ذره بود، و بنابراین بردارهای ثابت یا مقید بودند. اما در مورد نیروهای وارد بر یک جسم صلب، تا وقتی که خط اثر نیرو تغییر نکند، نقطهٔ اثر مهم نیست. پس در مورد اجسام صلب نیروها را باید با نوع دیگری از بردارها نشان داد، که به بردارهای لغزان معروف‌اند، چون مجازند که در امتداد خط اثرشان بلغزند. باید توجه داشته باشید که همهٔ خواصی که در بخشهای آینده برای نیروهای وارد بر یک جسم صلب به‌دست می‌آیند، عموماً برای هر سیستم بردارهای لغزان معتبرند. با وجود این برای اینکه نمایش مطلب شهودی‌تر باشد، آن را برحسب نیروهای فیزیکی بیان می‌کنیم، نه برحسب بردارهای لغزان که صرفاً جنبهٔ ریاضیاتی دارند.

دوباره برمی‌گردیم به مثال کامیون و می‌بینیم که خط اثر نیروی **F** یک خط افقی است که هم از سپر جلو می‌گذرد و هم از سپر عقب (شکل ۴.۳). بنابراین طبق اصل قابلیت انتقال، می‌توانیم **F** را برداریم و به‌جای آن نیروی معادل **F′** را بگذاریم که به سپر عقب وارد می‌شود. به عبارت دیگر، اگر به‌جای کشیدن سپر جلو، سپر عقب را برانیم هیچ تغییری در شرایط حرکت و در سایر نیروهای خارجی وارد بر کامیون (**W**، $\mathbf{R}_1$، $\mathbf{R}_2$) ایجاد نمی‌شود.

اصل قابلیت انتقال ومفهوم نیروهای معادل محدودیتهایی هم دارند. مثلاً در مورد میلهٔ کوتاه AB، فرض می‌کنیم که به آن نیروهای محوری برابر و مخالف $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$، مطابق شکل ۵.۳ (الف)، وارد می‌شوند. بنا به اصل قابلیت انتقال، می‌توان نیروی $\mathbf{P}_2$



شکل ۵.۳

را برداشت و به جای آن نیروی $\mathbf{P}'_2$ را گذاشت که از هر لحاظ شبیه به $\mathbf{P}$ است، منتها به‌جای B به A وارد می‌شود [شکل ۵.۳ (ب)]. نیروهای $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}'_2$ را که به یک ذره وارد می‌شوند، می‌توان طبق قواعد فصل ۲ با هم جمع کرد. به‌دلیل مساوی و مختلف‌الجهت بودن مجموعشان صفر می‌شود. پس از لحاظ رفتار خارجی میله، سیستم اصلی نیروهایی که در شکل ۵.۳ (الف) می‌بینید معادل این است که انگار هیچ نیرویی درکار نیست [شکل ۵.۳ (ج)].

حال میلهٔ AB و نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت، $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ وارد بر آن را در وضعیت شکل ۵.۳ (د) در نظر بگیرید. به‌جای نیروی $\mathbf{P}_2$ می‌توانیم نیروی $\mathbf{P}'_2$ را بگذاریم که بزرگی، راستا، و خط اثرش با $\mathbf{P}$ یکی است و به‌جای A به B وارد می‌شود [شکل ۵.۳ (ه)]. اینجا هم اگر نیروهای $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}'_2$ را با هم جمع کنیم، مجموعشان صفر می‌شود [شکل ۵.۳ (و)]. بنابراین، از دیدگاه مکانیک اجسام صلب، سیستمهای نشان داده شده در شکلهای ۵.۳ (الف) و (د) با هم معادل‌اند. اما واضح است که نیروهای داخلی و تغییر شکلهای حاصل از این دو سیستم متفاوت‌اند. میلهٔ شکل ۵.۳ (الف) تحت کشش است و اگر کاملاً صلب نباشد، کمی افزایش طول پیدا خواهد کرد؛ برعکس میلهٔ شکل ۵.۳ (د) تحت فشار است و اگر کاملاً صلب نباشد طولش کمی کوتاه خواهد شد. پس، هرچند که اصل قابلیت انتقال را می‌توانیم آزادانه برای تعیین شرایط حرکت یا تعادل اجسام صلب و محاسبهٔ نیروهای خارجی وارد بر این اجسام به‌کار ببریم، اما باید از کاربرد آن برای تعیین نیروهای داخلی و تغییر شکلها اجتناب کنیم، یا دستکم آن را با احتیاط به‌کار ببریم.

۴.۳ ضرب برداری دو بردار

حال به منظور درک بهتر اثر نیرو بر روی جسم صلب، می‌خواهیم مفهوم جدیدی را معرفی کنیم که به آن گشتاور نیرو حول یک نقطه می‌گویند. اما اول به ابزارهای ریاضی در اختیارمان، ضرب برداری دو بردار را هم می‌افزاییم تا درک این مفهوم راحت‌تر و در عمل بهتر به کار گرفته شود.

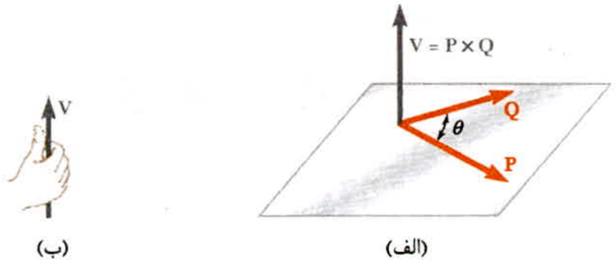
حاصلضرب برداری دو بردار $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ بنا به تعریف یک بردار $\mathbf{V}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. خط اثر بردار $\mathbf{V}$ بر صفحهٔ شامل $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ عمود است [شکل ۶.۳ (الف)].

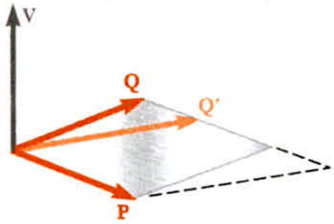
۲. بزرگی $\mathbf{V}$ برابر با حاصلضرب بزرگیهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ و سینوس زاویه بین آنها، یعنی θ، است (که همیشه اندازه‌اش کوچکتر یا مساوی °۱۸۰ خواهد بود)؛ پس داریم

$$V = PQ\sin\theta \qquad (۱.۳)$$

۳. جهت $\mathbf{V}$ از روی قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود. دست راست خود را طوری نگه دارید که جهت حرکت انگشتان در جهت حرکت بردار $\mathbf{P}$ باشد که به‌اندازهٔ زاویهٔ θ بچرخد تا بر روی بردار $\mathbf{Q}$ منطبق شود. در این حالت انگشت شست جهت بردار $\mathbf{V}$ حاصلضرب را نشان می‌دهد [شکل ۶.۳ (ب)]. توجه داشته باشید که اگر $\mathbf{P}$



شکل ۶.۳



شکل ۷.۳

و $\mathbf{Q}$ نقطه اثر مشترک نداشته باشند، ابتدا می‌بایست آنها را از یک نقطه رسم کرد. سه بردار $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{V}$ اصطلاحاً سه‌تایی راستگرد می‌گویند.[1]

همان‌طور که در بالا گفتیم، بردار $\mathbf{V}$ که این سه شرط را برآورده می‌کند (و تعریفش یگانه است) حاصلضرب برداری $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ است و به بیان ریاضیاتی به این صورت نشان داده می‌شود

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q} \qquad (۲.۳)$$

ضرب برداری دو بردار $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را به خاطر نمادی که میان آنهاست ضرب چلیپایی $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ هم می‌گویند.

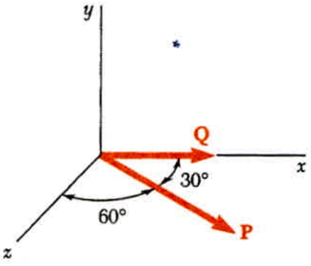
از معادلهٔ (۱.۳) نتیجه می‌شود که، وقتی دو بردار $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ هم‌جهت یا در خلاف جهت هم باشند، حاصلضرب برداری آنها صفر می‌شود. در حالت کلی وقتی زاویهٔ متشکل از دو بردار صفر یا °۱۸۰ نباشد، برای معادلهٔ (۱.۳) می‌شود یک تعبیر هندسی ارائه کرد: بزرگی (V) حاصلضرب برداری $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ برابر با مساحت متوازی‌الاضلاعی است که از دو ضلع $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ ساخته می‌شود (شکل ۷.۳). بنابراین حاصلضرب برداری $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ ثابت می‌ماند اگر به‌جای $\mathbf{Q}$، بردار $\mathbf{Q}'$، هم صفحه با دو بردار $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$، را جایگزین کنیم، به‌طوری که خط واصل دو سر $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{Q}'$ با $\mathbf{P}$ موازی باشد. یعنی

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q}' \qquad (۳.۳)$$

از سومین شرطی که برای تعریف ضرب برداری $\mathbf{V}$ از $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ به کار بردیم — یعنی شرطی که می‌گفت $\mathbf{P}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{V}$ باید تشکیل یک سه تایی راستگرد بدهند — نتیجه می‌شود که در ضرب برداری، جای دو بردار را نمی‌توان عوض کرد، یا به عبارت دیگر ضرب برداری تعویض‌ناپذیر است، یعنی $\mathbf{Q}\times\mathbf{P}$ مساوی با $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ نیست. در واقع به سهولت معلوم می‌شود که حاصلضرب $\mathbf{Q}\times\mathbf{P}$ نمایندهٔ $-\mathbf{V}$ است که برابر با $\mathbf{V}$، در خلاف جهت آن است. بنابراین می‌نویسیم

$$\mathbf{Q}\times\mathbf{P} = -(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) \qquad (۴.۳)$$

۱. یادآوری می‌کنیم که محورهای x، y، و z در فصل ۲، یک سیستم راستگرد از محورهای قائم تشکیل می‌دهند و بردارهای یکه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ که در بخش ۱۲.۲ معرفی کردیم نیز یک سه‌وجهی راستگرد به وجود می‌آورند که از قانون دست راست تبعیت می‌کند.



شکل ۸.۳

مثال . حاصلضرب برداری $\mathbf{V} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ را برای بردار $\mathbf{P}$ با بزرگی ۶ واحد که ـر صفحهٔ zx واقع است و با محور x زاویهٔ $30°$ می‌سازد، و بردار $\mathbf{Q}$ با بزرگی ۴ ـاحد که در امتداد محور x قرار گرفته است تعیین کنید (شکل ۸.۳).

از تعریف ضرب برداری مستقیماً نتیجه می‌شود که $\mathbf{V}$ باید در امتداد محور y و ـزرگیش برابر با

$$V = PQ\sin\theta = (6)(4)\sin 30° = 12$$

ـشد و رو به بالا قرار بگیرد.

دیدید که خاصیت تعویض‌پذیری برای ضربهای برداری صادق نیست. لابد می‌پرسید ـه خاصیت توزیع‌پذیری چطور؛ یعنی آیا رابطهٔ

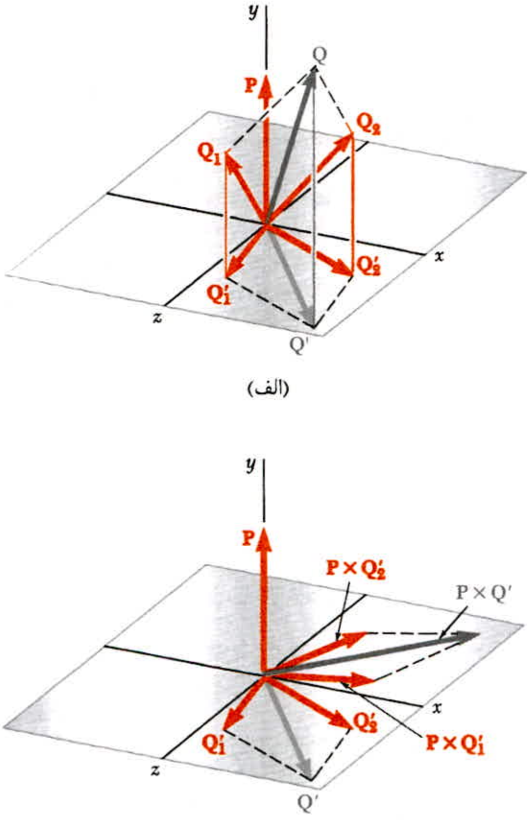
$$\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2) = \mathbf{P}\times\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}\times\mathbf{Q}_2 \qquad (۵.۳)$$

ـقرار است یا نه؟ پاسخش مثبت است. احتمالاً بسیاری از خوانندگان می‌خواهند بدون ـات، پاسخی را که به شیوهٔ شهودی درست می‌پندارند، بپذیرند. با وجود این، چون ـاختار کلی جبر برداری و استاتیک وابسته به رابطهٔ (۵.۳) است، لحظه‌ای از موضوع ـحث خارج می‌شویم، و به اثبات آن می‌پردازیم.

می‌توانیم، بی‌آنکه کلیت مسئله از بین برود، فرض کنیم که $\mathbf{P}$ در امتداد محور y ـرار گرفته است [شکل ۹.۳ (الف)]. مجموع $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$ را با $\mathbf{Q}$ نشان می‌دهیم و ـمودهایی از نوک بردارهای $\mathbf{Q}$، $\mathbf{Q}_1$، و $\mathbf{Q}_2$ به صفحهٔ zx فرود می‌آوریم و از این ـریق بردارهای $\mathbf{Q}'$، $\mathbf{Q}'_1$ و $\mathbf{Q}'_2$ را تعریف می‌کنیم. این بردارها در واقع به ترتیب ـسویرهای $\mathbf{Q}$، $\mathbf{Q}_1$، و $\mathbf{Q}_2$ بر روی صفحهٔ zxاند. با یادآوری خاصیتی که آن را با ـابطهٔ (۳.۳) بیان کردیم می‌بینیم که به‌جای عضو سمت چپ معادلهٔ (۵.۳) می‌توانیم ـگذاریم $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}'$ و به همین ترتیب، به‌جای ضربهای برداری $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}_2$ ـگذاریم $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}'_1$ و $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}'_2$. پس، رابطه‌ای را که می‌خواهیم اثبات کنیم می‌توان ـه این صورت نوشت:

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}' = \mathbf{P}\times\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P}\times\mathbf{Q}'_2 \qquad (۵'.۳)$$

حالا مشاهده می‌کنیم که $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}'$ را می‌شود از ضرب بردار $\mathbf{Q}'$ در اسکالر P و ـوران پاد ساعتگرد آن به اندازهٔ $90°$ در صفحهٔ zx به‌دست آورد [شکل ۹.۳ (ب)]؛ ـدو ضرب برداری دیگر معادلهٔ (۵'.۳) را هم می‌شود عیناً به همین طریق از $\mathbf{Q}'_1$ و $\mathbf{Q}'_2$ به‌دست آورد. حالا، چون تصویر هر متوازی‌الاضلاع بر روی یک صفحهٔ دلخواه، ـز هم متوازی‌الاضلاع است، تصویر $\mathbf{Q}$ (مجموع $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$) یعنی $\mathbf{Q}'$ هم باید برابر با جموع تصویرهای $\mathbf{Q}'_1$ و $\mathbf{Q}'_2$ (مربوط به بردارهای $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$) برروی همان صفحه ـشد [شکل ۹.۳ (الف)]. این رابطه میان بردارهای $\mathbf{Q}'$، $\mathbf{Q}'_1$، $\mathbf{Q}'_2$ حتی بعد از ضرب ـها در اسکالر P و چرخش $90°$ باز هم برقرار است [شکل ۹.۳(ب)]. پس رابطهٔ ـ(۵'.۳) را ثابت کردیم و حالا می‌توانیم مطمئن باشیم که خاصیت توزیع‌پذیری برای ضربهای برداری صادق است.



(الف)

(ب)

شکل ۹.۳

خاصیت سوم، یعنی خاصیت شرکت‌پذیری را در مورد ضربهای برداری نمی‌توان به کار برد و در حالت کلی داریم

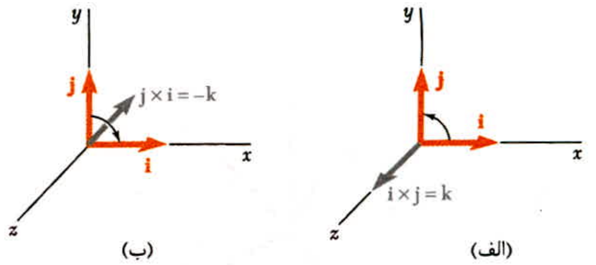
$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{S} \neq \mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{S}) \qquad (۶.۳)$$

۵.۳ حاصلضرب برداری برحسب مؤلفه‌های قائم

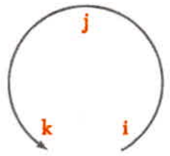
حالا بیایید حاصلضرب برداری هر دو تا بردار یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ را که در فصل ۲ تعریف کردیم تعیین کنیم. اول از همه حاصلضرب $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ [شکل ۱۰.۳ (الف)] را در نظر بگیرید. از آنجا که بزرگی این بردارها هر دو برابر با یک است و برهم عمودند، حاصلضرب برداری آنها هم یک بردار یکه می‌شود. این بردار یکه باید $\mathbf{k}$ باشد، چون بردارهای $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ دو به دو بر هم عمودند و تشکیل یک سه‌تایی راستگرد را می‌دهند. از طرف دیگر، بنا به قاعدهٔ انگشتهای دست راست نتیجه می‌شود که حاصلضرب $\mathbf{j}\times\mathbf{i}$ برابر با $-\mathbf{k}$ خواهد بود [شکل ۱۰.۳ (ب)]. سرانجام معلوم می‌شود که حاصلضرب برداری یک بردار یکه در خودش، مثل $\mathbf{i}\times\mathbf{i}$، برابر با صفر است، زیرا هر دو بردار در یک امتدادند. حاصلضربهای برداری جفت‌بردارهای یکه عبارت‌اند از

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i} = 0 & \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{j} = 0 & \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0 \end{array} \qquad (۷.۳)$$

راه سادهٔ تعیین علامت حاصلضرب برداری هر دو بردار یکه این است که حرفهای نمایندهٔ آنها را به‌ترتیب پادساعتگرد روی یک دایره قرار دهیم (شکل ۱۱.۳): اگر ترتیب ضرب بردارها در جهت پاد ساعتگرد باشد علامت حاصلضرب آنها مثبت و در غیر این صورت منفی خواهد بود.



شکل ۱۰.۳



شکل ۱۱.۳

حال می‌توانیم به راحتی بردار حاصلضرب $\mathbf{V}$ دو بردار معین $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را برحسب مؤلفه‌های قائم آنها بیان کنیم. با تجزیهٔ $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ به مؤلفه‌هایشان می‌نویسیم

$$\mathbf{V}=\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=(P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k})\times(Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k})$$

با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری، $\mathbf{V}$ را به‌صورت مجموع ضربهای برداری‌ای مثل $P_x\mathbf{i}\times Q_y\mathbf{j}$ می‌نویسیم. به این ترتیب می‌بینیم که هریک از عبارتهای به‌دست‌آمده برابر با حاصلضرب برداری دو بردار یکه است، مانند $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$، که در حاصلضرب دو تا اسکالر، مانند P_xQ_y ، ضرب شده است. حال اگر با توجه به اتحادهای (۷.۳)، از $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ فاکتور بگیریم نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{V}=(P_yQ_z-P_zQ_y)\mathbf{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\mathbf{j}+(P_xQ_y-P_yQ_x)\mathbf{k} \quad (۸.۳)$$

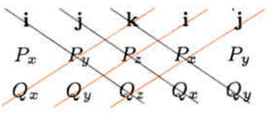
بنابراین معلوم می‌شود که مؤلفه‌های قائم بردار حاصلضرب $\mathbf{V}$ عبارت‌اند از

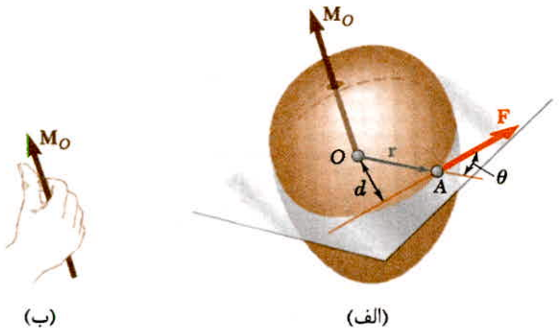
$$\begin{aligned}V_x&=P_yQ_z-P_zQ_y\\ V_y&=P_zQ_x-P_xQ_z\\ V_z&=P_xQ_y-P_yQ_x\end{aligned} \quad (۹.۳)$$

اگر دوباره به معادلهٔ (۸.۳) برگردیم می‌بینیم که جمله‌های طرف راست آن نمایندهٔ بسط یک دترمینان هستند، پس بردار حاصلضرب $\mathbf{V}$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان کنیم که راحت‌تر به خاطر سپرده می‌شود:[1]

$$\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ P_x&P_y&P_z\\ Q_x&Q_y&Q_z\end{vmatrix} \quad (۱۰.۳)$$

۱. هر دترمینان متشکل از سه سطر و سه ستون را می‌توان با تکرار ستونهای اول و دوم و تشکیل حاصلضربها در امتداد هر قطر حساب کرد. مجموع حاصلضربهای به‌دست‌آمده در امتداد خطوط کمرنگ را از مجموع حاصلضربهای به دست آمده در امتداد خطوط پررنگ کم می‌کنیم.





شکل ۱۲.۳

۶.۳ گشتاور نیروی حول یک نقطه

حالا بیایید یک نیروی $\mathbf{F}$ را در نظر بگیریم که به یک جسم صلب اثر می‌کند [شکل ۱۲.۳ (الف)]. چنانکه می‌دانیم، نیروی $\mathbf{F}$ با یک بردار نشان داده می‌شود که بزرگی و راستای آن را معین می‌کند. اما تأثیر این نیرو بر روی جسم صلب علاوه بر بزرگی و راستا به نقطهٔ اثر A هم بستگی دارد. مکان A را می‌توان با بردار $\mathbf{r}$، که نقطهٔ ثابت مرجع (O) را به A متصل می‌کند، مشخص کرد؛ این بردار را بردار مکان A می‌گویند.[1] بردار مکان $\mathbf{r}$ و نیروی $\mathbf{F}$ صفحهٔ نشان داده شده در شکل ۱۲.۳ (الف) را تعریف می‌کنند.

حالا می‌خواهیم گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ را حول O، به صورت ضرب برداری $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ تعریف کنیم:

$$\mathbf{M}_O=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \quad (۱۱.۳)$$

طبق تعریفی که از ضرب برداری در بخش ۴.۳ کردیم، گشتاور $\mathbf{M}_O$ باید بر صفحهٔ شامل O و $\mathbf{F}$ عمود باشد. جهت $\mathbf{M}_O$ را جهت دورانی تعیین می‌کند که بردار $\mathbf{r}$ را به امتداد بردار $\mathbf{F}$ بیاورد؛ این دوران از ناظر واقع در نوک بردار $\mathbf{M}_O$، پادساعتگرد می‌بینند. راه دیگر تعیین جهت $\mathbf{M}_O$ این است که قاعدهٔ دست راست را به‌کار ببریم: دست راستتان را مشت کنید و آن را طوری نگه دارید که انگشتهای خم‌شده‌تان در همان جهتی باشند که $\mathbf{F}$ می‌خواهد جسم را حول یک محور ثابت در امتداد خط اثر $\mathbf{M}_O$ بچرخاند؛ آن وقت شستتان جهت گشتاور $\mathbf{M}_O$ را نشان خواهد داد [شکل ۱۲.۳ (ب)].

سرانجام، اگر زاویهٔ میان خط اثرهای بردار مکان $\mathbf{r}$ و نیروی $\mathbf{F}$ را با θ نشان دهیم بزرگی گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول نقطهٔ O از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$M_O=rF\sin\theta=Fd \quad (۱۲.۳)$$

که d نمایندهٔ فاصلهٔ عمودی O تا خط اثر $\mathbf{F}$ است. از آنجا که تمایل نیروی $\mathbf{F}$ به دوران جسم صلب حول یک محور ثابت عمود بر نیرو بستگی به فاصلهٔ $\mathbf{F}$ از آن محور و همچنین بستگی به بزرگی $\mathbf{F}$ دارد، پی می‌بریم که بزرگی $\mathbf{M}_O$، میزان تمایل نیروی $\mathbf{F}$ برای دوران جسم صلب حول یک محور ثابت در امتداد $\mathbf{M}_O$ است.

در سیستم یکاهای SI، که نیرو برحسب نیوتون (N) و فاصله برحسب متر (m) بیان می‌شود، گشتاور نیرو برحسب نیوتون‌ـمتر (N · m) بیان خواهد شد. در سیستم یکاهای U. S. نیرو برحسب پوند و فاصله برحسب فوت یا اینچ است، گشتاور نیرو نیز برحسب lb. ft یا lb. in به‌دست می‌آید.

۱. می‌توان به سهولت تحقیق کرد که بردارهای مکان از قانون جمع برداری تبعیت می‌کنند، بنابراین، واقعاً بردارند. برای مثال، بردارهای مکان نقطهٔ A، یعنی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ را نسبت به دو نقطهٔ مرجع O و O' . و بردار وضعیت نقطهٔ O، یعنی $\mathbf{s}$ را نسبت به O' در نظر بگیرید [شکل ۴۰.۳ (الف)، بخش ۱۶.۳]. معلوم می‌شود که بردار مکان $\mathbf{r}'=\overrightarrow{O'A}$ را می‌توان از بردار مکان $\mathbf{r}=\overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{s}=\overrightarrow{O'O}$ با استفاده از قاعدهٔ جمع مثلث به‌دست آورد.

می‌توان مشاهده کرد که اگرچه گشتاور $\mathbf{M}_O$ی نیروی حول یک نقطه، به بزرگی، خط اثر، و جهت نیرو بستگی دارد، اما به مکان واقعی نقطهٔ اثر نیرو در امتداد خط اثرش وابسته نیست. برعکس، گشتاور $\mathbf{M}_O$ی نیروی $\mathbf{F}$ جای نقطهٔ اثر $\mathbf{F}$ را مشخص نمی‌کند.

اما، چنانکه خواهیم دید، گشتاور $\mathbf{M}_O$ی نیروی $\mathbf{F}$ با بزرگی و راستای معین، خط اثر $\mathbf{F}$ را کاملاً مشخص می‌کند. در واقع، خط اثر $\mathbf{F}$ باید واقع در صفحه‌ای باشد که از O بگذرد و بر $\mathbf{M}_O$ عمود باشد؛ فاصلهٔ آن، d، از نقطهٔ O باید برابر با خارج قسمت M_O/F، یعنی خارج قسمت بزرگیهای $\mathbf{M}_O$ و $\mathbf{F}$ باشد؛ و جهت $\mathbf{M}_O$ تعیین می‌کند که خط اثر $\mathbf{F}$ را باید ازکدام طرف نقطهٔ O رسم کرد.

از بخش ۳.۳ به یاد داریم که اصل قابلیت انتقال می‌گوید که دو نیروی $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ معادل‌اند (یعنی بر جسم صلب تأثیر یکسانی می‌گذارند) به شرطی که بزرگی، راستا و خط اثرشان یکی باشد. حال این اصل را می‌توان به این صورت بازگو کنیم: دو نیروی $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ معادل‌اند اگر، و تنها اگر، مساوی باشند (یعنی، بزرگی و راستاهاشان یکی باشد) و حول نقطهٔ معین O گشتاورهای برابر داشته باشند. پس، شرط لازم و کافی برای معادل بودن دو بردار $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ این است که

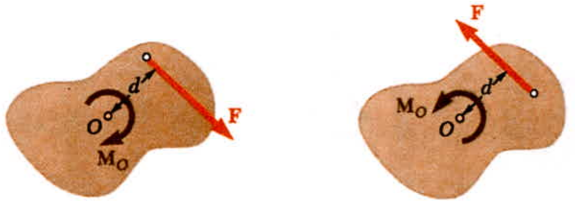
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad \text{و} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \qquad (۱۳.۳)$$

به این ترتیب نتیجهٔ بیان بالا این است که اگر رابطه‌های (۱۳.۳) برای یک نقطهٔ معین O صادق باشند، برای هر نقطهٔ دیگری هم صادق خواهند بود.

مسئله‌هایی که فقط شامل دو بعد هستند. در بسیاری از موارد عملاً با سازه‌هایی سروکار داریم که دوبعدی‌اند، یعنی سازه‌هایی که طول و عرض دارند ولی ضخامتشان ناچیز است و تحت تأثیر نیروهای واقع در صفحهٔ خودشان قرار دارند. سازه‌های دوبعدی و نیروهای وارد بر آنها را می‌شود به آسانی بر روی یک ورق کاغذ یا بر روی تخته سیاه نشان داد. بنابراین تحلیل آنها از تحلیل سازه‌ها و نیروهای سه‌بعدی خیلی راحت‌تر است.

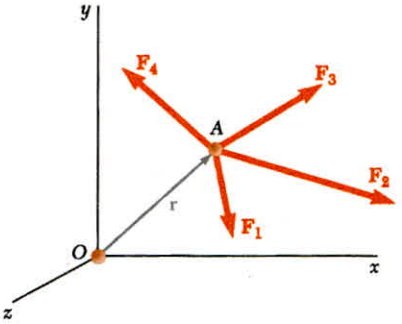
مثلاً، جسم صلب نازکی را در نظر بگیرید که به آن نیروی $\mathbf{F}$ وارد می‌شود (شکل ۱۳.۳). گشتاور $\mathbf{F}$ حول نقطهٔ O واقع در صفحهٔ شکل، با بردار $\mathbf{M}_O$ نشان داده می‌شود که عمود بر صفحه شکل و بزرگیش برابر با Fd است. در مورد شکل ۱۳.۳(الف)، بردار $\mathbf{M}_O$ به طرف خارج صفحهٔ کتاب، و در شکل ۱۳.۳(ب) به‌طرف داخل صفحهٔ کتاب است. وقتی به شکل نگاه می‌کنیم، می‌بینیم که $\mathbf{F}$ می‌خواهد جسم را در مورد اول پادساعتگرد و در مورد دوم ساعتگرد بچرخاند. بنابراین طبیعی است که جهت گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ را حول O در شکل ۱۳.۳(الف) پاد ساعتگرد، و در شکل ۱۳.۳(ب) ساعتگرد بدانیم.

چون گشتاور یک نیروی $\mathbf{F}$ که در صفحهٔ شکل اعمال می‌شود باید عمود بر آن صفحه باشد، فقط کافی است که بزرگی و جهت گشتاور $\mathbf{F}$ را حول O مشخص کنیم. این کار را هم می‌شود با تخصیص یک علامت مثبت یا منفی به بزرگی M_O، بسته به اینکه $\mathbf{M}_O$ به طرف خارج صفحه باشد یا به‌طرف داخل، انجام داد.



(الف) $M_O = + Fd$ (ب) $M_O = - Fd$

شکل ۱۳.۳



شکل ۱۴.۳

۷.۳ قضیه وارینون

از خاصیت توزیع‌پذیری ضربهای برداری می‌شود برای تعیین گشتاور برایند نیروهای همرس استفاده کرد. اگر چندین نیروی $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، ...در همان نقطهٔ A وارد شوند (شکل ۱۴.۳)، و اگر بردار مکان A را با $\mathbf{r}$ نشان بدهیم، بلافاصله از فرمول (۵.۳) بخش ۴.۳، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{r}\times(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_1 + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_2 + \ldots \qquad (۱۴.۳)$$

حالا این نتیجه را با کلمات بیان می‌کنیم. گشتاور برایند چند نیروی همرس حول نقطهٔ معین O برابر با مجموع گشتاورهای تک‌تک نیروها حول آن نقطه است. این خاصیت، که آن را اولین‌بار ریاضیدان فرانسوی پی‌یر وارینون[1] (۱۷۲۲–۱۶۵۴) مدتها پیش از معرفی جبر برداری، مطرح کرد به قضیهٔ وارینون معروف است.

رابطهٔ (۱۴.۳) این امر را امکانپذیر می‌کند که برای به‌دست آوردن گشتاور یک نیرو ($\mathbf{F}$) به‌جای استفادهٔ مستقیم از خود نیرو ($\mathbf{F}$) مؤلفه‌های آن را به‌کار ببریم. چنانکه در بخش بعد خواهیم دید $\mathbf{F}$ را عموماً به مؤلفه‌های موازی با محورهای مختصات تجزیه می‌کنند. اما گاهی وقتها بهتر است که به‌خاطر تسریع درکار، $\mathbf{F}$ را به مؤلفه‌هایی تجزیه کنیم که موازی با محورهای مختصات نباشند (نگاه کنید به مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۳).

۸.۳ مؤلفه‌های قائم گشتاور یک نیرو

به‌طورکلی اگر نیرو و بردار مکان نقطهٔ اثرآن را به مؤلفه‌های قائم x، y، و z تجزیه کنیم، تعیین گشتاور یک نیرو در فضا به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. مثلاً، گشتاور $\mathbf{M}_O$ یک نیروی $\mathbf{F}$ به مؤلفه‌های F_x، F_y، و F_z را که به نقطهٔ A به مختصات x، y، و z وارد می‌شود (شکل ۱۵.۳) حول نقطهٔ O درنظر بگیرید. نظر به اینکه مؤلفه‌های بردار مکان $\mathbf{r}$ به‌ترتیب برابر با مختصات x، y، و z نقطهٔ A هستند، می‌نویسیم

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k} \qquad (۱۵.۳)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (۱۶.۳)$$

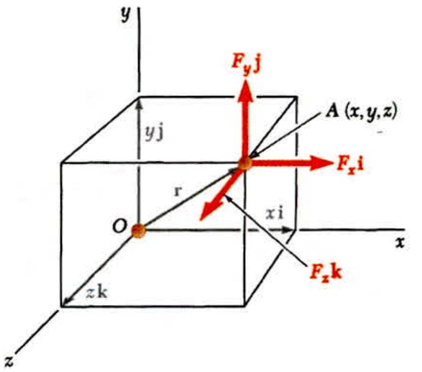
اگر به‌جای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ از معادله‌های (۱۵.۳) و (۱۶.۳) مساوی‌شان را در رابطهٔ

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۱۱.۳)$$

بگذاریم و از نتیجهٔ بخش ۵.۳ استفاده کنیم، گشتاور $\mathbf{M}_O$ نیروی $\mathbf{F}$ حول نقطهٔ O به این صورت درمی‌آید

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \qquad (۱۷.۳)$$

1. Pierre Varignon



شکل ۱۵.۳

که مؤلفه‌های M_x، M_y، و M_z از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند

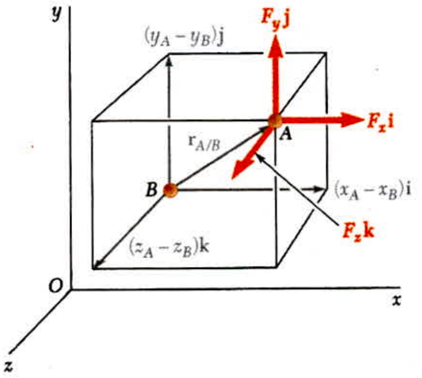
$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z \qquad (۱۸.۳)$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

چنانکه در بخش ۱۱.۳ خواهیم دید، مؤلفه‌های اسکالر M_x، M_y، و M_z گشتاور $\mathbf{M}_O$، میزان تمایل نیروی **F** برای دوران جسم صلب به ترتیب حول محورهای x، y، و z هستند. اگر معادلهای M_x، M_y، و M_z را از رابطهٔ (۱۸.۳) در رابطهٔ (۱۷.۳) بگذاریم عبارتی برای $\mathbf{M}_O$ به‌دست می‌آید که می‌توان آن را به شکل یک دترمینان نوشت

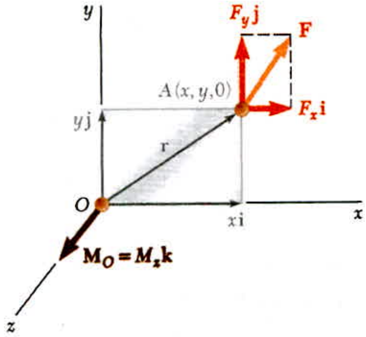
$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۱۹.۳)$$

برای محاسبه گشتاور $\mathbf{M}_B$ی یک نیروی **F** وارد بر نقطهٔ A، حول نقطهٔ دلبخواه B (شکل ۱۶.۳)، باید بردار مکان **r** در معادلهٔ (۱۱.۳) را با برداری که از B به A رسم می‌شود عوض کنیم. این بردار، بردار مکان **A** نسبت به **B** است و آن را با $\mathbf{r}_{A/B}$ نشان می‌دهند. با توجه به اینکه $\mathbf{r}_{A/B}$ را می‌شود از تفریق $\mathbf{r}_B$ از $\mathbf{r}_A$ به‌دست آورد، می‌نویسیم

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \qquad (۲۰.۳)$$



شکل ۱۶.۳



شکل ۱۷.۳

یا، به صورت دترمینان،

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۲۱.۳)$$

که $x_{A/B}$، $y_{A/B}$ ، و $z_{A/B}$ مؤلفه‌های بردار $\mathbf{r}_{A/B}$ را نشان می‌دهند:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

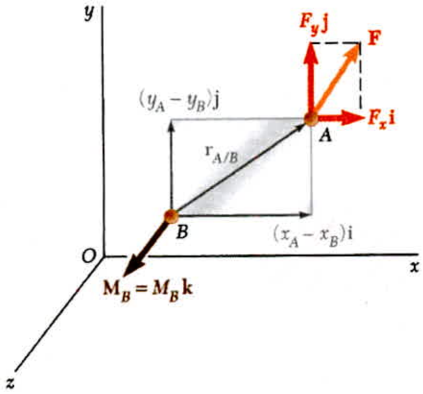
در مورد مسئله‌هایی که صرفاً دو بعد را شامل می‌شوند، می‌توانیم فرض کنیم که نیروی **F** در صفحهٔ xy است (شکل ۱۷.۳). پس z و F_z را در رابطهٔ (۱۹.۳) باید صفر بگیریم، که نتیجه می‌شود

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

می‌بینیم که گشتاور **F** حول O به صفحهٔ شکل عمود است و کاملاً با اسکالر زیر مشخص می‌شود

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \qquad (۲۲.۳)$$

چنانکه قبلاً هم گفتیم، مثبت بودن M_O حاکی از این است که بردار $\mathbf{M}_O$ به‌طرف خارج از صفحهٔ کتاب است (نیروی **F** تمایل به چرخاندن جسم حول O در جهت پادساعتگرد را دارد)، و منفی بودنش نشان می‌دهد که بردار $\mathbf{M}_O$ به‌طرف داخل صفحهٔ کتاب است (نیروی **F** تمایل به چرخاندن جسم حول O در جهت ساعتگرد را دارد).



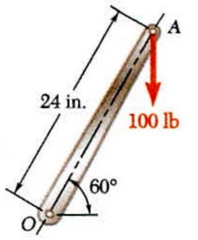
شکل ۱۸.۳

اگر بخواهیم گشتاور یک نیروی واقع در صفحهٔ xy را حول نقطهٔ $B(x_B, y_B)$، ـه به نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ وارد می‌شود (شکل ۱۸.۳)، تعیین کنیم $z_{A/B}$ و F_z ! در رابطه‌های (۲۱.۳) صفر می‌گیریم و توجه می‌کنیم که بردار $\mathbf{M}_B$ بر صفحهٔ xy عمود است و بزرگی و جهت آن با اسکالر زیر مشخص می‌شود

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \qquad (۲۳.۳$$

سئلهٔ نمونه ۱.۳

ک نیروی عمودی ۱۰۰ پوندی به سر اهرمی که به محوری در نقطهٔ O متصل ـده است وارد می‌شود. (الف) گشتاور این نیروی ۱۰۰ پوندی حول O، چقدر است؟ (ب) به A چقدر نیروی افقی باید وارد بشود تا همان گشتاور را حول نقطهٔ O ایجاد کند؟ (ج) کوچکترین نیروی وارد به نقطه A باید چقدر باشد تا همان ـشتاور را حول نقطهٔ O ایجاد کند؟ (د) به چه فاصله از محور، نیروی عمودی ۲۴۰ پوندی باید وارد بشود تا همان گشتاور را حول نقطهٔ O ایجاد کند؟ (هـ) کدامیک از یروهایی که در بندهای (ب)، (ج)، و (د) در نظر گرفته شده معادل با نیروی اولیه ـست؟



ـل:

(الف) گشتاور حول نقطهٔ O. فاصلهٔ عمودی O تا خط اثر نیروی ۱۰۰ پوندی برابر ـست با

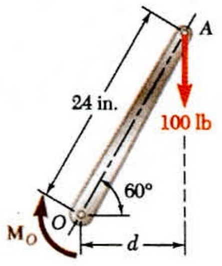
$$d = (۲۴\,\text{in.})\cos ۶۰^\circ = ۱۲\,\text{in.}$$

ـس بزرگی گشتاور نیروی ۱۰۰ پوندی حول نقطهٔ O برابر است با

$$M_O = Fd = (۱۰۰\,\text{lb})(۱۲\,\text{in.}) = ۱۲۰۰\,\text{lb}\cdot\text{in.}$$

ـون این نیرو تمایل به چرخاندن اهرم حول نقطهٔ O در جهت ساعتگرد را دارد، گشتاور را با بردار $\mathbf{M}_O$ نشان می‌دهیم که عمود بر صفحهٔ شکل و به‌طرف داخل صفحه باشد. ـین موضوع را چنین بیان می‌کنیم

◄ $M_O = ۱۲۰۰\,\text{lb}\cdot\text{in.}$ ↻



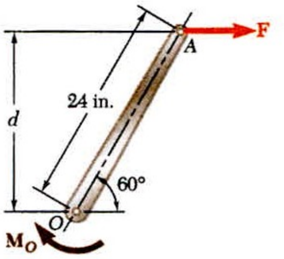
(ب) نیروی افقی. در این مورد، داریم

$$d = (۲۴\,\text{in.})\sin ۶۰^\circ = ۲۰{,}۸\,\text{in.}$$

چون گشتاور حول O می‌بایست ۱۲۰۰ lb. in باشد، می‌نویسیم

$$M_O = Fd$$
$$۱۲۰۰\,\text{lb}\cdot\text{in.} = F(۲۰{,}۸\,\text{in.})$$
$$F = ۵۷{,}۷\,\text{lb}$$

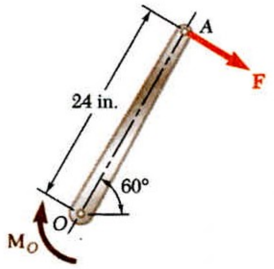
◄ $\mathbf{F} = ۵۷{,}۷\,\text{lb} \rightarrow$



(ج) کوچکترین نیرو. چون $M_O = Fd$ است، F وقتی کوچکترین مقدار را خواهد داشت که d ماکزیمم باشد. پس نیرو را عمود بر OA می‌گیریم و می‌بینیم که $d = ۲۴\,\text{in}$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین

$$M_O = Fd$$
$$۱۲۰۰\,\text{lb}\cdot\text{in.} = F(۲۴\,\text{in.})$$
$$F = ۵۰\,\text{lb}$$

◄ $\mathbf{F} = ۵۰\,\text{lb} \measuredangle ۳۰^\circ$



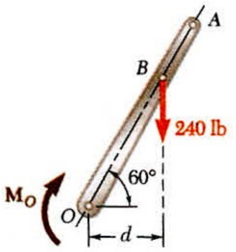
(د) نیروی عمودی ۲۴۰ پوندی. در این مورد از رابطهٔ $M_O = Fd$ نتیجه می‌شود که

$$۱۲۰۰\,\text{lb}\cdot\text{in.} = (۲۴۰\,\text{lb})d \qquad d = ۵\,\text{in.}$$

ولی

$$OB\cos ۶۰^\circ = d$$

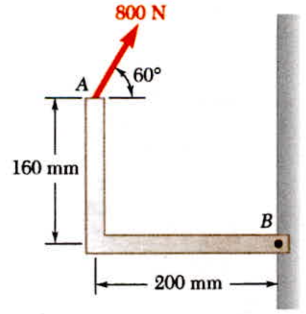
◄ $OB = ۱۰\,\text{in.}$



(هـ) هیچ‌یک از نیروهایی که در بندهای (ب)، (ج) و (د) در نظر گرفته شده معادل با نیروی ۱۰۰ پوندی اولیه نیستند. اگرچه این نیروها حول O گشتاورهای یکسان دارند، ولی مؤلفه‌های x و yشان متفاوت است. به عبارت دیگر هرچند همهٔ این نیروها می‌خواهند محور را یک‌جور بچرخانند اما موجب می‌شوند که اهرم به محور نیروهای متفاوتی وارد کند.

مسئلهٔ نمونه ۲.۳

یک نیروی ۸۰۰ نیوتونی مطابق شکل به قطعه‌ای وارد می‌شود. گشتاور نیرو را حول B محاسبه کنید.



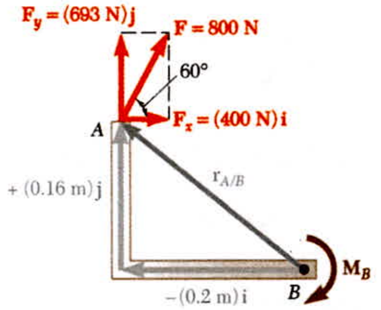
حل:

گشتاور $\mathbf{M}_B$ی نیروی $\mathbf{F}$ حول B با تشکیل ضرب برداری به‌دست می‌آید

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

که $\mathbf{r}_{A/B}$ برداری است که B را به A وصل می‌کند. با تجزیهٔ $\mathbf{r}_{A/B}$ و $\mathbf{F}$ به مؤلفه‌های قائم، داریم

$$\mathbf{r}_{A/B} = -(۰٫۲\ \text{m})\mathbf{i} + (۰٫۱۶\ \text{m})\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = (۸۰۰\ \text{N})\cos ۶۰^\circ \mathbf{i} + (۸۰۰\ \text{N})\sin ۶۰^\circ \mathbf{j}$$
$$= (۴۰۰\ \text{N})\mathbf{i} + (۶۹۳\ \text{N})\mathbf{j}$$



با توجه به رابطه‌های (۷.۳) برای ضربهای خارجی بردارهای یکه (بخش ۵.۳)، خواهیم داشت

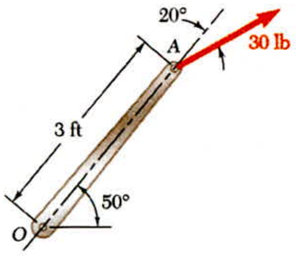
$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$
$$= [-(۰٫۲\ \text{m})\mathbf{i} + (۰٫۱۶\ \text{m})\mathbf{j}] \times [(۴۰۰\ \text{N})\mathbf{i} + (۶۹۳\ \text{N})\mathbf{j}]$$
$$= -(۱۳۸٫۶\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} - (۶۴٫۰\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$
$$= -(۲۰۲٫۶\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

◄ $M_B = ۲۰۳\ \text{N}\cdot\text{m}$ ↻

گشتاور $\mathbf{M}_B$ برداری است که عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف داخل است.

مسئلهٔ نمونه ۳.۳

یک نیروی ۳۰ پوندی مطابق شکل به سر یک اهرم ۳ فوتی وارد می‌شود. گشتاور این نیرو را حول O پیدا کنید.



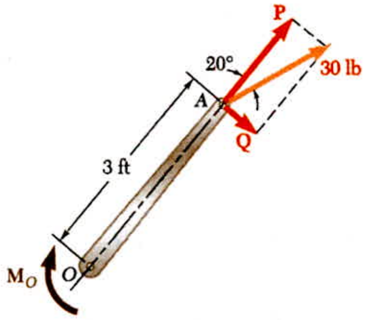
حل:

نیروی $\mathbf{F}$ را به دو مؤلفهٔ $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ در راستاهای OA و عمود بر آن تجزیه می‌کنیم. چون O بر روی خط اثر $\mathbf{P}$ قرار دارد، گشتاور $\mathbf{P}$ حول O صفر است و گشتاور نیروی ۳۰ پوندی به گشتاور $\mathbf{Q}$، که ساعتگرد است، خلاصه می‌شود، و بنابراین می‌شود آن را یک اسکالر منفی نشان داد

$$Q = (۳۰\ \text{lb})\sin ۲۰^\circ = ۱۰٫۲۶\ \text{lb}$$
$$M_O = -Q(۳\ \text{ft}) = -(۱۰٫۲۶\ \text{lb})(۳\ \text{ft}) = -۳۰٫۸\ \text{lb}\cdot\text{ft}$$

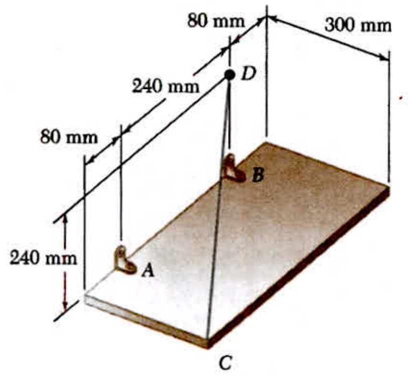
چون مقدار اسکالر M_O منفی است، گشتاور $\mathbf{M}_O$ به طرف داخل صفحه است. می‌نویسیم

◄ $M_O = ۳۰٫۸\ \text{lb}\cdot\text{ft}$ ↻



مسئلهٔ نمونه ۴.۳

یک صفحهٔ مستطیلی با دو بست در A و B و سیم CD نگه داشته شده است. کشش در سیم ۲۰۰ N است. گشتاور نیرویی که سیم به نقطهٔ C وارد می‌کند حول A چقدر است؟



حل:

گشتاور $\mathbf{M}_A$ حول A از نیروی $\mathbf{F}$ که سیم به نقطهٔ C وارد می‌کند، با تشکیل ضرب برداری به‌دست می‌آید

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \qquad (۱)$$

، $\mathbf{r}_{C/A}$ برداری است که از A به C رسم می‌شود،

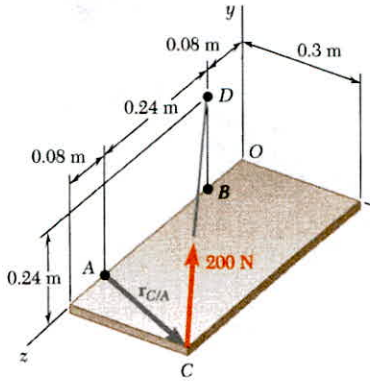
$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (۰/۳\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (۰/۰۸\,\mathrm{m})\mathbf{k} \qquad (۲)$$

$\mathbf{F}$ همان نیروی ۲۰۰ نیوتونی واقع در امتداد CD است. با معرفی بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$، می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (۲۰۰\,\mathrm{N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \qquad (۳)$$

تجزیهٔ بردار $\overrightarrow{CD}$ به مؤلفه‌های قائم، داریم

$$\overrightarrow{CD} = -(۰/۳\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (۰/۲۴\,\mathrm{m})\mathbf{j} - (۰/۳۲\,\mathrm{m})\mathbf{k} \qquad CD = ۰/۵۰\,\mathrm{m}$$



اگر اینها را در رابطهٔ (۳) بگذاریم، نتیجه می‌شود

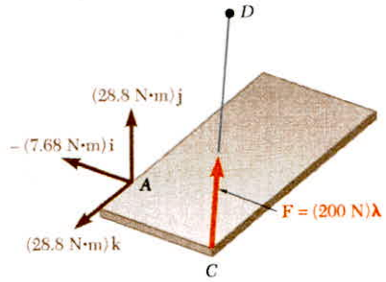
$$\mathbf{F} = \frac{۲۰۰\,\mathrm{N}}{۰/۵۰\,\mathrm{m}}[-(۰/۳\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (۰/۲۴\,\mathrm{m})\mathbf{j} - (۰/۳۲\,\mathrm{m})\mathbf{k}]$$
$$= -(۱۲۰\,\mathrm{N})\mathbf{i} + (۹۶\,\mathrm{N})\mathbf{j} - (۱۲۸\,\mathrm{N})\mathbf{k} \qquad (۴)$$

با نشاندن عبارتهای $\mathbf{r}_{C/A}$ و $\mathbf{F}$ از (۲) و (۴) در (۱)، و به‌یادآوردن رابطه‌های (۷.۳) از بخش ۵.۳ خواهیم داشت

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A}\times\mathbf{F} = (۰/۳\mathbf{i} + ۰/۰۸\mathbf{k})\times(-۱۲۰\mathbf{i} + ۹۶\mathbf{j} - ۱۲۸\mathbf{k})$$
$$= (۰/۳)(۹۶)\mathbf{k} + (۰/۳)(-۱۲۸)(-\mathbf{j}) + (۰/۰۸)(-۱۲۰)\mathbf{j} + (۰/۰۸)(۹۶)(-\mathbf{i})$$

$$\mathbf{M}_A = -(۷/۶۸\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{i} + (۲۸/۸\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{j} + (۲۸/۸\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

راه حل دیگر. چنانکه در بخش ۸.۳ نشان دادیم، گشتاور $\mathbf{M}_A$ را می‌توان به صورت دترمینان بیان کرد:



$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰/۳ & ۰ & ۰/۰۸ \\ -۱۲۰ & ۹۶ & -۱۲۸ \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(۷/۶۸\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{i} + (۲۸/۸\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{j} + (۲۸/۸\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

چگونه مسئله حل کنیم

در این درس ضرب برداری یا ضرب چلیپایی دو بردار را معرفی کردیم. در مسئله‌های زیر، ممکن است لازم باشد که برای محاسبه گشتاور یک نیرو حول یک نقطه و یا پیداکردن فاصلهٔ عمودی یک نقطه تا یک خط از این ضرب استفاده کنید.

گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول نقطهٔ O از یک جسم صلب را به‌صورت

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۱۱.۳)$$

تعریف کردیم، که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان از نقطهٔ O تا هر نقطه‌ای از خط اثر $\mathbf{F}$ است. از آنجا که ضرب برداری تعویض‌پذیر نیست، قطعاً باید موقع محاسبهٔ چنین ضربی ترتیب صحیح جای بردارها را رعایت کنید و به جهت آنها کاملاً توجه داشته باشید. گشتاور $\mathbf{M}_O$ از آن جهت مهم است، که بزرگیش برابر با میزان تمایل نیروی $\mathbf{F}$ برای چرخاندن جسم صلب حول یک محور واقع در امتداد $\mathbf{M}_O$ است.

۱. محاسبهٔ گشتاور $\mathbf{M}_O$ یک نیرو در دو بعد. می‌توانید از یکی از روشهای زیر استفاده کنید:

(الف) معادلهٔ (۱۲.۳)، $M_O = Fd$، را بکار ببرید که می‌گوید بزرگی گشتاور برابر با حاصلضرب بزرگی $\mathbf{F}$ و فاصله عمودی d از O تا خط اثر $\mathbf{F}$ است [مسئلهٔ نمونه ۱.۳].

(ب) بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ را برحسب مؤلفه‌ها بنویسید و حاصلضرب برداری $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ را محاسبه کنید [مسئلهٔ نمونه ۲.۳].

(ج) $\mathbf{F}$ را به مؤلفه‌های موازی و عمود بر بردار مکان $\mathbf{r}$ تجزیه کنید و در این صورت فقط مؤلفه عمودی در گشتاور $\mathbf{F}$ سهم دارد [مسئلهٔ نمونه ۳.۳].

(د) معادلهٔ (۲۲.۳)، $M_O = M_z = xF_y - yF_x$، را به کار ببرید. در این روش، ساده‌ترین راه رسیدن به $\mathbf{M}_O$ این است که مؤلفه‌های اسکالر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ را مثبت بگیرید و بعد از طریق مشاهده علامت مناسبی به گشتاور مربوط به هریک از مؤلفه‌ها بدهید. مثلاً با به‌کار بردن این روش برای حل مسئلهٔ نمونهٔ ۲.۳ مشاهده می‌کنیم که هر دو مؤلفهٔ نیرو تمایل به ایجاد چرخش ساعتگرد حول نقطهٔ B را دارند. بنابراین گشتاور هر نیرو حول B را می‌بایست با یک اسکالر منفی نشان داد. به این ترتیب گشتاور کل به این صورت درمی‌آید

$$M_B = -(۰/۱۶\,\mathrm{m})(۴۰۰\,\mathrm{N}) - (۰/۲۰\,\mathrm{m})(۶۹۳\,\mathrm{N}) = -۲۰۲/۶\,\mathrm{N\cdot m}$$

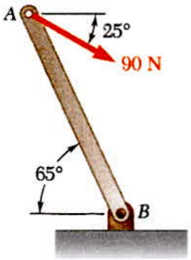
۲. محاسبهٔ گشتاور $\mathbf{M}_O$ی یک نیرو در سه بعد. طبق روش مسئلهٔ نمونه ۴.۳ اول مناسبترین (ساده‌ترین) بردار مکان $\mathbf{r}$ را انتخاب کنید. بعد $\mathbf{F}$ را برحسب مؤلفه‌های قائم بیان کنید. در مرحلهٔ آخر حاصلضرب برداری $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ را بنویسید و گشتاور را تعیین کنید. در بیشتر مسئله‌های سه‌بعدی، ساده‌ترین راه برای محاسبه حاصلضرب برداری این است که از دترمینان استفاده کنید.

۳. تعیین فاصلهٔ عمودی (d) از یک نقطهٔ A تا یک خط معین. اول فرض کنید که یک نیروی $\mathbf{F}$ با بزرگی معلوم F واقع در امتداد خط مورد نظر است. بعد ضرب برداری $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ را تشکیل دهید و آن را طبق روش بالا محاسبه کنید وگشتاور $\mathbf{F}$ را حول A به‌دست آورید. سپس بزرگی M_A را حساب کنید. سرانجام، مقادیر F و M_A را در معادلهٔ $M_A = Fd$ بگذارید و d را پیدا کنید.

مسئله‌ها

۱.۳ نیروی $90\ N$ مطابق شکل بر میلهٔ کنترل AB وارد می‌شود. می‌دانیم که طول میله $225\ mm$ است. معین کنید گشتاور نیروی حول B به‌وسیله تجزیه نیرو به مؤلفه پایین در امتداد AB و در جهت عمود بر AB.

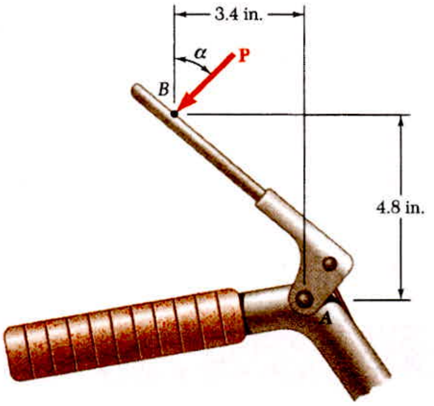
۲.۳ نیروی $90\ N$ مطابق شکل بر میله کنترل AB وارد می‌شود. می‌دانیم که طول میله $225\ mm$ است. مطلوب است گشتاور نیرو حول نقطه B به‌وسیله تجزیه نیرو به نیروی افقی و عمود بر آن.



شکل م ۱.۳ و م ۲.۳

۳.۳ نیروی **P** برابر $3\ lb$ بر اهرمی که متهٔ حلزونی برف‌روبی را کنترل می‌کند، وارد می‌شود. گشتاور **P** حول A را اگر $\alpha = 30°$ باشد، به‌دست آورید.

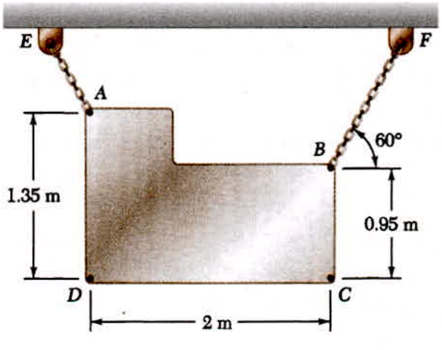
۴.۳ نیروی **P** بر اهرمی که مته حلزونی ماشین برف‌روبی را کنترل می‌کند، وارد می‌شود. بزرگی و راستای کمترین نیروی **P** که دارای گشتاور پاد ساعتگرد $19.5\ lb \cdot in$، حول A است را به‌دست آورید.



شکل م ۳.۳ و م ۴.۳ و م ۵.۳

۵.۳ نیروی **P** برابر $2.9\ lb$ بر اهرمی که متهٔ حلزونی ماشین برف‌روبی را کنترل می‌کند، وارد می‌شود. زاویهٔ α را طوری تعیین کنید که گشتاور **P** حول A در جهت پاد ساعتگرد و بزرگی آن $17\ lb \cdot in$ باشد.

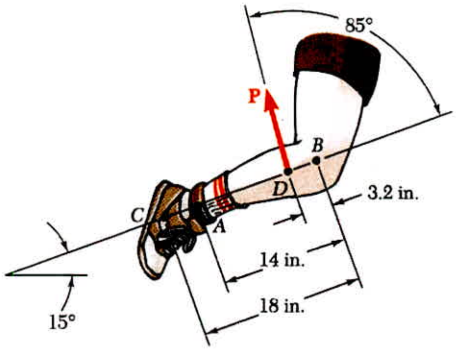
۶.۳ تابلویی با دو زنجیر AE و BF آویزان شده است. اگر کشش در BF برابر $200\ N$ باشد، مطلوب است (الف) گشتاور حول Aی نیروی وارد از زنجیر بر B، (ب) کمترین نیروی وارد بر نقطهٔ C تا همان گشتاور را حول نقطهٔ A ایجاد کند.



شکل م ۶.۳ و م ۷.۳

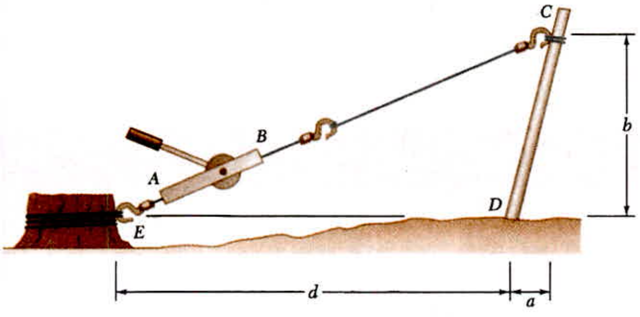
۷.۳ تابلویی با دو زنجیر AE و BF آویزان شده است. اگر کشش در BF برابر $200\ N$ باشد، مطلوب است (الف) گشتاور حول A نیروی وارد توسط زنجیر در B، (ب) بزرگی جهت نیروی قائم وارد بر C که بتواند همان گشتاور حول A را ایجاد کند، (ج) کمترین نیروی وارد بر B که همان گشتاور حول A را ایجاد کند.

۸.۳ ورزشکاری با قوزکی به وزن $5\ lb$، مطابق شکل در حال تمرین است. مطلوب است (الف) گشتاور وزن حول اتصال زانویی در B، (ب) بزرگی نیروی **P** عضله که گشتاوری برابر بزرگی حول B ایجاد می‌کند، (ج) کمترین نیروی **F** که در C وارد می‌شود و از همان گشتا حول B ایجاد می‌شود.



شکل م ۸.۳

۹.۳ از وینچ AB برای راست کردن یک تیر کج استفاده می‌شود. کشش در کابل BC برابر $260\ lb$، $a = 8\ in$، $b = 35\ in$، و $d = 76\ in$. گشتاور حول Dی نیروی وارد از کابل نقطه C را تعیین کنید و آن نیرو را به مؤلفه‌های افقی و قائم وارد بر (الف) نقطهٔ C، و (ب) نقطهٔ E، تجزیه کنید.



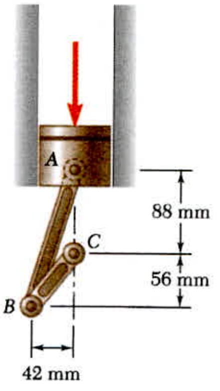
شکل م ۹.۳ و م ۱۰.۳ و م ۱۱.۳

۱۰.۳ می‌دانیم که نیرویی به گشتاور $7840\ lb.in$ حول D برای راست کردن تیر کج CD لازم است. اگر $a = 8\ in$، $b = 35\ in$ و $d = 112\ in$ باشد، مطلوب است کششی که ب در کابل کشنده و پیچ AB برای ایجاد گشتاوری حول نقطه D لازم است.

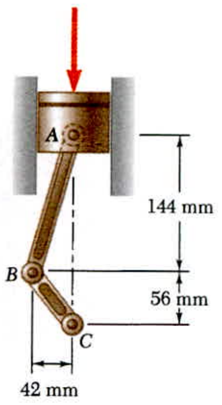
۱۱.۳ می‌دانیم که نیرویی با گشتاور $1152\ N \cdot m$ حول نقطهٔ D برای راست کردن تیر CD لازم است. اگر ظرفیت و پیچ AB برابر 2880 نیوتن باشد، مطلوب است فاصله حدا d تا همان گشتاور را حول نقطهٔ D ایجاد کند. اگر $a = 0.24\ m$، $b = 1.05\ m$.

۱۲.۳ و ۱۳.۳ می‌دانیم که اتصال میله AB روی چرخ BC، نیروی $2.5\text{-}kN$ به‌سمت پایین و به‌طرف چپ در امتداد مرکز خط AB وارد می‌کند. مطلوب است گشتاور نیرو حول

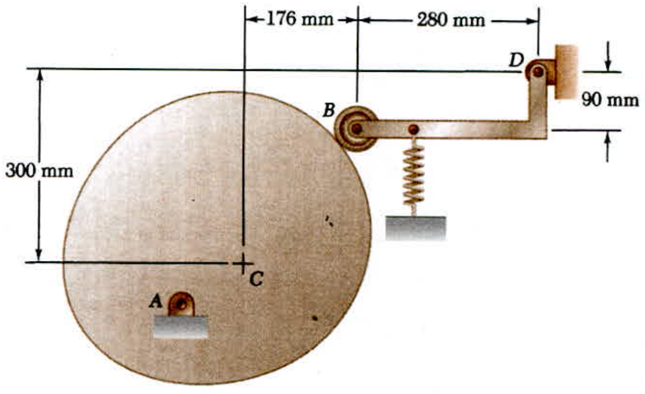
۱۴.۳ دایره‌ای به قطر $64\ mm$ دنبال‌رونده B را در برابر پیچ ماسوره در نقطه A مطابق شکل حفظ می‌کند. می‌دانیم که پیچ ماسوره روی دنبال کننده نیرویی به بزرگی $80\ N$ در امتد عمود مشترک BC وارد می‌کند. مطلوب است گشتاور نیروی حول پین D.



شکل م ۱۳.۳



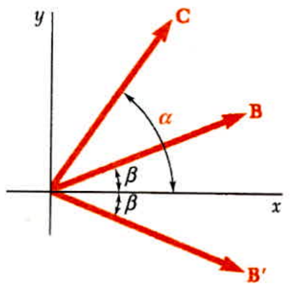
شکل م ۱۲.۳



شکل م ۱۴.۳

۱۵. از شکل حاصلضرب برداری $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}'\times\mathbf{C}$ که در آن $B = B'$ است و با ستفاده از نتایج به‌دست آمده اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\sin(\alpha+\beta) + \frac{۱}{۲}\sin(\alpha-\beta)$$



شکل م ۱۵.۳

۱۶.۱ خطی از نقاط $(۶۳۰\text{ mm}, -۲۲۵\text{ mm})$ و $(-۲۱۰\text{ mm}, ۲۷۰\text{ mm})$ می‌گذرد. اصلهٔ قائم d این خط را از مبدأ مختصات O تعیین کنید.

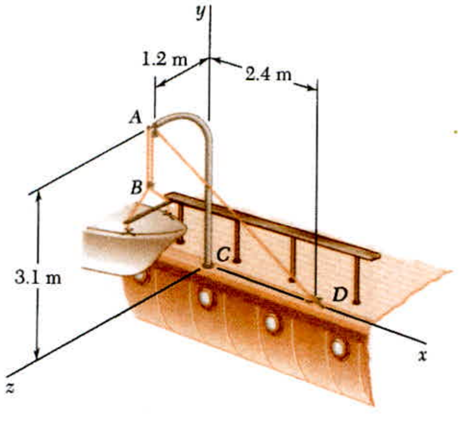
۱۷.۱ صفحه‌ای شامل بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است. بردار یکهٔ عمود این صفحه را وقتی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{F}$ به‌ترتیب برابر (الف) $۱۲\mathbf{i} - ۶\mathbf{j} + ۹\mathbf{k}$ و $-۳\mathbf{i} + ۹\mathbf{j} - ۷/۵\mathbf{k}$، (ب) $-۱۴\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۸\mathbf{k}$ و $۳\mathbf{i} + ۱/۵\mathbf{j} - \mathbf{k}$ باشد را تعیین کنید.

۱۸.۳ بردارهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع‌اند. مساحت این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید اگر
الف) $\mathbf{P} = (۳\text{ in})\mathbf{i} + (۷\text{ in})\mathbf{j} - (۲\text{ in})\mathbf{k}$ و $\mathbf{Q} = -(۵\text{ in})\mathbf{i} + (۱\text{ in})\mathbf{j} + (۳\text{ in})\mathbf{k}$،
ب) $\mathbf{P} = (۲\text{ in})\mathbf{i} - (۴\text{ in})\mathbf{j} - (۳\text{ in})\mathbf{k}$ و $\mathbf{Q} = (۶\text{ in})\mathbf{i} - (۱\text{ in})\mathbf{j} + (۵\text{ in})\mathbf{k}$
باشد.

۱۹.۳ گشتاور حول مبدأ O نیروی $\mathbf{F} = (۷/۵\text{ N})\mathbf{i} + (۳\text{ N})\mathbf{j} - (۴/۵\text{ N})\mathbf{k}$ را که بر نقطه A وارد می‌شود، تعیین کنید. با فرض اینکه بردار مکان A برابر (الف) $\mathbf{r} = -(۶\text{ m})\mathbf{i} + (۳\text{ m})\mathbf{j} + (۱/۵\text{ m})\mathbf{k}$، (ب) $\mathbf{r} = (۲\text{ m})\mathbf{i} - (۰/۷۵\text{ m})\mathbf{j} - (۱\text{ m})\mathbf{k}$، (ج) $\mathbf{r} = -(۲/۵\text{ m})\mathbf{i} - (۱\text{ m})\mathbf{j} + (۱/۵\text{ m})\mathbf{k}$.

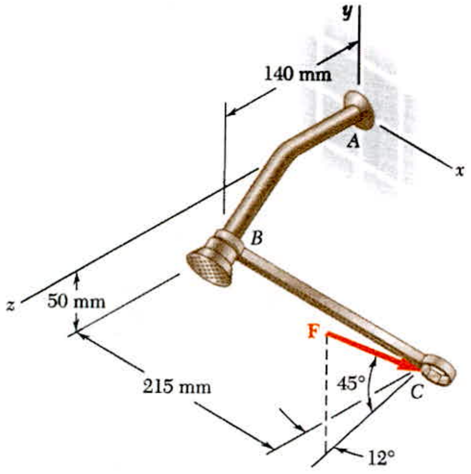
۲۰.۳ مطلوب است گشتاور حول مبدأ O نیروی $\mathbf{F} = (۳\text{ lb})\mathbf{i} - (۶\text{ lb})\mathbf{j} + (۴\text{ lb})\mathbf{k}$ را که بر نقطه A وارد می‌شود. با فرض اینکه مکان A (الف) $\mathbf{r} = -(۷/۵\text{ ft})\mathbf{i} + (۳\text{ ft})\mathbf{j} - (۶\text{ ft})\mathbf{k}$، (ب) $\mathbf{r} = -(۰/۷۵\text{ ft})\mathbf{i} + (۱/۵\text{ ft})\mathbf{j} - (۱\text{ ft})\mathbf{k}$، (ج) $\mathbf{r} = -(۸\text{ ft})\mathbf{i} + (۲\text{ ft})\mathbf{j} - (۱۴\text{ ft})\mathbf{k}$ باشد.

۲۱.۳ قایق کوچکی با دو لنگرکش که یکی از آنها در شکل نشان داده شده آویزان شده است. کشش در صفحه $ABAD$ برابر ۳۶۹ N است. مطلوب است گشتاور حول نقطه C از نیروی برایند $\mathbf{R}_A$ وارد بر لنگر در A.



شکل م ۲۱.۳

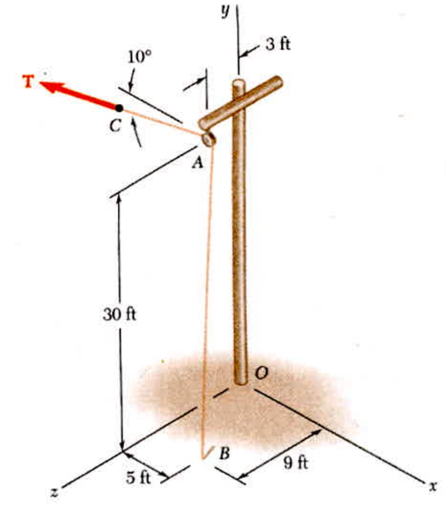
۲۲.۳ نیروی ۳۶-N بر آچاری که برای محکم کردن یک تیر دوش حمام به‌کار می‌رود وارد می‌شود. می‌دانیم که خط مرکزی آچار موازی با محور x است. مطلوب است گشتاور نیروی حول A.



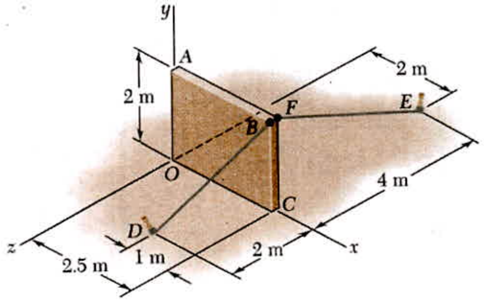
شکل م ۲۲.۳

۲۳.۳ پیش از اینکه کابل تلفن کشیده و محکم شود، طناب BAC را در نقطهٔ B به میخ چوبی که به زمین کوبیده‌ایم، می‌بندیم و سپس آن را در نقطه A از روی قرقره عبور می‌دهیم. اگر قسمت AC طناب در صفحه‌ای موازی با صفحه xy قرار داشته باشد و کشش $\mathbf{T}$ در طناب ۶۲ lb باشد، گشتاور حول O نیروی برایند بر قرقره توسط طناب را پیدا کنید.

۲۴.۳ مقطع دیوار بتنی موقتاً با دوکابل نشان داده شده نگهداری می‌شود. می‌دانیم که کششها در کابلهای BD و EF برابر ۹۰۰ N و ۶۷۵ N است. مطلوب است گشتاور حول نقطهٔ O مربوط به نیروی وارد شده توسط (الف) کابل BD، (ب) کابل FE.

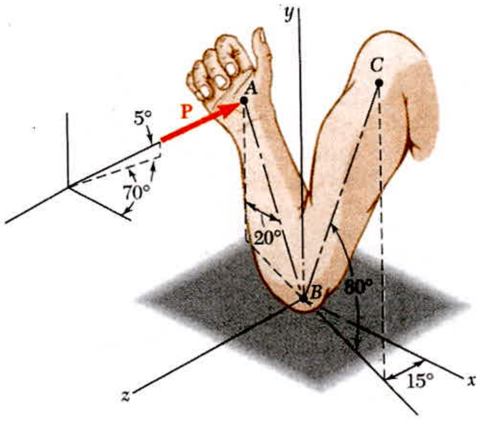


شکل م ۲۳.۳



شکل م ۲۴.۳

۲۵.۳ در یک مسابقهٔ رقابت بازو، نیروی **P** بر دست یک حریف توسط حریف دیگر وارد می‌شود. می‌دانیم که $AB =$ ۱۵٫۲ in و $BC =$ ۱۶ in است. مطلوب است گشتاور نیرو حول e.



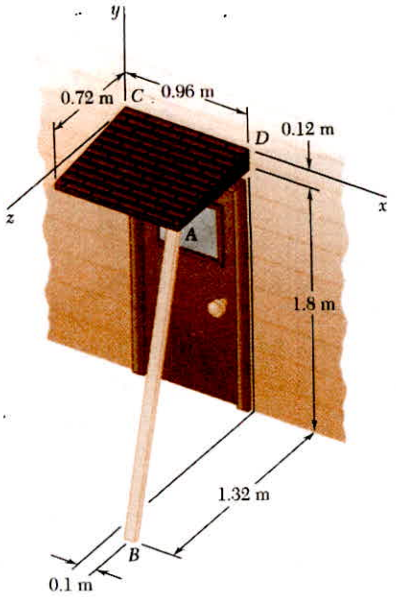
شکل م ۲۵.۳

۲۶.۳ تختهٔ چوبی AB را به‌عنوان محافظ موقت تکیه‌گاه سقف کوچکی به‌کار می‌برند. نیروی ۲۲۸-N در راستای BA بر نقطهٔ A وارد می‌شود. مطلوب است گشتاور حول C این نیرو.

۲۷.۳ در مسئله ۲۱.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطهٔ C تا قسمت AD از خط $ABAD$.

۲۸.۳ در مسئله ۲۳.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه O تا قسمت AC از طناب BAC.

۲۹.۳ در مسئله ۲۳.۳، مطلوب است فاصله عمودی از نقطه O تا قسمت AB از طناب BAC.



شکل م ۲۶.۳

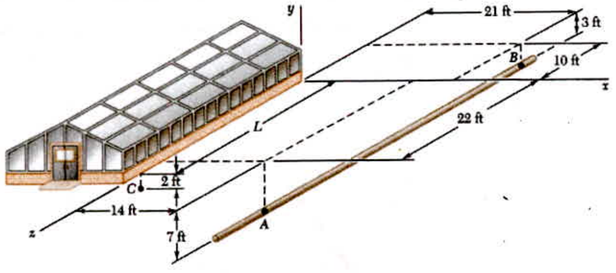
۳۰.۳ در مسئله ۲۴.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه C تا کابل BD.

۳۱.۳ در مسئله ۲۵.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه C تا خط اثر نیروی **P**.

۳۲.۳ درمسئله ۲۶.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه D تا خط رسم شده بین نقاط A و

۳۳.۳ درمسئله ۲۶.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه C تا خط رسم شده بین نقاط A و

۳۴.۳ نگهبانی می‌خواهد لوله آب را از نقطه C روی پایه‌ای به طول ۳۰ lt در امتداد
سبز به آب اصلی که از نقاط A و B می‌گذرد وصل کند. مطلوب است (الف) مقدار L
طول ذخیره لوله مورد نیاز را حداقل می‌کند. (ب) طول لوله مورد نیاز.

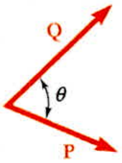


شکل م ۳۴.۳

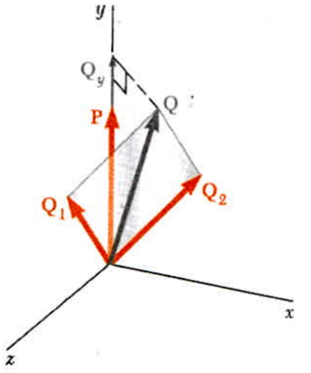
۹.۳ ضرب اسکالر دو بردار

ضرب اسکالر دو بردار **P** و **Q** بنا به تعریف عبارت است از ضرب بزرگیهای **P** و
و کسینوس زاویهٔ θ، که از **P** و **Q** تشکیل شده است (شکل ۱۹.۳). ضرب اسکا
P و **Q** را با **P · Q** نشان می‌دهند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta \qquad (۲۴.۳)$$



شکل ۱۹.۳



شکل ۲۰.۳

وجه کنید که عبارت بالا بردار نیست، بلکه اسکالر (عدد) است، که وجه تسمیهٔ ضرب کالر را نشان می‌دهد؛ $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$ را به خاطر نوع نمادگذاری آن ضرب نقطه‌ای بردارهای و $\mathbf{Q}$ هم می‌گویند.

از خود تعریف ضرب نقطه‌ای نتیجه می‌شود که ضرب اسکالر دو بردار در آن باهم ابه‌جا می‌شوند، یعنی

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P} \qquad (۲۵.۳)$$

ای اثبات توزیع‌پذیر بودن ضرب اسکالر، باید رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_2 \qquad (۲۶.$$

بی‌آنکه کلیت مطلب از بین برود، می‌توان فرض کرد $\mathbf{P}$ در امتداد محور y است (شکل ۲۰). اگر مجموع $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$ را با $\mathbf{Q}$، و زاویهٔ $\mathbf{Q}$ با محور y را با θ_y نشان بدهیم، ت چپ رابطهٔ (۲۶.۳) را می‌شود چنین نوشت:

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta_y = PQ_y \qquad (۲۷.۱$$

Q_y، مؤلفهٔ y بردار $\mathbf{Q}$ است. می‌توانیم به همین طریق، معادل سمت راست رابطهٔ (۲۶.۳) را هم پیدا کنیم

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \qquad (۲۸.۲$$

یون $\mathbf{Q}$ برابر با مجموع $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$ است مؤلفهٔ y آن باید برابر با مجموع مؤلفه‌های y، $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{Q}_2$ باشد. پس، عبارتهای به‌دست آمده در (۲۷.۳) و (۲۸.۳) برابرند و رابطهٔ (۲۶.۲) ثابت شده است.

همچنین اگر خاصیت سوم ــیعنی خاصیت شرکت‌پذیری‌ــ را در نظر بگیریم، می‌بریم که این خاصیت را نمی‌شود برای ضربهای اسکالر به‌کار برد. درواقع $\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})$ معنی ندارد، زیرا $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$ بردار نیست بلکه اسکالر است.

حالا ضرب اسکالر دو بردار $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را برحسب مؤلفه‌های قائمشان بیان می‌کنیم. تجزیهٔ $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ به مؤلفه‌هایشان، ابتدا می‌نویسیم

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k})\cdot(Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k})$$

استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری، $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$ را به‌صورت مجموع ضربهای اسکالری از بیل $P_x\mathbf{i}\cdot Q_x\mathbf{i}$ و $P_x\mathbf{i}\cdot Q_y\mathbf{j}$ بیان می‌کنیم. اما با توجه به تعریف ضرب اسکالر نتیجه می‌شود که حاصلضربهای اسکالر بردارهای یکه، صفر یا یک است.

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} &= 1 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} &= 1 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} &= 0 \end{aligned} \qquad (۲۹.۳)$$

پس، عبارت به دست آمده برای $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$ به این صورت درمی‌آید:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \qquad (۳۰.۳)$$

در حالت خاص وقتی $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ برابر باشند، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \qquad (۳۱.۳)$$

کاربردها

۱. زاویه‌ای که با دو بردار معین تشکیل می‌شود. دو بردار در نظر بگیرید که برحسب مؤلفه‌هایشان داده شده‌اند:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k} \end{aligned}$$

برای تعیین زاویهٔ میان این دو بردار عبارتهایی را که در (۲۴.۳) و (۳۰.۳) برای ضرب اسکالر آنها به‌دست آوردیم مساوی قرار می‌دهیم و می‌نویسیم

$$PQ\cos\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

معادله را برحسب $\cos\theta$ که حل کنیم نتیجه می‌شود

$$\cos\theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ} \qquad (۳۲.۳)$$

۲. تصویر یک بردار بر روی یک محور. بردار $\mathbf{P}$ را که با یک محور، یا خط OL، زاویهٔ θ تشکیل می‌دهد در نظر بگیرید (شکل ۲۱.۳). تصویر $\mathbf{P}$ بر روی محور OL بنا به‌تعریف عبارت است از اسکالر

$$P_{OL} = P\cos\theta \qquad (۳۳.۳)$$

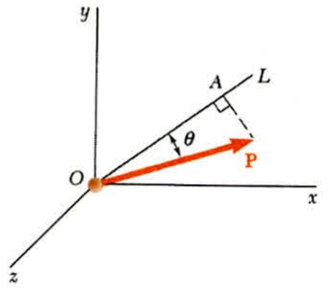
ملاحظه می‌کنیم که تصویر P_{OL} از لحاظ قدر مطلق برابر با طول پاره‌خط OA است؛ این تصویر در صورت هم‌جهت بودن OA با محور OL، یعنی به شرط زاویه حاده یا تند بودن θ، مثبت و در غیر این صورت منفی خواهد بود. اگر $\mathbf{P}$ و OL برهم عمود باشند تصویر $\mathbf{P}$ بر روی OL صفر است.

حالا یک بردار $\mathbf{Q}$ را در نظر بگیرید که در امتداد OL و هم‌جهت با آن باشد (شکل ۲۲.۳). ضرب اسکالر $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را می‌شود به این صورت نوشت

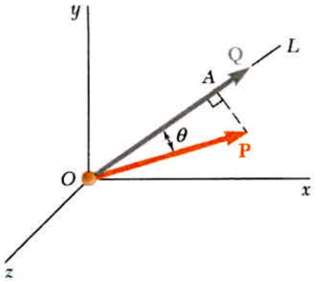
$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta = P_{OL}Q \qquad (۳۴.۳)$$

که از آن نتیجه می‌شود

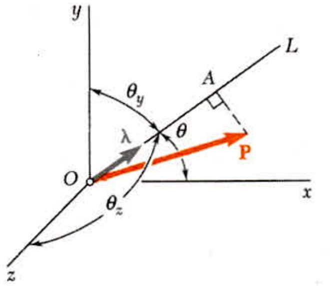
$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{Q} \qquad (۳۵.۳)$$



شکل ۲۱.۳



شکل ۲۲.۳



شکل ۲۳.۳

در حالت خاص، وقتی بردار انتخاب‌شده در امتداد OL بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ باشد (شکل ۲۳.۳)، می‌نویسیم

$$P_{OL} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda} \qquad (۳۶.۳)$$

با تجزیهٔ $\mathbf{P}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ به مؤلفه‌های قائم و یادآوری این نکته (از بخش ۱۲.۲) که مؤلفه‌های $\boldsymbol{\lambda}$ در امتداد محورهای مختصات به‌ترتیب برابر با کسینوس هادیهای OL هستند، تصویر $\mathbf{P}$ بر روی OL را چنین بیان می‌کنیم

$$P_{OL} = P_x \cos\theta_x + P_y \cos\theta_y + P_z \cos\theta_z \qquad (۳۷.۳)$$

که θ_x، θ_y، و θ_z زوایایی هستند که محور OL با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد.

۱۰.۳ ضرب سه‌گانهٔ مختلط سه بردار

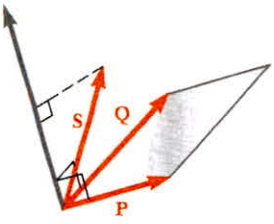
ضرب سه‌گانهٔ مختلط سه بردارِ $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ بنا به تعریف عبارت است از

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) \qquad (۳۸.۳)$$

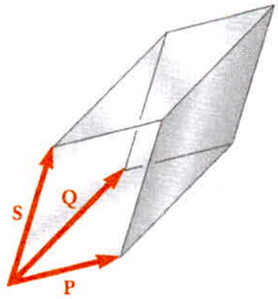
که از ضرب اسکالر $\mathbf{S}$ در ضرب برداری $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ به‌دست می‌آید و بنابراین یک اسکالر است.

ضرب سه‌گانهٔ $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد (شکل ۲۴.۳). اولاً از بخش ۴.۳ به یاد دارید که بردار $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ بر صفحهٔ شامل $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ عمود است، و مقدارش برابر با مساحت متوازی‌الاضلاعی است که از $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ ساخته می‌شود. ثانیاً، از معادلهٔ (۳۴.۳) پیداست که حاصلضرب اسکالر $\mathbf{S}$ و $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ را می‌شود از ضرب بزرگی $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ (یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$) در تصویر $\mathbf{S}$ بر روی بردار $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ (یعنی تصویر $\mathbf{S}$ بر روی عمود بر صفحهٔ شامل متوازی‌الاضلاع) به‌دست آورد. بنابراین قدر مطلق حاصلضرب سه‌گانهٔ مختلط بردارهای $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ در واقع برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که از $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ ساخته می‌شود (شکل ۲۵.۳). می‌بینیم که علامت حاصلضرب مختلط سه بردار به‌شرط راستگردبودن سه‌تایی متشکل از $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ مثبت، و در صورت چپگردبودن

نوع دیگر از ضرب سه‌گانه، یعنی ضرب سه‌گانهٔ برداری $\mathbf{S}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$ را در فصل ۱۵، جلد دوم مکانیک برداری (دینامیک) نشان خواهیم داد.



شکل ۲۴.۳



شکل ۲۵.۳

این سه‌تایی، منفی است [یعنی $\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$ منفی است به‌شرطی که از نوک $\mathbf{S}$ که نگا کنیم، جهت دوران $\mathbf{P}$ را برای منطبق‌شدنش بر روی $\mathbf{Q}$ ساعتگرد ببینیم]. حاصلضر مختلط بردارهای $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ در صورتی که هم‌صفحه باشند صفر خواهد بود.

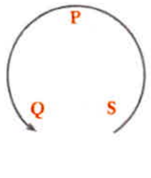
چون متوازی‌السطوحی که (در بالا) تعریف کردیم مستقل از ترتیب انتخاب بردارهاست، می‌توان شش نوع ضرب برداری مختلط با سه بردار $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ تشکیل داد که قدر مطلق همهٔ آنها برابر است ولی علامتهایشان با هم فرق می‌کند. به‌راحت می‌شود نشان داد که

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) &= \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{S}) = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{P}) \\ &= -\,\mathbf{S}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}) = -\mathbf{P}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{Q}) = -\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{S})\end{aligned} \qquad (۳۹_۳)$$

اگر حرفهای نمایندهٔ سه بردار را به‌ترتیب پاد ساعتگرد بر روی یک دایره بچینیم (شک ۲۶.۳) پی می‌بریم که علامت حاصلضرب مختلط سه بردار به‌شرطی که نظمشان بع از جابه‌جایی بازهم پاد ساعتگرد باشد تغییر نمی‌کند. چنین جایگشتی را جایگشت دایره‌ای می‌گویند. همچنین از (۳۹.۳) و خاصیت تعویض‌پذیری نتیجه می‌شود ک ضرب مختلط سه‌گانهٔ $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ را می‌شود به‌صورت $\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$ یا $(\mathbf{S}\times\mathbf{P})\cdot\mathbf{Q}$ تعریف کرد.

حالا ضرب سه‌گانهٔ مختلط بردارهای $\mathbf{S}$، $\mathbf{P}$، و $\mathbf{Q}$ را برحسب مؤلفه‌های قائم آ بیان می‌کنیم. اگر $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ را $\mathbf{V}$ بگیریم بنابه فرمول (۳۰.۳) می‌توانیم ضرب اسکا $\mathbf{S}$ و $\mathbf{V}$ را به این صورت بنویسیم

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$



شکل ۲۶.۳

گر به‌جای مؤلفه‌های **V** معادلهای آنها را از روابط (۹.۳) بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = S_x(P_yQ_z - P_zQ_y) + S_y(P_zQ_x - P_xQ_z) + S_z(P_xQ_y - P_yQ_x) \qquad (۴۰.۳)$$

جه به اینکه این عبارت بسط یک دترمینان را نشان می‌دهد، می‌شود آن را به‌صورت موجورتری نوشت:

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (۴۱.۳)$$

قواعد تعویض جای سطرهای دترمینان را به‌کار ببریم، می‌توانیم درستی رابطه‌های (۳۹.۳) را که قبلاً بنا به ملاحظات هندسی به‌دست آوردیم به‌سهولت تحقیق نیم.

۱۱ گشتاور یک نیرو حول محور معین

که دربارهٔ جبر برداری قدری بیشتر می‌دانیم، می‌خواهیم مفهوم جدیدی را فی کنیم که به آن گشتاور یک نیرو حول یک محور می‌گویند. دوباره یک نیروی را در نظر بگیرید که به یک جسم صلب وارد می‌شود و گشتاورش حول O، $\mathbf{M}_O$ است (شکل ۲۷.۳). OL را محوری بگیرید که از O می‌گذرد؛ گشتاور M_{OL} ی **F** حول OL را به‌صورت تصویر گشتاور $\mathbf{M}_O$ بر روی محور OL تعریف کنیم. اگر بردار یکهٔ در امتداد OL را با $\boldsymbol{\lambda}$ نشان بدهیم و عبارتهای (۳۶.۳) و (۱۱.۱) را که به‌ترتیب در بخشهای ۹.۳ و ۶.۳ برای تصویر یک بردار بر روی یک محور و برای گشتاور $\mathbf{M}_O$ یک نیرو (**F**) به‌دست آوردیم به یاد بیاوریم، می‌توانیم ریسیم.

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) \qquad (۴۲.۳)$$

نشان می‌دهد گشتاور نیروی **F** حول محور OL، M_{OL}، اسکالری است که از ضرب سه‌گانهٔ $\boldsymbol{\lambda}$، **r**، و **F** به‌دست می‌آید. حالا M_{OL} را به شکل یک دترمینان، می‌نویسیم

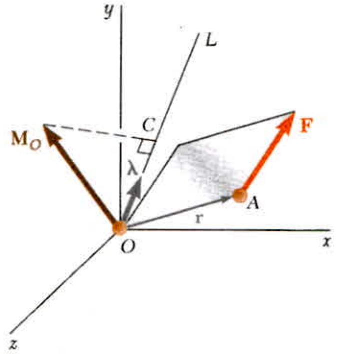
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۴۳.۳)$$

در آن λ_x، λ_y، و λ_z کسینوس هادیهای محور OL؛ x، y، و z، مختصات نقطهٔ نیروی **F**؛ F_x، F_y، و F_z مؤلفه‌های نیروی **F**اند.

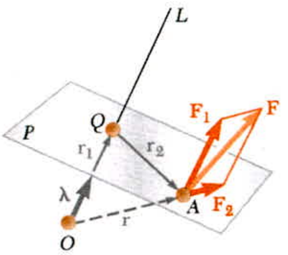
برای روشن‌تر شدن معنای فیزیکی گشتاور M_{OL} یک نیروی **F** حول یک محور OL اول **F** را به مؤلفه‌های قائم $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ (به‌ترتیب به‌موازات OL و واقع در صفحهٔ P عمود بر OL) تجزیه می‌کنیم (شکل ۲۸.۳). بعد **r** را به دو مؤلفهٔ $\mathbf{r}_1$ و تجزیه می‌کنیم و آنها را به‌جای **F** و **r** در رابطهٔ (۴۲.۳) می‌گذاریم

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda}\cdot[(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)\times(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1)+\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_2)+\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_1)+\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

جه می‌کنیم که همهٔ ضربهای مختلط سه گانهٔ بالا، بجز آخری برابر با صفرند، چون شامل بردارهایی هستند که در صورت رسم از یک مبدأ مشترک در یک صفحه واقع



شکل ۲۷.۳



شکل ۲۸.۳

می‌شوند (بخش ۱۰.۳)، بنابراین داریم

$$M_{OL} = \lambda\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2) \qquad (۴۴.۳)$$

بردار $\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2$ بر صفحهٔ P عمود است و گشتاور مؤلفهٔ $\mathbf{F}_2$ی نیروی **F** را حول نقطهٔ Q نشان می‌دهد؛ Q فصل مشترک OL است با صفحهٔ P. بنابراین اسکالر M_{OL}، که به شرط هم‌جهت بودن $\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2$ و OL مثبت و در غیر این صورت منفی است، میزان تمایل $\mathbf{F}_2$ به چرخاندن جسم صلب حول محور ثابت OL را نشان می‌دهد. از آنجا که مؤلفهٔ $\mathbf{F}_1$ نیروی **F** تمایلی به چرخاندن جسم حول OL را ندارد، نتیجه می‌گیریم که گشتاور M_{OL} نیروی F حول OL، میزان تمایل نیروی **F** به دادن حرکت دورانی به جسم صلب حول محور ثابت OL را نشان می‌دهد.

از تعریف گشتاور نیرو حول یک محور نتیجه می‌شود که گشتاور نیروی **F** حول هریک از محورهای مختصات برابر با مؤلفهٔ $\mathbf{M}_O$ است در امتداد همان محور. حالا اگر بردارهای **i**، **j** و **k** را یکی‌یکی به جای $\boldsymbol{\lambda}$ در (۴۲.۳) قرار بدهیم پی‌می‌بریم که عبارتهایی که به این ترتیب برای گشتاورهای نیروی **F** حول محورهای مختصات به‌دست می‌آیند به‌ترتیب همان عبارتهایی هستند که در بخش ۸.۳ برای مؤلفه‌های گشتاور $\mathbf{M}_O$ نیروی **F** حول O به‌دست آوردیم:

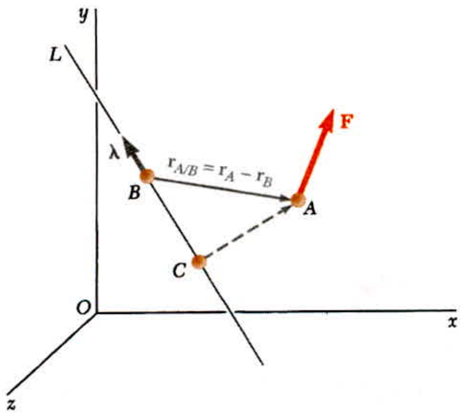
$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \qquad (۱۸.۳)$$

مشاهده می‌کنیم که درست همان‌طورکه مؤلفه‌های F_x، F_y، و F_z نیروی **F** که به‌ترتیب میزان تمایل **F** برای حرکت‌دادن جسم صلب در راستاهای x، y، و z را نشان می‌دهند، گشتاورهای M_x ، M_y ، و M_z نیروی **F** حول محورهای مختصات هم حاکی از میزان تمایل **F** به چرخاندن جسم صلب به‌ترتیب حول محورهای x، y، و zاند.

به‌طور کلی، گشتاور یک نیروی **F** وارد بر A، حول محوری که از مبدأ نمی‌گذرد با انتخاب یک نقطهٔ دلبخواه B بر روی این محور (شکل ۲۹.۳) و تعیین تصویر گشتاور $\mathbf{M}_B$ آن نیرو حول نقطهٔ B، بر روی محور BL به‌دست می‌آید. می‌نویسیم

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}_{A/B}\times\mathbf{F}) \qquad (۴۵.۳)$$

که $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ نمایندهٔ برداری است که از B به A رسم می‌شود. اگر M_{BL}



شکل ۲۹.۳

را به شکل یک دترمینان بنویسیم؛ خواهیم داشت

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۴۶.۳)$$

که در آن λ_x، λ_y، و λ_z کسینوس هادیهای محور BL،

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

و F_x، F_y، و F_z مؤلفه‌های نیروی $\mathbf{F}$اند.

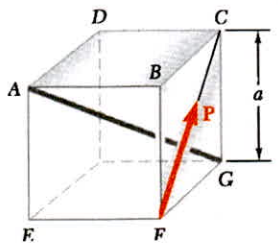
باید توجه داشته باشید که نتیجهٔ بالا بستگی به جای نقطهٔ B روی محور مورد نظر ندارد. درواقع، اگر نتیجهٔ بالا را برای نقطهٔ دیگری مثل C، با M_{CL} نشان بدهیم؛ خواهیم داشت

$$M_{CL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}]$$
$$= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}]$$

ولی چون بردارهای $\boldsymbol{\lambda}$ و $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ بر روی یک خط قرار دارند، حجم متوازی‌السطوح به اضلاع $\boldsymbol{\lambda}$، $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$، و $\mathbf{F}$ صفر است، چون همان حاصلضرب سه‌گانهٔ مختلط آنهاست (بخش۳.۱۰). پس عبارت معادل M_{CL}، به اولین جمله خلاصه می‌شود که همان عبارتی است که قبلاً برای تعریف M_{BL} به‌کار بردیم. به‌علاوه از بخش ۶.۳ نتیجه می‌شود که در محاسبه گشتاور $\mathbf{F}$ حول یک محور، A می‌تواند هر نقطه‌ای بر روی خط اثر $\mathbf{F}$ باشد.

مسئلهٔ نمونه ۵.۳

به مکعبی به ضلع a نیروی $\mathbf{P}$ مطابق شکل وارد می‌شود. گشتاور $\mathbf{P}$ را (الف) حول A، (ب) حول یال AB، و (ج) حول قطر AG پیدا کنید. (د) بااستفاده از نتیجهٔ بند ج فاصلهٔ عمودی AG تا FC را حساب کنید.



حل:

(الف) گشتاور حول A. محورهای مختصات x، y، و z را مطابق شکل اخ می‌کنیم، و نیروی $\mathbf{P}$ و بردار $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$ را که از A به نقطه اثر نیروی $\mathbf{P}$ یعنی ـ کشیده‌ایم به مؤلفه‌های قائم تجزیه می‌کنیم

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$
$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{۲})\mathbf{j} - (P/\sqrt{۲})\mathbf{k} = (P/\sqrt{۲})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

گشتاور $\mathbf{P}$ حول A برابر است با

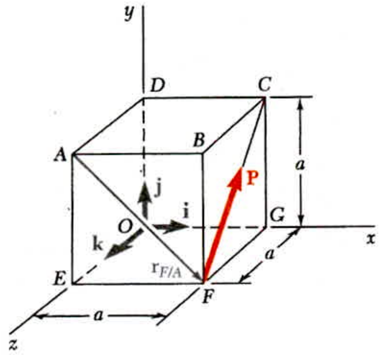
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{۲})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\blacktriangleleft \quad \mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{۲})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

(ب) گشتاور حول AB. $\mathbf{M}_A$ را بر روی AB تصویر می‌کنیم، داریم

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{۲})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\blacktriangleleft \quad M_{AB} = aP/\sqrt{۲}$$

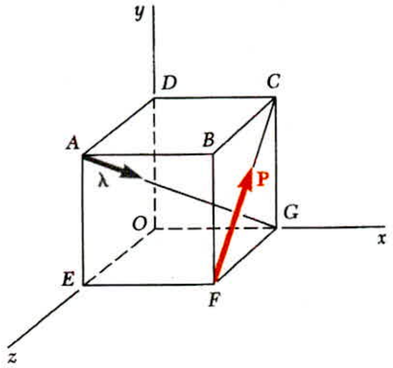


تحقیق می‌کنیم که چون AB موازی محور x است، M_{AB} مؤلفهٔ x گشتاور $\mathbf{M}_A$ هست.

(ج) گشتاور حول قطر AG. گشتاور $\mathbf{P}$ حول AG از تصویرکردن $\mathbf{M}_A$ برروـ AG به‌دست می‌آید. بردار یکهٔ در امتدادAG را با $\boldsymbol{\lambda}$ نشان می‌دهیم، داریم

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{۳}} = (۱/\sqrt{۳})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$M_{AG} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (۱/\sqrt{۳})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{۲})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AG} = (aP/\sqrt{۶})(۱ - ۱ - ۱)$$

$$\blacktriangleleft \quad M_{AG} = -aP/\sqrt{۶}$$



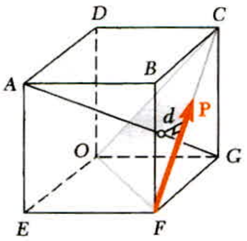
روش دیگر. گشتاور $\mathbf{P}$ حول AG را می‌توان به‌صورت دترمینان هم بیان کرد

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= -aP/\sqrt{6}$$

(د) فاصلهٔ عمودی AG تا FC. ابتدا مشاهده می‌کنیم که $\mathbf{P}$ بر قطر AG عمود
ت. در این‌صورت حاصلضرب اسکالر $\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda}$ باید صفر باشد ــ که هست.

$$\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(1/\sqrt{3})(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0-1+1) =$$



بنابراین گشتاور M_{AG} می‌شود $-Pd$، که d فاصلهٔ عمودی AG تا FC است. (علامت منفی را، به این خاطر گذاشته‌ایم که از دید ناظر واقع در G، دورانی که $\mathbf{P}$ بر مکعب اعمال می‌کند، ساعتگرد به نظر می‌رسد.) با استفاده از مقداری که برای M_{AG} در بند ج، به‌دست آوردیم نتیجه می‌شود که

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6}$$

◄ $d = a/\sqrt{6}$

چگونه مسئله حل کنیم

مسئله‌های این درس می‌توانید ضرب اسکالر یا ضرب نقطه‌ای را برای پیداکردن
یهٔ میان دو بردار و تعیین تصویر یک نیرو بر روی یک محور به کار ببرید. همچنین
می‌توانید از ضرب سه‌گانهٔ مختلط سه بردار برای به‌دست‌آوردن گشتاور یک نیرو حول
یک محور معین و تعیین فاصلهٔ عمودی بین دو خط استفاده کنید.

محاسبهٔ زاویه‌ای که میان دو بردار تشکیل می‌شود. ابتدا بردارها را برحسب
لفه‌هایشان بنویسید و بزرگی آنها را تعیین کنید. در این صورت کسینوس زاویهٔ مورد
ر از تقسیم حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار به حاصلضرب بزرگیهای آنها به‌دست
آید [معادلهٔ (۳۲.۳)].

. محاسبه تصویر یک بردار $\mathbf{P}$ بر روی یک محور معین OL. اول $\mathbf{P}$ و بردار
یهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ را که مشخصهٔ راستای محور مورد نظر است، به‌صورت مجموع مؤلفه‌هایشان
ریسید. دقت کنید که جهت $\boldsymbol{\lambda}$ درست انتخاب شود (یعنی، $\boldsymbol{\lambda}$ از O به‌طرف L
ند). حالا تصویر مورد نظر از حاصلضرب اسکالر $\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda}$ به‌دست می‌آید. ولی اگر
یهٔ θ میان $\mathbf{P}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ را بدانید، تصویر $\mathbf{P}$ را از رابطهٔ $P\cos\theta$ هم می‌توانید پیدا کنید.

۳. تعیین گشتاور M_{OL} یک نیرو حول یک محور معین M_{OL} را این‌طور
تعریف کردیم

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) \qquad (42.1$$

که در آن $\boldsymbol{\lambda}$ بردار یکهٔ در امتداد OL و $\mathbf{r}$ بردار مکان از هر نقطه‌ای واقع بر خط OL
به هر نقطه‌ای بر خط اثر $\mathbf{F}$ است. اینجا هم مثل مورد گشتاور یک نیرو حول یک
نقطه، انتخاب مناسبترین بردار مکان محاسبات شما را آسان خواهد کرد. البته، باز هم
یادآوری می‌کنیم که بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ باید در جهت صحیح باشند، و ترتیبشان در
ضرب باید رعایت شود. روشی را که باید برای محاسبهٔ گشتاور یک نیرو حول یک
محور به کار ببرید در قسمت ج مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۳ نشان داده‌ایم. به این ترتیب عمل
کنید: اول $\boldsymbol{\lambda}$، $\mathbf{r}$، و $\mathbf{F}$ را برحسب مؤلفه‌های قائم آنها بنویسید و بعد ضرب سه‌گانهٔ
$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$ را تشکیل دهید تا گشتاور حول محور به‌دست آید. در بیشتر مسئله‌های سه‌بعدی ساده‌ترین راه محاسبهٔ حاصلضرب سه‌گانه استفاده از دترمینان است.

چنانکه در متن درس گفتیم، اگر $\boldsymbol{\lambda}$ در راستای یکی از محورهای مختصات باشد، M_{OL} با مؤلفهٔ اسکالر $\mathbf{M}_O$ در امتداد آن محور برابر می‌شود.

۴. تعیین فاصلهٔ عمودی بین دو خط. باید به خاطر داشته باشید که مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{F}_2$ی نیروی $\mathbf{F}$ است که تمایل به واداشتن جسم به دوران حول یک محور OL را دارد (شکل ۲۸.۳). بنابراین نتیجه می‌شود

$$M_{OL} = F_2 d$$

که در آن M_{OL} گشتاور $\mathbf{F}$ حول محور OL و d فاصله عمودی بین OL و خط اثر $\mathbf{F}$ است. این معادله آخری راه ساده‌ای را برای تعیین d به‌دست می‌دهد. ابتدا فرض کنید که نیرویی مانند $\mathbf{F}$ با مقدار معلوم F در امتداد یکی از خطوط و بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ در امتداد خط دیگر قرار دارد. بعد با استفاده ازروش بالا گشتاور M_{OL} نیروی $\mathbf{F}$ حول خط دیگر را حساب کنید. بزرگی مؤلفه موازی، F_1، نیروی $\mathbf{F}$ با استفاده از ضرب اسکالر به‌دست می‌آید:

$$F_1 = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

بعد مقدار F_2 از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

حالا مقادیر M_{OL} و F_2 را در معادلهٔ $M_{OL} = F_2 d$ قرار دهید و مقدار d را پیدا کنید.

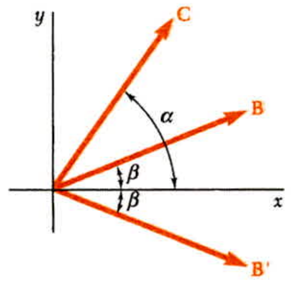
حالا باید پی‌برده باشید که فاصلهٔ عمودی در بند د مسئلهٔ نمونهٔ ۵.۳ به‌خاطر عمود بودن $\mathbf{P}$ بر قطر AG راحت به‌دست آمد. در حالت کلی، دو خط مورد نظر بر هم عمود نخواهند بود، و بنابراین برای تعیین فاصلهٔ عمودی میان آنها باید از روش بالا استفاده کنیم.

مسئله‌ها

۳۵.۳ بردارهای $\mathbf{P} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$، $\mathbf{Q} = 9\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$، و $\mathbf{S} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ داده شده است. حاصلضرب اسکالر (عددی) $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$، $\mathbf{P}\cdot\mathbf{S}$، و $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{S}$ را حساب کنید.

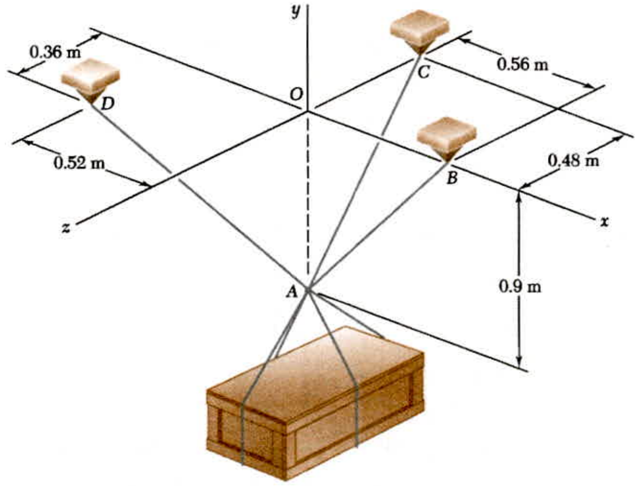
۳۶.۳ شکل حاصلضرب اسکالر $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}'\cdot\mathbf{C}$ که در آن $B = B'$ است را پیدا کنید و بااستفاده از نتایج به‌دست آمده اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$



شکل م ۳۶.۳

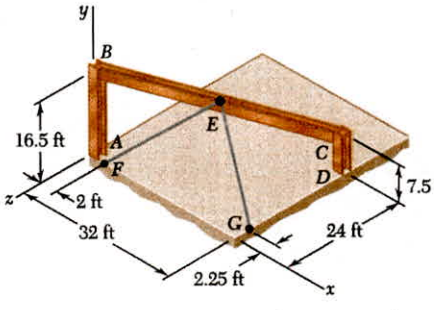
۳۷.۳ سه کابل مطابق شکل برای نگهداری ظرفی به‌کار می‌رود. زاویه ایجاد شده توسط کابلهای AB و AD را تعیین کنید.



شکل م ۳۷.۳ و م ۳۸.۳

۳۸.۳ سه‌کابل مطابق شکل برای نگهداری ظرفی به‌کار می‌رود. زاویهٔ تشکیل شده توسط کابلهای AC و AD را به‌دست آورید.

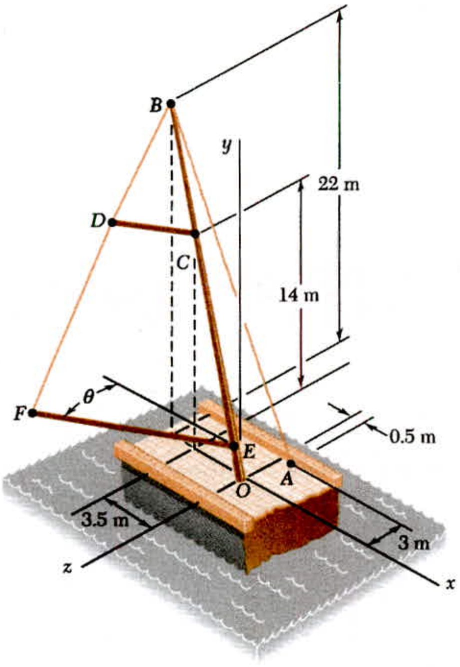
۳۹.۳ عضوهای فولادی قاب AB، BC و CD در نقاط B و C به هم متصل شده و با استفاده از کابلهای EF و EG مهار می‌شوند. می‌دانیم که E در وسط BC و کشش در کابل EF برابر 110 lb است. مطلوب است (الف) زاویهٔ بین عضوهای EF و BC. (ب) تصویر روی BC مربوط به نیروی وارد شده توسط کابل EF در نقطه E.



شکل م ۳۹.۳ و م ۴۰.۳

۴۰.۳ عضوهای فولادی قاب AB، BC، و CD در نقطه B و C به هم متصل شده ... استفاده از کابلهای EF و EG مهار شده‌اند. می‌دانیم اگر E در وسط BC وکشش در کابل EG برابر 117 lb است. مطلوب است (الف) زاویه میان EG و عضو BC، (ب) تص... روی BC از نیروی وارد توسط کابل EG در نقطه E.

۴۱.۳ در شکل یک دیرک و قسمتی از تجهیزات بادبان یک کشتی را می‌بینید. عضو... CD و EF در یک صفحه یکسان، و CD به‌طول 7.5 m که در C با خط قائم زاویه 45° تشکیل می‌دهد رسم شده است. می‌دانیم وقتی $\theta = 15°$ است کشش طناب AB برابر 230 N است. مطلوب است زاویه میان طنابهای AB و BD، (ب) تصویر روی BD ... نیروی وارد شده توسط طناب AB در نقطه B.



شکل م ۴۱.۳ و م ۴۲.۳

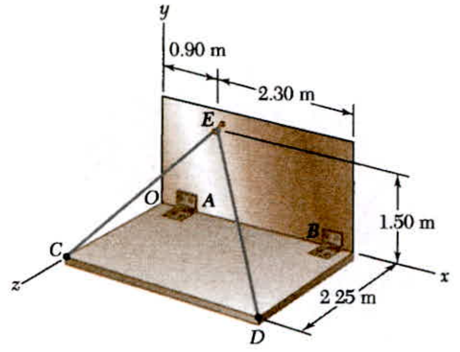
۴۲.۳ در شکل یک دیرک و قسمتی از تجهیزات بادبان یک کشتی را می‌بینید. عضوها... CD و EF در یک صفحه یکسان و CD به‌طول 7.5 m که در C با خط قائم زاویه ... تشکیل می‌دهد، رسم شده است. می‌دانیم وقتی $\theta = 10°$ کشش در طناب BD ... 250 N است. مطلوب است (الف) زاویه میان طناب BD و میله فرعی CD، (ب) تص... روی CD از نیروی وارد شده توسط طناب BD در نقطه D.

۴۳.۳ مطلوب است حجم متوازی‌السطوح شکل مسئله ۲۵.۳ را اگر (الف) $\mathbf{P} = (3\,\text{in})\mathbf{i} - (4\,\text{in})\mathbf{j} + (1\,\text{in})\mathbf{k}$، $\mathbf{Q} = -(7\,\text{in})\mathbf{i} + (6\,\text{in})\mathbf{j} - (8\,\text{in})\mathbf{k}$، $\mathbf{S} = (9\,\text{in})\mathbf{i} - (2\,\text{in})\mathbf{j} - (3\,\text{in})\mathbf{k}$، (ب) $= -(5\,\text{in})\mathbf{i} - (7\,\text{in})\mathbf{j} + (4\,\text{in})\mathbf{k}$، $\mathbf{Q} = (6\,\text{in})\mathbf{i} - (2\,\text{in})\mathbf{j} + (5\,\text{in})\mathbf{k}$، $\mathbf{S} = -(4\,\text{in})\mathbf{i} + (8\,\text{in})\mathbf{j} - (9\,\text{in})\mathbf{k}$.

۴۴.۳ بردارهای $\mathbf{P} = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$، $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$، و $= 8\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ داده شده‌اند. مطلوب است بزرگی S_y را برای اینکه سر بردار هم‌صفحه باشند.

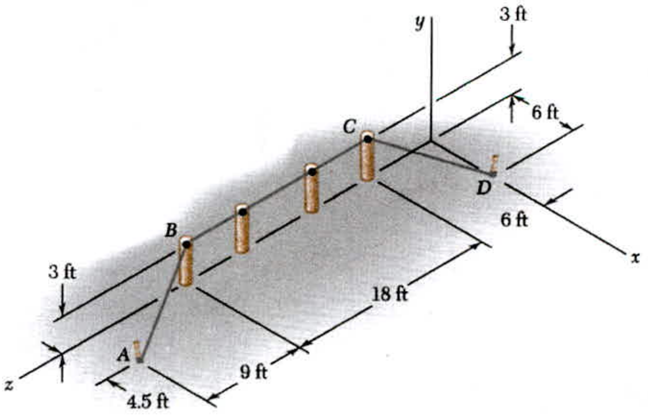
۴۵.۳ سکوی راستگوشه در A و B آویزان شده است و توسط کابلی که از روی یک ... بدون اصطکاک در E می‌گذرد، نگهداری می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل 1349 N است. مطلوب است گشتاور حول هر یک از محور مختصات را برای نیروی وارد شده توسط کابل در نقطه C.

۴۶.۳ سکوی راستگوشه در A و B آویزان شده است و توسط کابلی که از روی یک ... بدون اصطکاک در E می‌گذرد، نگهداری می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل 49 N... است. مطلوب است گشتاور حول هر یک از محور مختصات را برای نیروی وارد شده تو... کابل در نقطه D.



شکل م ۴۵.۳ و م ۴۶.۳

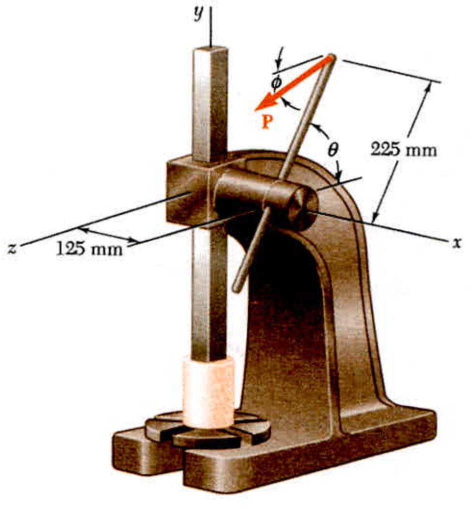
۴۷.۳ نرده‌ای از تیرهای چوبی و کابل فولادی تشکیل شده است. کابل به تمام تیرها متصل ـاست و در نقاط A و B محکم به زمین بسته شده است. می‌دانیم مجموع گشتاورهای حول ـحور z نیروهای وارد شده توسط کابل C روی تیرها در نقاط B و C برابر ‎$-۴۸\,lb\cdot ft$‎ است. طلوب است بزرگی $\mathbf{T}_{CD}$ را اگر $T_{BA} = ۱۴\,lb$ باشد.



شکل م ۴۷.۳ و م ۴۸.۳

۴۸.۲ نرده‌ای از تیرهای چوبی و کابل فولادی تشکیل شده است. کابل در تمام تیرها متصل ـست و در نقاط A و D به زمین محکم بسته شده است. اگر مجموع گشتاورهای حول محور y نیروهای وارد شده توسط کابل C روی تیرها در نقاط B و C برابر ‎$۱۵۶\,lb\cdot ft$‎ باشد، مطلوب ـست بزرگی $\mathbf{T}_{AB}$ را اگر $T_{CD} = ۷٫۵\,lb$ باشد.

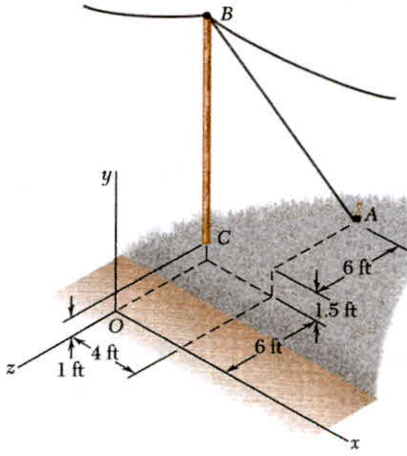
۴۹.۲ نیروی $\mathbf{P}$ بر اهرم میل وارد می‌شود. می‌دانیم که p در صفحه‌ای موازی با صفحه yz ـ $M_x = ۲۶\,N\cdot m$، $M_y = -۲۳\,N\cdot m$، $M_z = -۴\,N\cdot m$ قرار دارد. مقدار $\mathbf{P}$ و ـندازه‌های ϕ و θ را به‌دست آورید.



شکل م ۴۹.۳ و م ۵۰.۳

۵۰.۳ نیروی $\mathbf{P}$ بر اهرم میل وارد می‌شود. می‌دانیم که $\mathbf{P}$ در صفحه‌ای موازی با صفحه yz و $M_y = -۲۰\,N\cdot m$ و $M_z = -۳٫۵\,N\cdot m$ قرار دارد. مطلوب است گشتاور M_x نیروی حول $\mathbf{P}$ وقتی $\theta = ۶۰^\circ$ باشد.

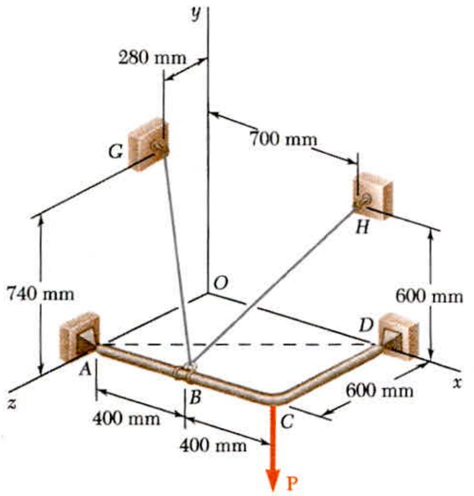
۵۱.۳ برای استفاده مطلوب از ستون BC آن را توسط کابل AB مطابق شکل مهار می‌کنند. اگر مقدار نیروی وارد شده توسط کابل در B برابر ‎$۷۰\,lb$‎ باشد و گشتاور آن نیرو حول محور x برابر ‎$-۷۶۳\,lb\cdot ft$‎ باشد، مطلوب است طول تیر.



شکل م ۵۱.۳ و م ۵۲.۳

۵۲.۳ برای استفاده مطلوب از ستون BC آن را توسط کابل AB مطابق شکل مهار می‌کنند. اگر گشتاورهای حول محورهای x و z نیروی وارد شده توسط کابل در B به ترتیب ‎$-۹۰۰\,lb\cdot ft$‎ و ‎$-۳۱۵\,lb\cdot ft$‎ باشد، مطلوب است طول تیر.

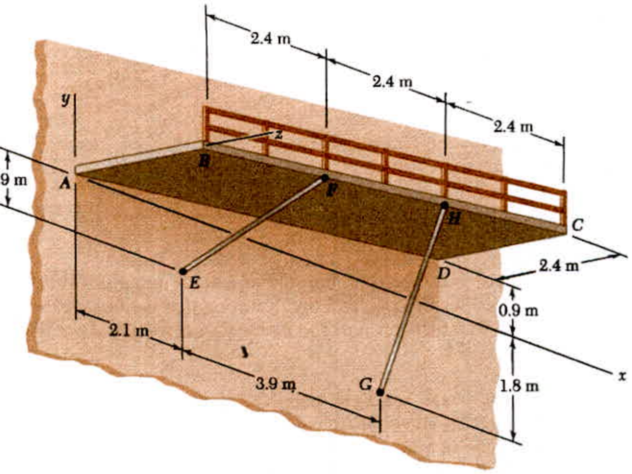
۵۳.۳ قاب ACD در نقطه A و D آویزان است و توسط کابلی در حلقه B می‌گذرد و سپس در G و H به قلاب متصل شده و نگهداری می‌شود. می‌دانیم کشش درکابل ‎$۱۱۲۵\,N$‎ است. مطلوب است گشتاور حول خط مورب AD که از نیروی وارد بر قاب توسط قسمت BH از کابل ایجاد می‌شود.



شکل م ۵۳.۳ و م ۵۴.۳

۵۴.۳ قاب ACD در نقاط A و D آویزان است و توسط کابلی که از حلقه B گذشته و به قلابهای G و H متصل می‌شود نگهداری می‌شود. می‌دانیم که کشش درکابل ‎$۱۱۲۵\,N$‎ است. معین کنید گشتاور حول خط مایل AD از نیروی وارد بر قاب که توسط قسمت BG درکابل ایجاد می‌شود.

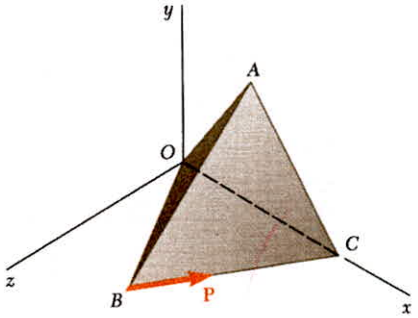
۵۵.۳ قسمت $ABCD$ از یک گذرگاه مایل طره‌ای به عرض ‎$۲٫۴\,m$‎ موقتاً توسط عضوهای EF و GH نگهداری می‌شود. می‌دانیم که نیروی فشاری وارد بر عضو EF گذرگاه در F برابر ‎$۲۴٫۳\,kN$‎ است. مطلوب است گشتاور آن نیرو حول لبه AD از گذرگاه.



شکل م ۵۵.۳ و م ۵۶.۳

۵۶.۳ قسمت $ABCD$ از یک گذرگاه مایل طره‌ای به عرض ۲٫۴ m موقتاً توسط عضوهای EF و GH نگهداری می‌شود. می‌دانیم که نیروی فشاری وارد بر عضو GH گذرگاه در H برابر ۲۱٫۳ kN است. مطلوب است گشتاور آن نیرو حول لبهٔ AD از گذرگاه.

۵۷.۳ چهاروجهی قائمی دارای شش یال (لبه) به طول a است. نیروی $\mathbf{P}$ مطابق شکل در امتداد لبهٔ BC وارد می‌شود. معین کنید گشتاور $\mathbf{P}$ حول لبهٔ OA.



شکل م ۵۷.۳ و م ۵۸.۳

۵۸.۳ چهاروجهی قائمی دارای شش یال (لبه) به طول a است. (الف) نشان دهید که دو لبه روبرو مانند OA و BC بر هم عمودند (ب) با استفاده از این خاصیت و نتیجه به‌دست آمده در مسئله ۵۷.۳ فاصله عمودی بین لبه‌های OA و BC را به‌دست آورید.

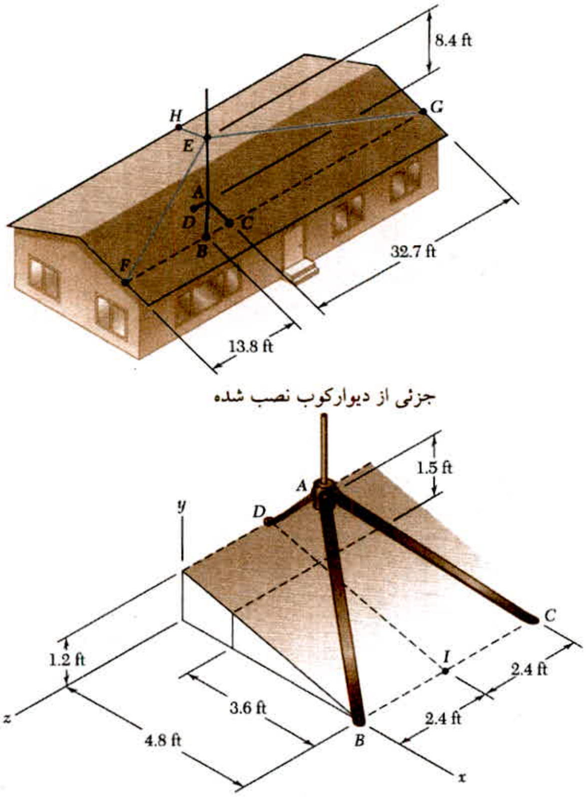
۵۹.۳ دیرکی بر سقف یک خانه نصب شده است و با استفاده از دیوارکوب $ABCD$ و کابلهای EF و EG و EH مهار می‌شود. می‌دانیم که نیروی وارد توسط کابل EF در E برابر ۲۹٫۷ lb است. مطلوب است گشتاوری که نیرو حول خط اتصال دو نقطه D و I ایجاد می‌کند.

۶۰.۳ دیرکی برسقف یک خانه نصب شده است و با استفاده از دیوارکوب $ABCD$ و کابلهای EF و EG و EH مهار می‌شود. می‌دانیم که نیروی وارد توسط کابل EG در E برابر ۲۱٫۶ lb است. مطلوب است گشتاوری که نیرو حول خط اتصال دو نقطه D و I ایجاد می‌کند.

۶۱.۳ دو نیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ در فضا دارای مقدار یکسان Fاند. ثابت کنید که گشتاور $\mathbf{F}_1$ حول خط اثر $\mathbf{F}_2$ برابر گشتاور $\mathbf{F}_2$ حول خط اثر $\mathbf{F}_1$ است.

***۶۲.۳** در مسئله ۵۳.۳ مطلوب است فاصله عمودی میان قسمت BH از کابل دو خط مورب AD.

***۶۳.۳** در مسئله ۵۴.۳ مطلوب است فاصله عمودی میان قسمت BG از کابل و خط مورب AD.



شکل م ۵۹.۳ و م ۶۰.۳

***۶۴.۳** در مسئله ۵۹.۳ مطلوب است فاصله عمودی میان کابل EF و خط اتصال دو نقطه D و I.

***۶۵.۳** در مسئله ۶۰.۳ مطلوب است فاصله عمودی میان کابل EG و خط اتصال دو نقطه D و I.

***۶۶.۳** در مسئله ۵۵.۳ مطلوب است فاصله عمودی میان عضو EF و لبه AD از گذرگاه.

***۶۷.۳** در مسئله ۵۶.۳ مطلوب است فاصله عمودی عضو GH و لبه AD از گذرگاه.

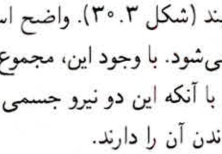
۱۲.۳ گشتاور کوپل

دو نیروی $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ را که بزرگی برابر، خط اثرهای موازی و جهتهای خلاف هم داشته باشند اصطلاحاً کوپل می‌گویند (شکل ۳۰.۳). واضح است که مجموع مؤلفه‌های این دو نیرو در هر راستایی صفر می‌شود. با وجود این، مجموع گشتاورهای این دو نیرو حول یک نقطهٔ معین صفر نیست. با آنکه این دو نیرو جسمی را که به آن اثر می‌کنند انتقال نمی‌دهند، اما تمایل به چرخاندن آن را دارند.

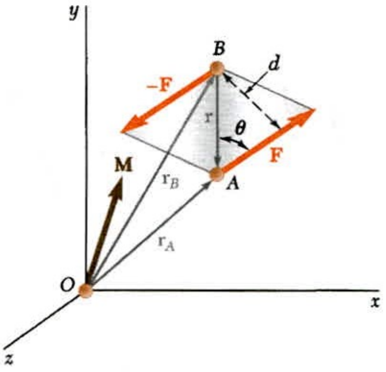
اگر بردار مکانهای نقطه اثرهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ را به‌ترتیب با $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ نشان بدهیم (شکل ۳۱.۳)، مجموع گشتاورهای این دو نیرو حول O به این صورت در می‌آید

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

با قرار دادن $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$ که در آن $\mathbf{r}$ بردار واصل نقطه اثرهای دو نیرو است، نتیجه



شکل ۳۰.۳



شکل ۳۱.۳

ی‌گیریم که مجموع گشتاورهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ را حول نقطهٔ O می‌شود با بردار زیر نشان داد:

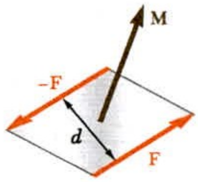
$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۴۷.۳)$$

ه بردار $\mathbf{M}$ گشتاور کوپل می‌گویند. گشتاور کوپل برداری است عمود بر صفحهٔ شامل دو نیرو و بزرگیش برابر است با

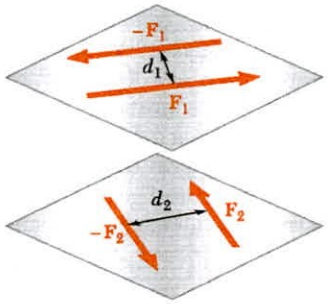
$$M = rF\sin\theta = Fd \qquad (۴۸.۳)$$

که d فاصلهٔ عمودی میان خط اثرهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ است. جهت $\mathbf{M}$ از روی قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود.

چون بردار $\mathbf{r}$ در (۴۷.۳) از انتخاب مبدأ محورهای مختصات (O) مستقل است، نابراین اگر گشتاورهای $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ را حول نقطهٔ دیگری مثل O' هم محاسبه کرده بودیم مین نتیجه به‌دست می‌آمد. پس، گشتاور $\mathbf{M}$ یک کوپل بردار آزادی است (بخش ۳.۲) که می‌شود آن را در هر نقطه‌ای وارد کرد (شکل ۳۲.۳).



شکل ۳۲.۳



شکل ۳۳.۳

عکس ۱.۳ نیروهای موازی به‌سمت پایین و بالا با مقدار برابر که بر بازوهای آچاری وارد می‌شوند، مثالی از یک کوپل هستند.

از تعریف گشتاور کوپل این نتیجه را هم می‌گیریم که در مورد دو کوپل، یکی متشکل از نیروهای $\mathbf{F}_۱$ و $-\mathbf{F}_۱$ و دیگری متشکل از نیروهای $\mathbf{F}_۲$ و $-\mathbf{F}_۲$ (شکل ۳۳.۳)، گشتاورها به‌شرطی برابر خواهند بود که

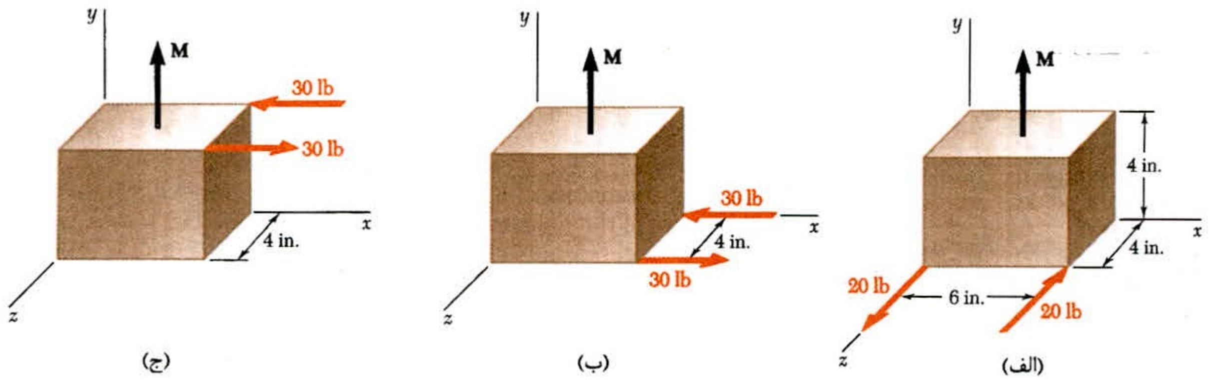
$$F_۱ d_۱ = F_۲ d_۲ \qquad (۴۹.۳)$$

باشد و علاوه بر این دو کوپل در صفحه‌های موازی (یا در یک صفحه) قرار داشته باشند و جهتشان یکی باشد.

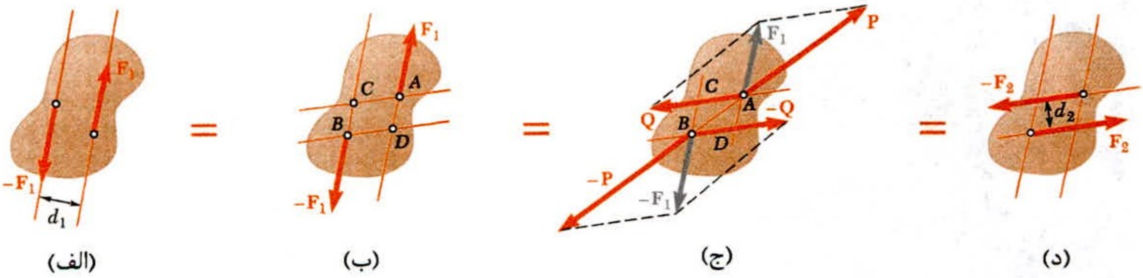
۱۳.۳ کوپلهای معادل

در شکل ۳۴.۳ سه کوپل را می‌بینید، که یکی‌یکی به یک جعبهٔ مکعب مستطیل شکل اعمال شده‌اند. به‌طوری که در بخش گذشته دیدید، تنها حرکتی که ممکن است یک کوپل به یک جسم صلب بدهد چرخش است. از آنجا که این کوپلها هرسه گشتاور یکسانی برابر با $\mathbf{M}$ دارند، یعنی راستای هر سه یکسان و بزرگی آنها $M = ۱۲۰$ lb. in است، انتظار داریم که هر سه، اثر یکسانی بر جعبه داشته باشند.

این نتیجه اگرچه معقول به نظر می‌رسد اما نباید آن را شتابزده قبول کنیم. با آنکه درک شهودی کمک بزرگی به مطالعهٔ مکانیک می‌کند، ولی نباید آن را به‌جای استدلال منطقی پذیرفت. قبل از بیان یکسان بودن اثر دو سیستم (یا دو گروه) نیرو بر یک جسم صلب، باید این واقعیت را براساس شواهد تجربی‌ای که تا حالا به‌دست آورده‌ایم اثبات



شکل ۳۴.۳



شکل ۳۵.۳

کنیم. این شواهد عبارت‌اند از قانون متوازی‌الاضلاع برای جمع دو نیرو (بخش ۲.۲) و اصل قابلیت انتقال (بخش ۳.۳). بنابراین می‌گوییم دو سیستم نیرو معادل‌اند (یعنی اثر یکسانی بر روی جسم صلب دارند) به‌شرطی که بتوانیم با یک یا چند عمل زیر، یکی را به دیگری تبدیل کنیم: (۱) به‌جای دو نیرویی که به یک ذره وارد می‌شوند برایند آنها را قرار بدهیم؛ (۲) یک نیرو را به دو مؤلفه تجزیه کنیم؛ (۳) دو نیروی مساوی را که در خلاف جهت هم به یک ذره وارد می‌شوند، حذف کنیم؛ (۴) دو نیروی مساوی در جهتهای مخالف بر یک ذره وارد کنیم؛ (۵) نیرو را در امتداد خط اثرش حرکت دهیم. هریک از این اعمال به‌سهولت براساس قانون متوازی‌الاضلاع و اصل قابلیت انتقال توجیه می‌شود.

حالا ثابت می‌کنیم که دو کوپل دارای گشتاور یکسان ($\mathbf{M}$) معادل‌اند. ابتدا دو کوپل واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این صفحه بر صفحهٔ شکل منطبق است (شکل ۳۵.۳). کوپل اول از نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ با بزرگی F_1 که به فاصلهٔ d_1 از هم هستند [شکل ۳۵.۳(الف)]، و کوپل دوم از نیروهای $\mathbf{F}_2$ و $-\mathbf{F}_2$ با بزرگی F_2 که به فاصلهٔ d_2 از هم واقع‌اند، تشکیل شده است [شکل ۳۵.۳(د)]. چون دو کوپل گشتاور یکسانی ($\mathbf{M}$)، عمود بر صفحهٔ شکل دارند، باید هم‌جهت باشند (که اینجا جهت آنها را پاد ساعتگرد فرض کرده‌ایم) و رابطهٔ

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{۴۹.۳}$$

باید برقرار باشد. برای اینکه معادل بودن این دو کوپل را ثابت کنیم، نشان می‌دهیم که کوپل اول را می‌شود به‌وسیلهٔ عملیاتی که در بالا گفتیم به کوپل دوم تبدیل کرد.

محل تقاطع خط اثرهای دو کوپل را با A، B، C، و D نشان می‌دهیم. نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ را آنقدر می‌لغزانیم تا مطابق شکل ۳۵.۳(ب) به‌ترتیب به A و B متصل شوند. بعد نیروی $\mathbf{F}_1$ را به مؤلفه‌های $\mathbf{P}$ در امتداد AB و مؤلفه $\mathbf{Q}$ در امتداد AC [شکل ۳۵.۳(ج)] تجزیه می‌کنیم، نیروی $-\mathbf{F}_1$ را هم عیناً به مؤلفه‌های $-\mathbf{P}$ در امتداد AB و $-\mathbf{Q}$ در امتداد BD تجزیه می‌کنیم. بزرگی نیروهای $\mathbf{P}$ و $-\mathbf{P}$ برابر و خط اثرشان یکسان است و در خلاف جهت هم اثر می‌کنند؛ آنها را می‌شود در امتداد خط اثر مشترکشان حرکت داد تا هر دو به یک نقطه اثر کنند و بعد هم آنها را حذف کرد. پس کوپلی که از $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ تشکیل شده بود، به کوپلی متشکل از $\mathbf{Q}$ و $-\mathbf{Q}$ تبدیل می‌شود.

حالا نشان می‌دهیم که نیروهای $\mathbf{Q}$ و $-\mathbf{Q}$ به‌ترتیب با نیروهای $\mathbf{F}_2$ و $-\mathbf{F}_2$ برابرند. گشتاور کوپل متشکل از $\mathbf{Q}$ و $-\mathbf{Q}$ را می‌شود با محاسبه گشتاور $\mathbf{Q}$ حول B به‌دست آورد؛ گشتاور کوپل متشکل از $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ هم برابر با گشتاور $\mathbf{F}_1$ حول B است، ولی بنا به قضیهٔ وارینون گشتاور $\mathbf{F}_1$ برابر با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌هایش $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ است. چون گشتاور $\mathbf{P}$ حول B صفر است، گشتاور کوپل متشکل از $\mathbf{Q}$ و $-\mathbf{Q}$ باید با گشتاور کوپل متشکل از $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ برابر باشد. با یادآوری (۴۹.۳)، می‌نویسیم

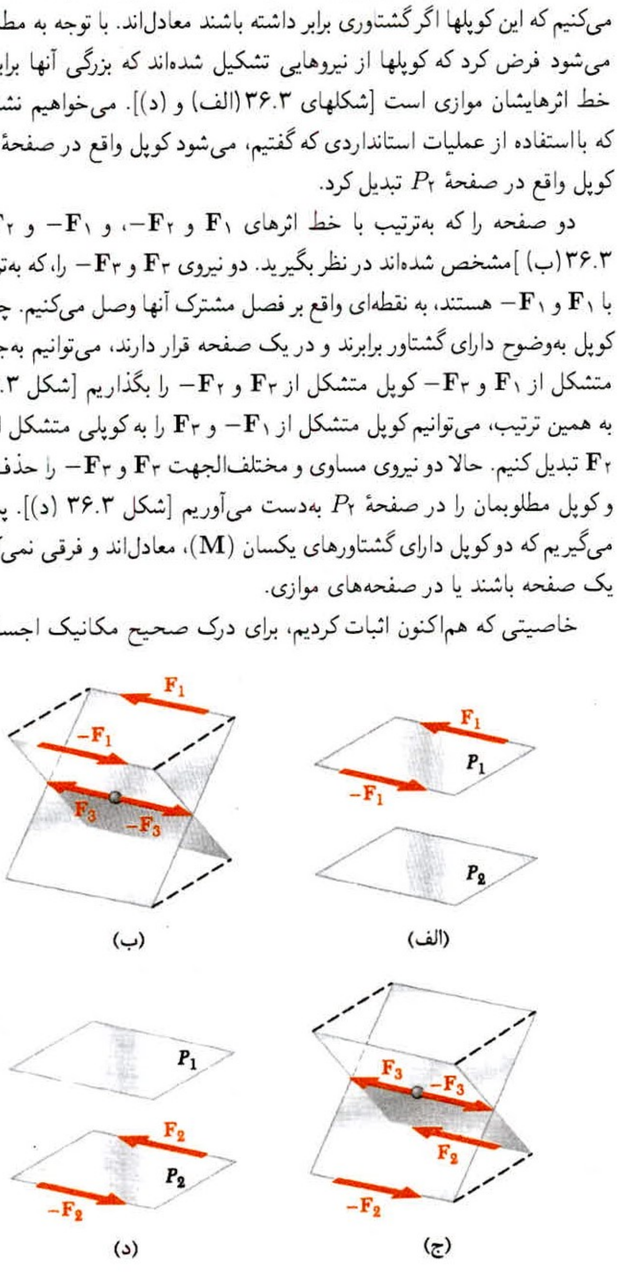
$$Qd_2 = F_1 d_1 = F_2 d_2 \implies Q = F_2$$

پس نیروهای $\mathbf{Q}$ و $-\mathbf{Q}$ به‌ترتیب با نیروهای $-\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_2$ برابرند، و کوپل شکل ۳۵.۳(الف) با کوپل ۳۵.۳(د) معادل است.

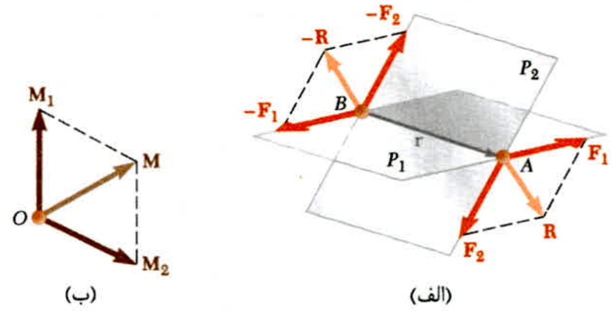
حالا دو کوپل را در نظر بگیرید که در صفحه‌های موازی P_1 و P_2 باشند. ثابت می‌کنیم که این کوپلها اگر گشتاوری برابر داشته باشند معادل‌اند. با توجه به مطالب قبل می‌شود فرض کرد که کوپلها از نیروهایی تشکیل شده‌اند که بزرگی آنها برابر با F ، خط اثرهایشان موازی است [شکلهای ۳۶.۳(الف) و (د)]. می‌خواهیم نشان بدهیم که با استفاده از عملیات استانداردی که گفتیم، می‌شود کوپل واقع در صفحهٔ P_1 را به کوپل واقع در صفحهٔ P_2 تبدیل کرد.

دو صفحه را که به‌ترتیب با خط اثرهای $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_2$، و $-\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ [شکل ۳۶.۳(ب)] مشخص شده‌اند در نظر بگیرید. دو نیروی $\mathbf{F}_3$ و $-\mathbf{F}_3$ را، که به‌ترتیب برابر با $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ هستند، به نقطه‌ای واقع بر فصل مشترک آنها وصل می‌کنیم. چون هر دو کوپل به‌وضوح دارای گشتاور برابرند و در یک صفحه قرار دارند، می‌توانیم به‌جای کوپل متشکل از $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_3$ کوپل متشکل از $\mathbf{F}_2$ و $-\mathbf{F}_3$ را بگذاریم [شکل ۳۶.۳(ج)]. به همین ترتیب، می‌توانیم کوپل متشکل از $-\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_3$ را به کوپلی متشکل از $\mathbf{F}_3$ و $-\mathbf{F}_2$ تبدیل کنیم. حالا دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت $\mathbf{F}_3$ و $-\mathbf{F}_3$ را حذف می‌کنیم و کوپل مطلوبمان را در صفحهٔ P_2 به‌دست می‌آوریم [شکل ۳۶.۳ (د)]. پس نتیجه می‌گیریم که دو کوپل دارای گشتاورهای یکسان ($\mathbf{M}$)، معادل‌اند و فرقی نمی‌کند که در یک صفحه باشند یا در صفحه‌های موازی.

خاصیتی که هم‌اکنون اثبات کردیم، برای درک صحیح مکانیک اجسام صلب



شکل ۳۶.۳



شکل ۳۷.۳

سیار مهم است. این خاصیت نشان می‌دهد که وقتی کوپلی بر یک جسم صلب وارد می‌شود، مهم نیست که دو نیروی تشکیل‌دهنده این کوپل به کجا وارد می‌شوند یا چه بزرگی و راستایی دارند. تنها چیزی که مهم است، گشتاور کوپل (بزرگی و راستا) است. کوپلهای با گشتاورهای برابر اثر یکسانی بر روی جسم صلب دارند.

۱۴.۳ جمع بستن کوپلها

دو صفحهٔ متقاطع P_1 و P_2، و دو کوپل را که به‌ترتیب در صفحه‌های P_1 و P_2 وارد می‌شوند، در نظر بگیرید. می‌توانیم ــ بدون اینکه کلیت مسئله از بین برود ــ فرض کنیم که کوپل واقع در P_1 از دو نیروی $\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_1$ تشکیل شده است که بر فصل مشترک دو صفحه عمودند و به‌ترتیب به نقطه‌های A و B وارد می‌شوند [شکل ۳۷.۳ (الف)]. به همین ترتیب، فرض می‌کنیم که کوپل واقع در P_2 هم متشکل از دو نیروی $\mathbf{F}_2$ و $-\mathbf{F}_2$ است که بر AB عمودند و به‌ترتیب به نقطه‌های A و B وارد می‌شوند. واضح است که $\mathbf{R}$ (برایند دو نیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$) و $-\mathbf{R}$ (برایند دو نیروی $-\mathbf{F}_1$ و $-\mathbf{F}_2$) تشکیل یک کوپل می‌دهند. اگر بردار واصل B به A را با $\mathbf{r}$ نشان بدهیم و تعریف گشتاور کوپل (بخش ۱۲.۳) را به یاد آوریم گشتاور کوپل حاصل را می‌توانیم به این صورت بیان کنیم:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{r}\times(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

که بنا به قضیهٔ وارینون خواهیم داشت

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_1 + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_2$$

اما اولین جملهٔ عبارت بالا نمایندهٔ گشتاور ($\mathbf{M}_1$) ناشی از کوپل واقع در صفحهٔ P_1 و دومین جملهٔ آن نمایندهٔ گشتاور ($\mathbf{M}_2$) ناشی از کوپل واقع در صفحهٔ P_2 است، بنابراین داریم

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \qquad (۵۰.۳)$$

و نتیجه می‌گیریم که مجموع دو کوپل با گشتاورهای $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ کوپلی است با گشتاور $\mathbf{M}$، که برابر با جمع برداری $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ است [شکل ۳۷.۳ (ب)].

۱۵.۳ کوپلها را می‌توان با بردار نمایش داد

چنانکه در بخش ۱۳.۳ دیدید، کوپلهایی که گشتاور برابر دارند، چه در یک صفحه اثر کنند و چه در صفحه‌های موازی، معادل‌اند. بنابراین برای تعیین اثر یک کوپل بر روی یک جسم صلب، نیازی به رسم نیروهای واقعی تشکیل‌دهندهٔ کوپل نیست [شکل ۳۸.۳ (الف)]. کافی است پیکانی رسم کنیم که بزرگی و راستای آن همان بزرگی و راستای گشتاور ($\mathbf{M}$) آن کوپل باشد [شکل ۳۸.۳ (ب)]. از طرف دیگر، در بخش ۱۴.۳ دیدیم که مجموع دو کوپل خود یک کوپل است و دیدیم که گشتاور $\mathbf{M}$ کوپل برایند را می‌شود از جمع برداری گشتاورهای $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ کوپلهای داده شده به‌دست آورد. پس، کوپلها از قانون جمع بردارها تبعیت می‌کنند، و پیکانی را که در شکل ۳۸.۳ (ب) برای نشان دادن کوپل تعریف شده در شکل ۳۸.۳ (الف) به کار برده‌ایم، به‌راستی می‌توان یک بردار تلقی کرد.

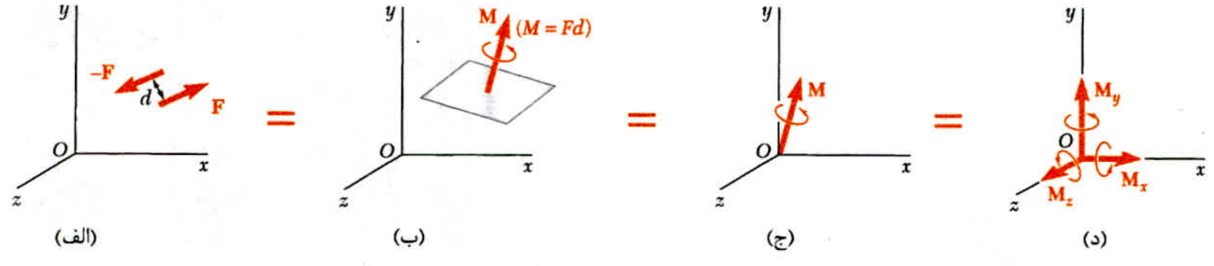
بردار نمایندهٔ یک کوپل را بردار کوپل می‌گویند. توجه کنید که در شکل ۳۸.۳، برای متمایز کردن بردار کوپل (که نمایندهٔ خود کوپل است)، از گشتاور کوپل (که در شکلهای قبلی آن را با پیکان معمولی نشان داده بودیم) نماد را هم افزوده‌ایم تا با بردارهای نمایندهٔ نیروها اشتباه نشود. بردار کوپل هم، مثل گشتاور کوپل، بردار آزاد است. بنابراین، در صورت لزوم می‌شود نقطهٔ اثرش را در مبدأ دستگاه مختصات اختیار کرد [شکل ۳۸.۳ (ج)]. علاوه بر این، بردار کوپل $\mathbf{M}$ را می‌شود به مؤلفه‌های $\mathbf{M}_x$، $\mathbf{M}_y$، و $\mathbf{M}_z$ در امتداد محورهای مختصات تجزیه کرد [شکل ۳۸.۳ (د)]، که به‌ترتیب نمایندهٔ کوپلهایی هستند که در صفحه‌های yz، zx، و xy واقع‌اند.

۱۶.۳ تجزیهٔ یک نیروی معین به یک نیرو در نقطهٔ O و یک کوپل

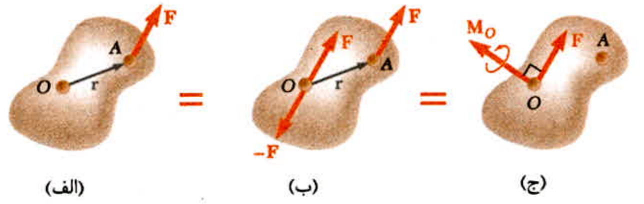
نیروی $\mathbf{F}$ را در نظر بگیرید که در نقطهٔ A با بردار مکان $\mathbf{r}$ تعریف شده است و به یک جسم صلب اثر می‌کند [شکل ۳۹.۳ (الف)]. فرض کنید که به دلیلی می‌بایست این نیرو به نقطهٔ O وارد می‌شد. می‌دانیم که $\mathbf{F}$ را می‌شود در امتداد خط اثرش حرکت داد (اصل قابلیت انتقال)؛ اما نمی‌شود آن را به نقطه‌ای مثل O که برروی خط اثر اولیهٔ نیرو نیست منتقل کرد، مگر اینکه اثر $\mathbf{F}$ را بر روی جسم صلب تغییر بدهیم.

اما می‌توانیم دو نیرو به نقطهٔ O وارد کنیم، یکی برابر با $\mathbf{F}$ و دیگری مساوی $-\mathbf{F}$، بدون اینکه اثر نیروی اولیه بر روی جسم صلب را تغییر بدهیم [شکل ۳۹.۳ (ب)]. حالا، در نتیجهٔ این تبدیل، یک نیروی $\mathbf{F}$ به نقطهٔ O وارد می‌شود؛ دو نیروی دیگر کوپلی با گشتاور $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ تشکیل می‌دهند. پس، هر نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر یک جسم صلب را می‌توانیم به نقطهٔ دلبخواهی مانند O منتقل کنیم، به شرط آنکه کوپلی به آن نقطه اضافه کنیم که گشتاورش برابر با گشتاور $\mathbf{F}$ حول نقطهٔ O باشد. این کوپل تمایل دارد به جسم صلب همان حرکت دورانی‌ای را بدهد که نیروی $\mathbf{F}$ قبل از انتقال به نقطهٔ O تمایل به ایجاد آن را داشت. این کوپل با یک بردار کوپل $\mathbf{M}_O$ نشان داده می‌شود که عمود بر صفحهٔ شامل $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است. چون $\mathbf{M}_O$ یک بردار آزاد است، آن را می‌شود به هر نقطه‌ای اثر داد؛ اما برای سهولت، بردار کوپل را معمولاً همراه با $\mathbf{F}$، به نقطهٔ O اثر می‌دهند، و به ترکیب حاصل سیستم کوپل-نیرو می‌گویند [شکل ۳۹.۳ (ج)].

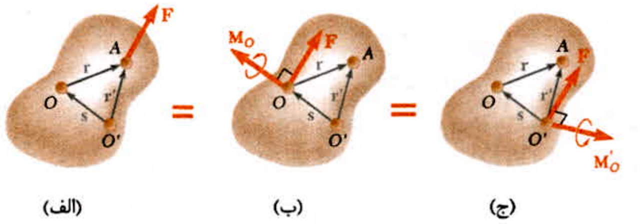
اگر نیروی $\mathbf{F}$ از نقطهٔ A به نقطهٔ دیگری مثل O' حرکت داده شده بود [شکل



شکل ۳۸.۳



شکل ۳۹.۳



شکل ۴۰.۳

۴۰.۳ (الف) و (ج)] گشتاور $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ نیروی **F** حول نقطهٔ O' را می‌بایست محاسبه می‌کردیم، و یک سیستم کوپل نیروی جدید، متشکل از **F** و بردار کوپل $\mathbf{M}_{O'}$، به نقطهٔ O' وارد می‌کردیم. رابطهٔ موجود بین گشتاورهای **F** حول O و O' با نوشتن معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \qquad (۵۱.۳)$$

که **s** برداری است که نقطهٔ O' را به نقطهٔ O وصل می‌کند. پس، $\mathbf{M}_{O'}$، گشتاور نیروی **F** حول O'، از افزودن ضرب برداری $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ که نمایندهٔ گشتاور نیروی **F** حول O' است، به $\mathbf{M}_O$، که گشتاور **F** حول O است، به‌دست می‌آید.

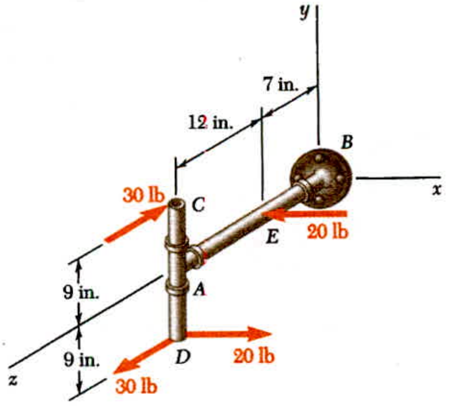
این نتیجه را می‌توانستیم یک‌جور دیگر هم به‌دست بیاوریم، برای انتقال سیستم کوپل-نیرو از O به O' [شکل ۴۰.۳ (ب) و (ج)] بردار کوپل $\mathbf{M}_O$ را می‌توانیم آزادانه به O' ببریم؛ اما برای بردن نیروی **F** از O به O'، باید بردار کوپلی که گشتاورش معادل با گشتاور نیروی **F** حول O' باشد به **F** بیفزاییم. پس، بردار کوپل $\mathbf{M}_{O'}$ باید مجموع $\mathbf{M}_O$ و بردار $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ باشد.

چنانکه در بالا گفتیم، سیستم کوپل-نیروی حاصل از انتقال یک نیروی **F** از نقطهٔ A به نقطهٔ O متشکل از **F** و بردار کوپل $\mathbf{M}_O$ عمود بر **F** است. به‌عکس، هر سیستم کوپل-نیروی متشکل از نیروی **F** و بردار کوپل $\mathbf{M}_O$ را که متقابلاً بر هم عمود باشند می‌شود به یک تک‌نیرو تبدیل کرد. برای این کار باید نیروی **F** را در صفحهٔ عمود بر $\mathbf{M}_O$ طوری جابه‌جا کرد که گشتاور آن حول O با گشتاور کوپلی که قرار است حذف بشود برابر شود.

عکس ۲.۳ نیروی وارد از هر دست بر آچار را می‌توان با یک سیستم کوپل-نیروی معادل وارد بر مهره جایگزین کرد.

مسئلهٔ نمونه ۶.۳

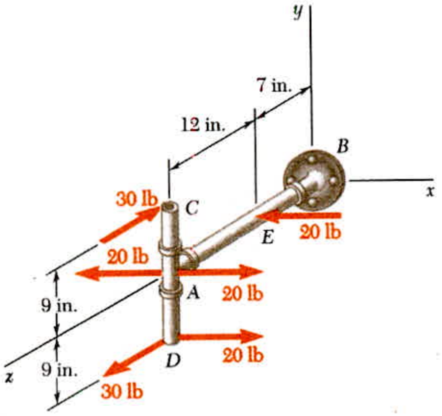
مؤلفه‌های تک‌کوپل معادل با دو کوپل نشان داده شده را تعیین کنید.



حل:

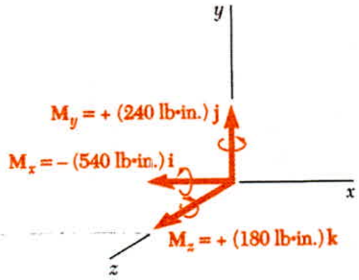
اگر دو نیروی مساوی ۲۰ -lb را در خلاف جهت هم به نقطهٔ A اعمال کنیم، محاسباتمان ساده می‌شود. به این ترتیب می‌توانیم کوپل نیروی ۲۰ -lb اولیه را به دو کوپل نیروی ۲۰ -lb جدید تبدیل کنیم که یکی از آنها در صفحهٔ zx و دیگری در صفحهٔ موازی با صفحهٔ xy واقع می‌شود. سه کوپل نشان داده شده در شکل را می‌توانیم با سه بردار $\mathbf{M}_x$، $\mathbf{M}_y$، و $\mathbf{M}_z$ در امتداد محورهای مختصات نشان دهیم. گشتاورهای متناظر عبارت‌اند از

$$M_x = -(۳۰\ \text{lb})(۱۸\ \text{in}) = -۵۴۰\ \text{lb} \cdot \text{in}$$
$$M_y = +(۲۰\ \text{lb})(۱۲\ \text{in}) = +۲۴۰\ \text{lb} \cdot \text{in}$$
$$M_z = +(۲۰\ \text{lb})(۹\ \text{in}) = +۱۸۰\ \text{lb} \cdot \text{in}$$



این سه گشتاور نمایندهٔ مؤلفه‌های تک‌کوپل **M**اند که معادل با دو کوپل اولیه است. می‌نویسیم

◄ $\mathbf{M} = -(۵۴۰\ \text{lb} \cdot \text{in})\mathbf{i} + (۲۴۰\ \text{lb} \cdot \text{in})\mathbf{j} + (۱۸۰\ \text{lb} \cdot \text{in})\mathbf{k}$

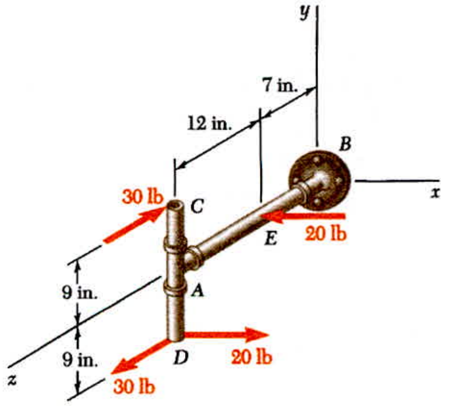


راه حل دیگر. مؤلفه‌های تک‌کوپل معادل **M** را همچنین می‌توانیم با محاسبهٔ مجموع گشتاورهای چهار نیروی داده شده حول یک نقطهٔ دلبخواه پیداکنیم. اگر این نقطه را D بگیریم، می‌نویسیم

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D$$
$$= (۱۸\,\mathrm{in})\mathbf{j}\times(-۳۰\,\mathrm{lb})\mathbf{k} + [(۹\,\mathrm{in})\mathbf{j} - (۱۲\,\mathrm{in})\mathbf{k}]\times(-۲۰\,\mathrm{lb})\mathbf{i}$$

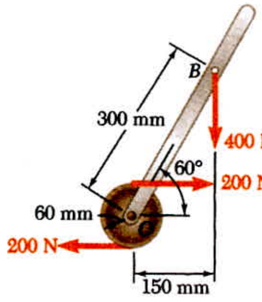
و، پس از محاسبهٔ ضربهای برداری می‌رسیم به

$$\mathbf{M} = -(۵۴۰\,\mathrm{lb\cdot in})\mathbf{i} + (۲۴۰\,\mathrm{lb\cdot in})\mathbf{j} + (۱۸۰\,\mathrm{lb\cdot in})\mathbf{k} \quad ◄$$



مسئلهٔ نمونه ۷.۳

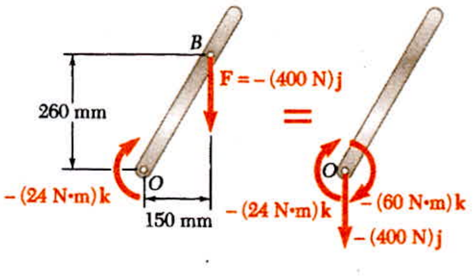
به‌جای کوپل و نیروی نشان داده شده یک تک‌نیرو به اهرم وارد کنید. فاصلهٔ محور تا نقطهٔ اثر این نیروی معادل را تعیین کنید.



حل:

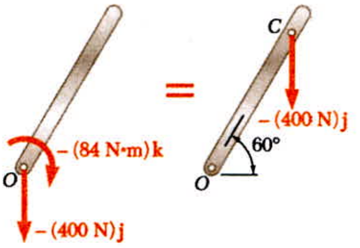
ابتدا نیرو و کوپل داده شده را به یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O تبدیل می‌کنیم. نیروی $\mathbf{F} = -(۴۰۰\,\mathrm{N})\mathbf{j}$ را به نقطهٔ O می‌بریم و همزمان کوپلی با گشتاور $\mathbf{M}_O$ ، برابر با گشتاور نیرو در وضعیت اولیه‌اش حول نقطهٔ O، به آن اضافه می‌کنیم.

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB}\times\mathbf{F} = [(۰٫۱۵۰\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (۰٫۲۶۰\,\mathrm{m})\mathbf{j}]\times(-۴۰۰\,\mathrm{N})\mathbf{j}$$
$$= -(۶۰\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$



این کوپل را به کوپلِ با گشتاور $-(۲۴\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$ — که ناشی از دو نیروی ۲۰۰ نیوتونی است می‌افزاییم و کوپلی با گشتاور $-(۸۴\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$ به‌دست می‌آوریم. این کوپل را می‌توانیم با اعمال **F** در یک نقطهٔ C حذف کنیم. C را باید طوری اختیار کنیم که

$$-(۸۴\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} = \overrightarrow{OC}\times\mathbf{F}$$
$$= [(OC)\cos ۶۰^\circ\mathbf{i} + (OC)\sin ۶۰^\circ\mathbf{j}]\times(-۴۰۰\,\mathrm{N})\mathbf{j}$$
$$= -(OC)\cos ۶۰^\circ(۴۰۰\,\mathrm{N})\mathbf{k}$$

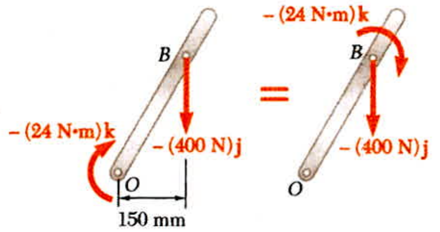


نتیجه می‌گیریم که

$$(OC)\cos ۶۰^\circ = ۰٫۲۱۰\,\mathrm{m} = ۲۱۰\,\mathrm{mm} \quad \Longrightarrow$$
$$OC = ۴۲۰\,\mathrm{mm} \quad ◄$$

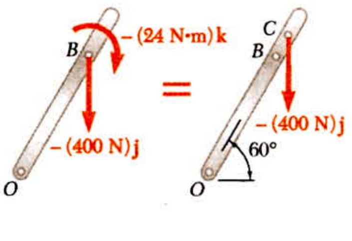
راه حل دیگر. چون اثر کوپل بستگی به مکانش ندارد، کوپل با گشتاور $-(۲۴\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$ را به B منتقل می‌کنیم و به این ترتیب در نقطهٔ B یک سیستم کوپل-نیرو به‌دست می‌آوریم. حالا با اعمال نیروی **F** به نقطهٔ C می‌توانیم این کوپل را حذف کنیم. C را باید طوری اختیار کنیم که

$$-(۲۴\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} = \overrightarrow{BC}\times\mathbf{F}$$
$$= -(BC)\cos ۶۰^\circ(۴۰۰\,\mathrm{N})\mathbf{k}$$



نتیجه می‌گیریم که

$$(BC)\cos ۶۰^\circ = ۰٫۰۶۰\,\mathrm{m} = ۶۰\,\mathrm{mm} \qquad BC = ۱۲۰\,\mathrm{mm}$$
$$OC = OB + BC = ۳۰۰\,\mathrm{mm} + ۱۲۰\,\mathrm{mm}$$
$$OC = ۴۲۰\,\mathrm{mm} \quad ◄$$



چگونه مسئله حل کنیم

در این درس از خواص کوپل‌ها صحبت کردیم. برای حل مسئله‌های این بخش باید یادتان باشد که اثر خالص یک کوپل ایجاد گشتاور **M** است. از آنجا که این گشتاور مستقل از نقطهٔ محاسبه نسبت به آن است، **M** یک بردار آزاد است و بنابراین اگر از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر برده شود ثابت باقی می‌ماند. همچنین دو کوپل معادل‌اند (یعنی تأثیر یکسانی روی یک جسم صلب دارند) اگر یک گشتاور ایجاد کنند.

موقع تعیین گشتاور یک کوپل، تمام روشهای گذشته برای محاسبه گشتاورها معتبرند. همچنین از آنجا که گشتاور یک کوپل بردار آزاد است، باید نسبت به مناسبترین نقطه محاسبه شود.

چون تنها اثر یک کوپل ایجاد گشتاور است، آن را می‌شود با یک بردار به‌نام بردار کوپل، نشان داد که با گشتاور کوپل برابر است. بردار کوپل یک بردار آزاد است و با نماد ویژهٔ ↺ نشان داده می‌شود تا از بردارهای نیرو متمایز باشد.

در حل مسئله‌های این درس و برای انجام عملیات باید به‌خاطر داشته باشید:

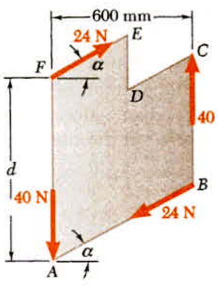
۱. **جمع بستن دو یا چند کوپل.** این عمل یک کوپل جدید به‌دست می‌دهد، گشتاور این کوپل از جمع برداری گشتاورهای کوپلهای اولیه به‌دست می‌آید [مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۳]

۲. **تبدیل یک نیرو به یک سیستم کوپل-نیروی معادل در یک نقطهٔ مشخص** چنانکه در بخش ۱۶.۳ بیان شد، نیروی یک سیستم کوپل-نیرو برابر است با نیروی اولیه، در حالی‌که بردار کوپل لازم برابر با گشتاور نیروی اولیه حول نقطه داده شده است. به‌علاوه، توجه به این نکته مهم است که نیرو، و بردار کوپل بر هم عمودند. بالعکس، نتیجه می‌گیریم که یک سیستم کوپل نیرو را می‌توان به یک تک‌نیرو تبدیل کرد، فقط به‌شرطی که نیرو و بردار کوپل متقابلاً برهم عمود باشند (پاراگراف بعد را ببینید).

۳. **تبدیل یک سیستم کوپل-نیرو (با نیروی F عمود بر M) به یک تک‌نیروی معادل.** توجه کنید که شرط عمود بودن **F** و **M** بر هم در تمام مسئله‌های دو بعدی برقرار است. تک‌نیروی معادل برابر است با **F** و به‌طریقی وارد می‌شود که گشتاورش حول نقطه اثر اولیه برابر با **M** باشد [مسئلهٔ نمونه ۷.۳].

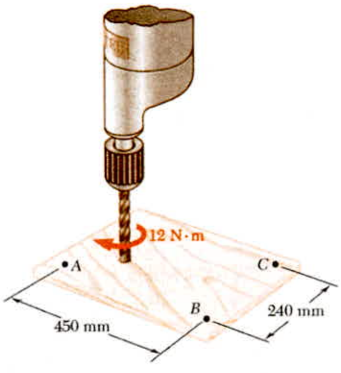
مسئله‌ها

۶۸.۳ بر صفحهٔ فولادی مطابق شکل دو کوپل وارد می‌شود. مطلوب است (الف) گشتاور کوپل تشکیل شده به‌وسیلهٔ دو نیروی ۴۰-N، (ب) مقدار α را اگر برایند دو کوپل ۸ N · m پاد ساعتگرد و $d =$ ۸۲۰ mm باشد، (ج) فاصله قائم بین دو نیروی ۲۴-N را اگر برایند دو کوپل صفر باشد.



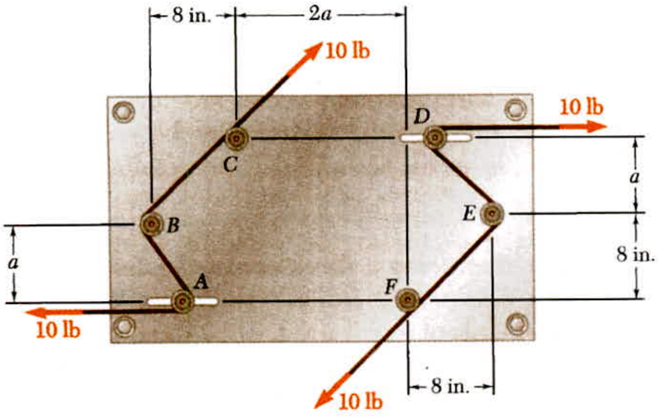
شکل م ۶۸.۳

۶۹.۳ بر روی قطعه‌ای از تخته چندلا باید با مته به دنبال هم چند سوراخ ایجاد کرد. برای اطمینان با دو میخ تخته را به میزکار میخ می‌کنیم. می‌دانیم که مته کوپلی ۱۲-N · m را بر قطعه چوبی وارد می‌کند. مطلوب است بزرگی برایند نیروهای وارد بر میخها، اگر آنها در نقاط داده شده واقع شده باشند، (الف) در دو نقطه A و B، (ب) در نقاط B و C، (ج) در نقاط A و C.



شکل م ۶۹.۳

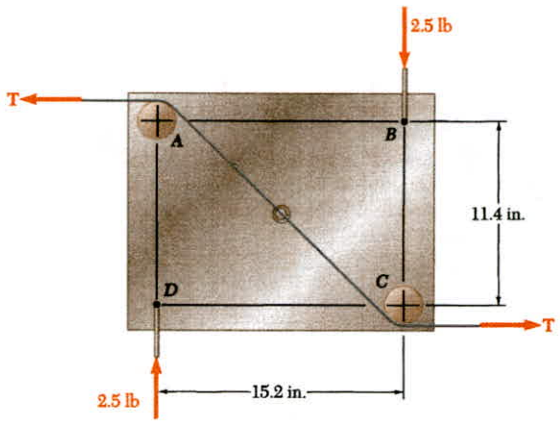
۷۰.۳ بر روی ورق فولادی نشان داده شده شش غلطک هرزه‌گرد به قطر ۲ m که روی ورق قرار داده شده نگهداری می‌شوند. دو تسمه صاف از دور غلطکها گذشته‌اند، و غلطکهای A و B را چنان تنظیم کرده‌اند که کشش در هر تسمه ۱۰ lb باشد، معین کنید (الف) کوپل برایند وارد بر ورق را، اگر $a =$ ۸ in، (ب) مقدار a چنان باشد که کوپل برایند وارد بر ورق ۴۸۰ lb-in ساعتگرد باشد.



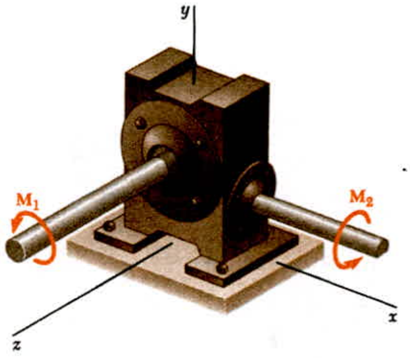
شکل م ۷۰.۳

۷۱.۳ دو میخ چوبی به قطر ۲/۴ in در A و C و دو میله در نقاط B و D به ورق فولادی متصل شده است. طنابها را مطابق شکل از میخها می‌گذرانیم. میله‌ها نیروهای ۲/۵-lb مطابق شکل بر ورق وارد می‌کنند. (الف) مطلوب است کوپل برایند وارد بر ورق وقتی $T =$ ۹ lb باشد، (ب) اگر تنها از طناب استفاده شود، آن را در چه راستایی باید کشید تا کوپل قسمت قبل به‌وجود آید و کشش طناب درکمترین مقدار باشد؟ (ج) مقدار این کشش حداقل چقدر است؟

۷۲.۳ دو محورگردان دستگاه کاهش سرعت به‌ترتیب تحت تأثیر کوپلهای $M_1 =$ ۱۸ N · m و $M_2 =$ ۷/۵ N · m قرار دارند. دو کوپل را با یک کوپل معادل جایگزین می‌کنند. بزرگی و راستای محورش را مشخص کنید.

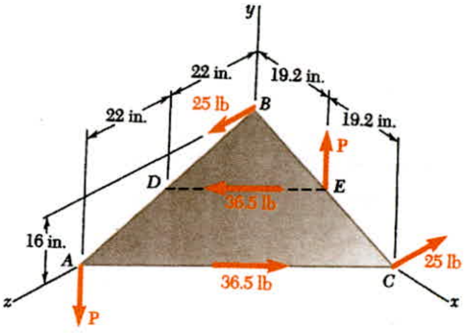


شکل م ۷۱.۳

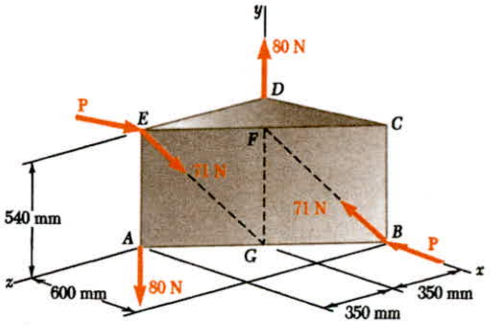


شکل م ۷۲.۳

۷۳.۳ و ۷۴.۳ با دانستن اینکه $P = ۰$ است دو کوپل باقی‌مانده را با یک کوپل معادل بگزین می‌کنند. بزرگی و راستای محورش را مشخص کنید.



شکل م ۷۳.۳ و م ۷۶.۳

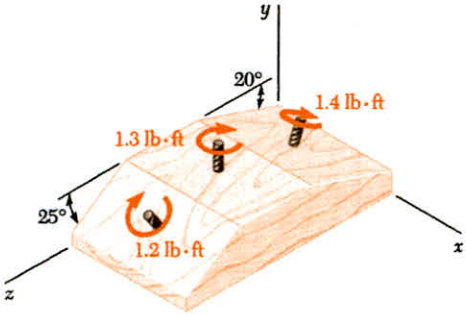


شکل م ۷۴.۳ و م ۷۵.۳

۷۵.۳ با دانستن اینکه $P = ۹۰\ \text{N}$ است سه کوپل را با کوپل معادل جایگزین می‌کنند. بزرگی و راستای محورش را مشخص کنید.

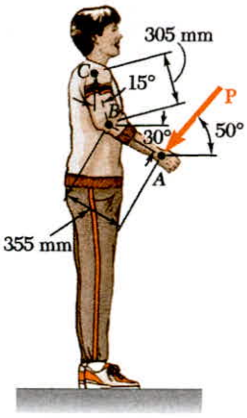
۷۶.۳ با دانستن اینکه $P = ۵۲/۵\ \text{lb}$ است، سه کوپل را با کوپل معادل جایگزین می‌کنند. بزرگی و راستای محورش را مشخص کنید.

۷۷.۳ در یک عملیات کارگاهی، با متهای سه سوراخ همزمان در یک قطعه کاری ایجاد می‌کنند. می‌دانیم که سوراخها بر سطوح قطعه کاری عمودند. کوپلهای ایجاد شده با مته‌ها را با یک کوپل معادل تنها جایگزین کنید. بزرگی و راستای محورش را مشخص کنید.



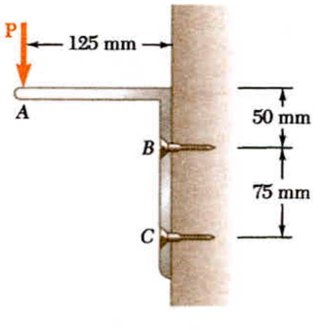
شکل م ۷۷.۳

۷۸.۳ نیروی $\mathbf{P}$ به بزرگی $۱۶۰\ \text{N}$ مطابق شکل بر دست شخصی وارد می‌شود. نیروی P را با یک سیستم معادل کوپل-نیرو جایگزین کنید. (الف) در آرنج B، (ب) در C روی شانه.



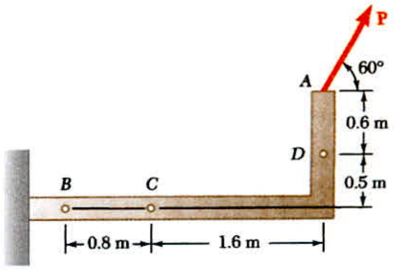
شکل م ۷۸.۳

۷۹.۳ نیروی قائم ۱۳۵-N بر نقطه A بر دیوار نشان داده شده وارد می‌شود، به‌نحوی که توسط پیچهایی در B و C نگهداری می‌شود. (الف) $\mathbf{P}$ را با یک سیستم کوپل نیروی معادل در B جایگزین کنید. (ب) دو نیروی افقی در B و C را که مساوی با کوپل به‌دست آمده در قسمت (الف) است، به‌دست آورید.



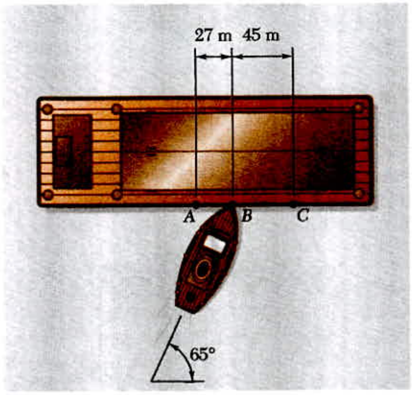
شکل م ۷۹.۳

۸۰.۳ نیروی $\mathbf{P}$ برابر $۷۰۰\ \text{N}$ بر نقطه A از یک عضو سازه‌ای وارد می‌شود. $\mathbf{P}$ را با این موارد جایگزین کنید: (الف) یک سیستم کوپل-نیروی معادل در C، (ب) یک سیستم معادل از نیروی قائم در B و نیروی دیگر در D.



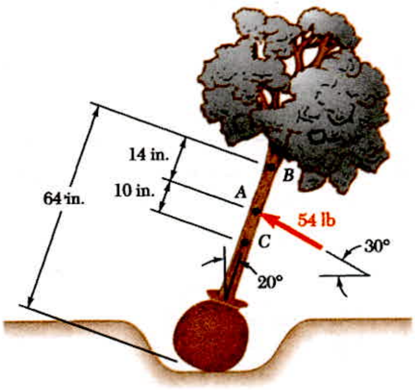
شکل م ۸۰.۳

۸۱.۳ یدک کش زورق نیروی ۲٫۸-kN را در نقطه B در امتداد محورش بر یک کرجی وارد می‌کند. نیروی وارد شده در B را با یک سیستم معادل که از دو نیروی موازی وارد بر A و C تشکیل می‌شود جایگزین کنید.



شکل م ۸۱.۳

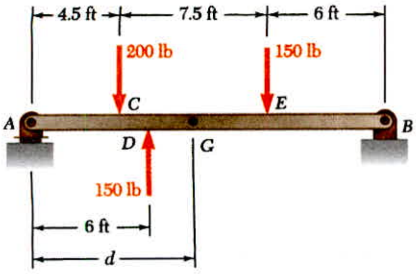
۸۲.۳ زمین‌آرایی می‌خواهد با به‌کار بردن نیروی ۵۴-lb مطابق شکل، درخت را راست نگه دارد. در این امر دو نفر کمک می‌کنند، یکی با وارد کردن نیروی افقی در C و دیگری با نیروی موازی در B آن را هل می‌دهد. مطلوب است مقدار این دو نیرو در حالتی که با تک‌نیروی ۵۴-lb نشان داده شده در شکل معادل باشد.



شکل م ۸۲.۳

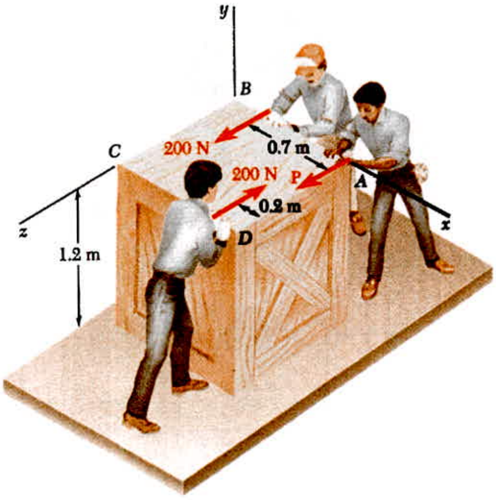
۸۳.۳ زمین‌آرایی می‌خواهد با به کار بردن نیروی ۵۴-lb، مطابق شکل ۸۲.۳، درخت را راست نگه دارد. (الف) این نیرو را با یک سیستم کوپل نیروی معادل در C جایگزین کنید. (ب) دو نفر برای راست نگه‌داشتن درخت کمک می‌کنند، یکی با وارد کردن نیروی افقی در C و دیگری با کشیدن در نقطه B. این دو نیرو را در صورتی که با تک‌نیروی قسمت (الف) مسئله معادل شده، حساب کنید.

۸۴.۳ یک نیرو و یک کوپل بر تیر وارد می‌شود. (الف) این سیستم را با تک‌نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر نقطه G جایگزین کنید، و فاصله d را به‌دست آورید. (ب) قسمت (الف) را با فرض اینکه راستای دو نیروی ۱۵۰-lb معکوس شود، حل کنید.



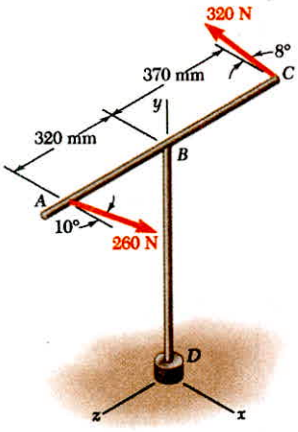
شکل م ۸۴.۳

۸۵.۳ سه کارگر برای حرکت دادن صندوق ۱٫۲-m × ۱ × ۱ مطابق شکل، سه نیروی ا... وارد می‌کنند. (الف) اگر $P = ۲۴۰$ N، سه نیرو را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل د... جایگزین کنید. (ب) سیستم کوپل‌نیروی قسمت (الف) را به یک تک‌نیرو تبدیل کنید. این ... را در چه نقطه‌ای می‌باید بر ضلع AB وارد کرد. (ج) همچنین بزرگی $\mathbf{P}$ را طوری تعیین کنید که سه نیرو را بتوان با یک نیروی معادل در B جایگزین کرد.



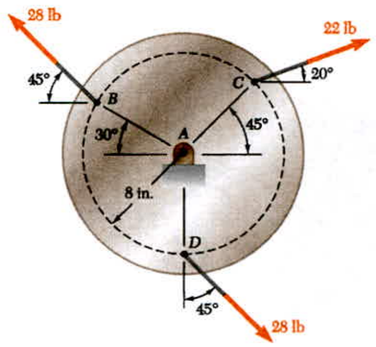
شکل م ۸۵.۳

۸۶.۳ برای باز کردن فلکه آب در زمین، دو کارگر دو نیروی افقی را مطابق شکل به‌دسته یب... رنچ فلکه وارد می‌کنند. نشان دهید که این نیروها معادل با یک تک‌نیرو هستند. در صو... امکان نقطه کاربرد تک‌نیروی روی دسته ABC را مشخص کنید.



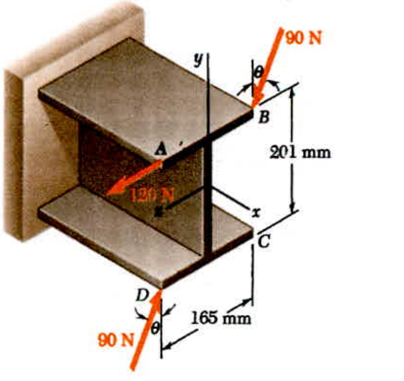
شکل م ۸۶.۳

۸۷.۳ سه کابل به یک دیسک متصل و بر آن نیروهای نشان داده شده وارد می‌شود. (الف) سه نیرو را با یک سیستم معادل کوپل-نیرو در نقطه A جایگزین کنید. (ب) مطلوب اس... تک‌نیرویی که با سیستم کوپل-نیروی به‌دست آمده در قسمت (الف) معادل است و نقطهٔ آن را روی خط رسم‌شدهٔ بین نقاط A و D مشخص کنید.



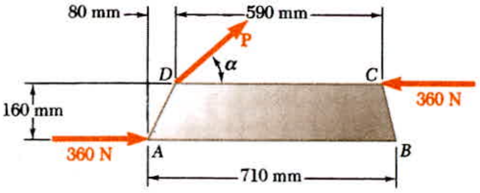
شکل م ۸۷.۳

۸۸ یک نیرو و یک کوپل در صفحه yz واقع شده‌اند و بر انتهای تیر طره‌دار بال-پهن وارد
شوند. این سیستم با یک تک‌نیروی معادل جایگزین شده است. (الف) به‌ازای $\theta = ۱۵°$،
طلوب است بزرگی و خط اثر نیروی معادل. (ب) مطلوب است مقدار θ را اگر خط اثر نیروی
دل، خط رسم شده بین نقاط B و C را که C به اندازه ۴۰ mm بالاتر است، قطع کند.



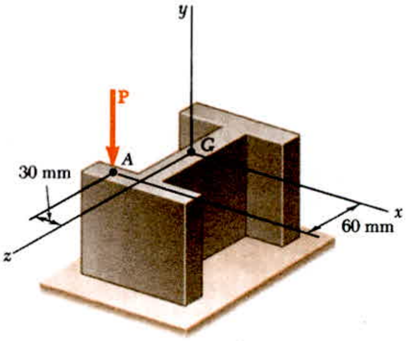
شکل م ۸۸.۳

۸۹ بر صفحه ذوزنقه‌ای نیروی **P** و کوپل نشان داده شده وارد می‌شود. معین کنید (الف) نقطهٔ
روی صفحه از کوچکترین نیروی **F** که معادل با سیستم مفروض است، (ب) بزرگی و راستای **F**.



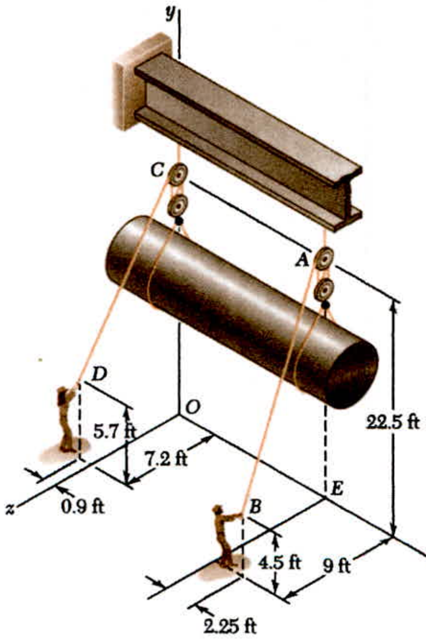
شکل م ۸۹.۳

۹۰.۳ یک نیروی فشاری گریز از مرکز **P** برابر ۲۵۰ kN بر انتهای یک ستون وارد می‌شود.
را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطه G جایگزین کنید.



شکل م ۹۰.۳

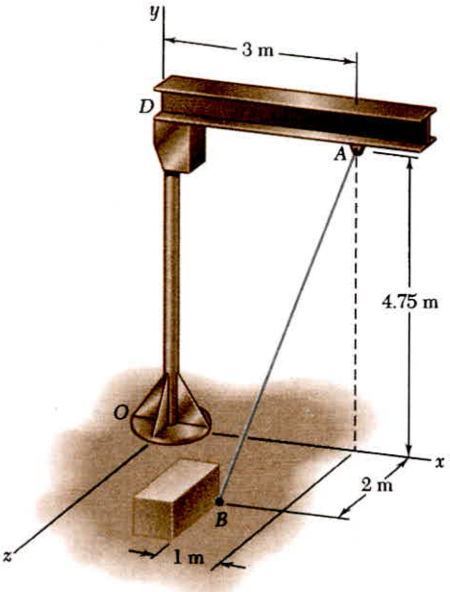
۹۱.۳ دو کارگر با استفاده از قرقره و طناب متصل به پایین تیر I شکل می‌خواهند یک مخزن استوانه‌ای بزرگ را بالا ببرند. می‌دانیم که کشش در طناب AB برابر ۵۴ lb است. نیروی وارد شده در A توسط طناب AB را با سیستم کوپل-نیروی معادل در E جایگزین کنید.



شکل م ۹۱.۳ و م ۹۲.۳

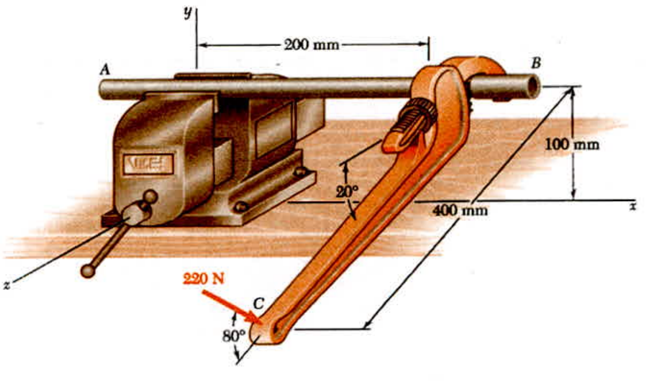
۹۲.۳ دو کارگر با استفاده از قرقره و طناب متصل به پایین تیر I شکل می‌خواهند یک مخزن استوانه‌ای بزرگ را بالا ببرند. می‌دانیم که کشش در طناب CD برابر ۶۱ lb است. نیروی وارد شده بر C را توسط طناب CD با یک سیستم معادل کوپل-نیرو جایگزین کنید.

۹۳.۳ جرثقیل بازودار نشان داده شده طوری قرار دارد که بازوی AD موازی با محور x و برای به حرکت در آوردن یک جعبهٔ سنگین به‌کار رفته است. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر ۱۰٫۵ kN است. نیروی وارد توسط کابل در A را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در مرکز O در پایین جرثقیل جایگزین کنید.



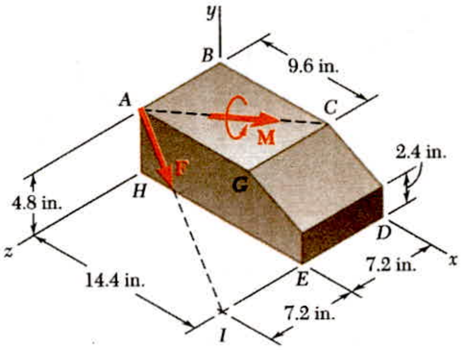
شکل م ۹۳.۳

۹۴.۳ لوله‌کشی نیروی ۲۲۰ -N را بر دسته آچار وارد می‌کند. می‌دانیم که آچار و نیرو در یک صفحه قائم موازی با صفحه yz قرار دارد. این نیرو را با سیستم کوپل-نیروی معادل در مبدأ دستگاه مختصات جایگزین کنید.



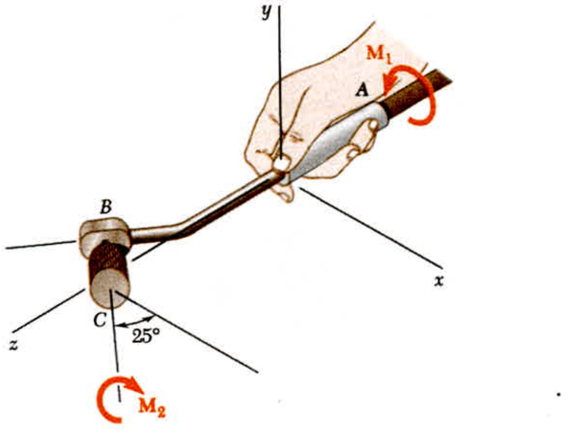
شکل م ۹۴.۳

۹۵.۳ نیروی $\mathbf{F} = ۶۳$ lb و کوپل $\mathbf{M} = ۵۶۰$ lb. in بر گوشه یک قطعه نشان داده شده وارد می‌شوند. سیستم کوپل-نیروی داده شده را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در گوشه D جایگزین کنید.



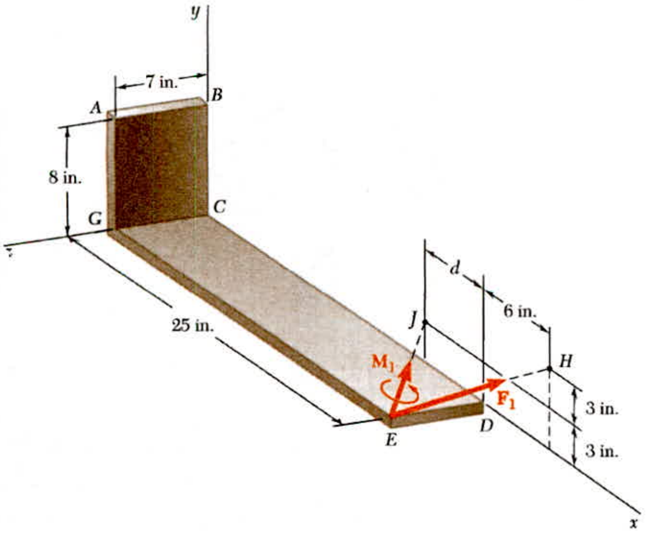
شکل م ۹۵.۳

۹۶.۳ تیغه خردکن صنعتی کوچکی ۲٫۴ N وزن دارد و مرکزگرانی آن روی محور y واقع شده است. سر تیغه طوری نسبت به صفحه xz کج است که با خط BC با راستای x زاویه $25°$ می‌سازد. نشان دهید که وزن تیغه و دو کوپل $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ را می‌توان به یک تک‌نیروی معادل تبدیل کرد. فرض کنید که $M_1 = ۰٫۰۶۸\,\mathrm{N \cdot m}$ و $M_2 = ۰٫۰۶۵\,\mathrm{N \cdot m}$ باشد. مطلوب است (الف) بزرگی و راستای نیروی معادل، (ب) نقطه‌ای که خط اثر این نیرو صفحه xz را قطع می‌کند.



شکل م ۹۶.۳

۹۷.۳ نیروی $\mathbf{F}_1 = ۲۰$ lb و کوپل $M_1 = ۴۰$ lb · ft برگوشهٔ E ورقهٔ خمیده نشان داده شده وارد می‌شود. اگر $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{M}_1$ را به یک سیستم کوپل-نیروی معادل $(\mathbf{F}_2, \mathbf{M}_2)$ در گوشه B تبدیل کنید و اگر $(M_2)_z = ۰$ باشد، مطلوب است (الف) فاصلهٔ d، (ب) $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{M}_2$.



شکل م ۹۷.۳

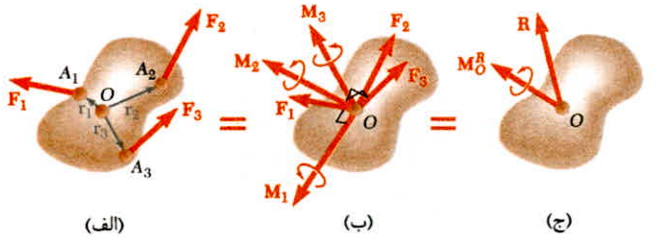
۱۷.۳ تبدیل سیستم نیروها به یک نیرو و یک کوپل

سیستمی از نیروهای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$ و غیره را در نظر بگیرید که در نقطه‌های A_1، A_2، A_3 و غیره به یک جسم صلب اثر می‌کنند. این نقطه‌ها با بردار مکانهای $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$، $\mathbf{r}_3$، و غیره تعریف شده‌اند [شکل ۴۱.۳ (الف)]. همان‌طور که در بخش قبل دیدید، $\mathbf{F}_1$ را می‌توان از A_1 به یک نقطهٔ معین O منتقل کرد، به‌شرطی که کوپلی با گشتاور $\mathbf{M}_1$ برابر با $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$، یعنی گشتاور نیروی $\mathbf{F}_1$ حول O به سیستم اولیهٔ نیروها اضافه کنیم. با تکرار این روش در مورد $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$ و غیره سیستم نشان داده شده در شکل ۴۱.۳ (ب) را به‌دست می‌آوریم که متشکل از نیروهای اولیه، که اکنون بر O وارد می‌شوند، و بردارهای کوپل اضافه شده است. در اینجا نیروها را به خاطر همرس بودنشان می‌توان جمع برداری کرد و به جای آنها برایندشان $\mathbf{R}$ را قرار داد. به‌طور مشابه، بردارهای کوپل $\mathbf{M}_1$، $\mathbf{M}_2$، $\mathbf{M}_3$، و غیره را هم می‌توان به طریق برداری به هم افزود و تبدیل به یک تک‌کوپل $\mathbf{M}_O^R$ کرد. پس هر سیستم از نیروها را، هر قدر هم که پیچیده باشد، می‌توان به یک سیستم کوپل-نیروی معادل در یک نقطهٔ معین O تبدیل کرد [شکل ۴۱.۳ (ج)]. باید متوجه این نکته باشیم که اگرچه هریک از بردارهای کوپل $\mathbf{M}_1$، $\mathbf{M}_2$، $\mathbf{M}_3$، و غیره در شکل ۴۱.۳ (ب) بر نیروهای متناظرشان عمود هستند، اما نیروی برایند $\mathbf{R}$ و بردار کوپل برایند $\mathbf{M}_O^R$ در شکل ۴۱.۳ (ج) به‌طورکلی برهم عمود نخواهند بود.

سیستم کوپل-نیروی معادل با معادله‌های زیر تعریف می‌شود:

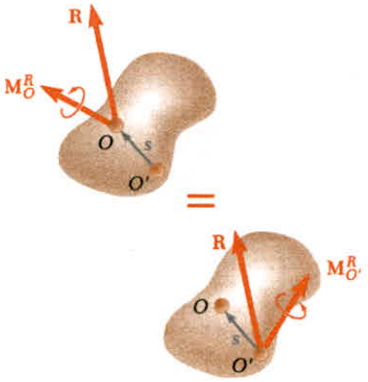
$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{۵۲.۳}$$

این معادله‌ها می‌گویند که نیروی $\mathbf{R}$ از جمع همهٔ نیروهای سیستم به‌دست می‌آید،



شکل ۴۱.۳

س ۳.۳ در تحلیل حرکت کشتی نیروهای وارد توسط طناب و یدک‌کش بر انتهای کشتی را توان با یک سیستم کوپل-نیروی معادل جایگزین کرد.



شکل ۴۲.۳

حالی که $\mathbf{M}_O^R$، گشتاور بردار کوپل برایند، که آن را برایند گشتاور سیستم می‌نامند، از جمع گشتاورهای تمامی نیروهای سیستم حول O به‌دست می‌آید.

وقتی یک سیستم معین از نیروها به یک نیرو و یک کوپل در نقطهٔ O خلاصه شد، توان به راحتی آن را به یک نیرو و یک کوپل در نقطهٔ دیگری مثل O' تبدیل کرد. با ، نیروی برایند $\mathbf{R}$ ثابت می‌ماند، اما گشتاور برایند جدید $\mathbf{M}_{O'}^R$ برابر با مجموع $\mathbf{M}_O^R$، شتاور نیروی $\mathbf{R}$ (متصل به نقطهٔ O)، حول نقطهٔ O' می‌شود (شکل ۴۲.۳). داریم

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s}\times\mathbf{R} \qquad (۵۳.$$

در عمل، تبدیل یک سیستم از نیروها به یک نیروی $\mathbf{R}$ در O و یک بردار کوپل $\mathbf{M}_O$ برحسب مؤلفه‌ها انجام می‌شود. با تجزیهٔ تک‌تک بردار مکانهای $\mathbf{r}$ و تک‌تک ...رهای $\mathbf{F}$ سیستم به مؤلفه‌های قائم، می‌نویسیم

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k} \qquad (۵۴.۳)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (۵۵.۳)$$

رتهای بالا را به جای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ در (۵۲.۳) قرار می‌دهیم و از بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ اکتور می‌گیریم، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}_O^R$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O^R = M_x^R\mathbf{i} + M_y^R\mathbf{j} + M_z^R\mathbf{k} \quad (۵۶$$

موفه‌های R_x، R_y، و R_z به‌ترتیب، مجموع مؤلفه‌های x، y، و z نیروهای داده شده شان می‌دهند و میزان تمایل سیستم به دادن حرکت انتقالی به جسم صلب در اد x، y، یا zاند. به‌طور مشابه، مؤلفه‌های M_x^R، M_y^R، و M_z^R به‌ترتیب مجموع تاورهای نیروهای مفروض حول x، y، و z را نشان می‌دهند و میزان تمایل سیستم دادن حرکت دورانی به جسم صلب حول محورهای x، y، و zاند.

اگر بزرگی و راستای نیروی $\mathbf{R}$ مطلوب باشد، می‌توانیم آنها را به وسیلهٔ رابطه‌های (۱۸.۲) و (۱۹.۲) بخش ۱۲.۲، از روی مؤلفه‌های R_x، R_y، و R_z پیدا کنیم. مشابه همین محاسبات را می‌توانیم برای پیداکردن بزرگی و راستای بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ تکرار کنیم.

۱۸.۳ سیستم نیروهای معادل

در بخش قبل دیدیم که هر سیستم از نیروهای وارد بر یک جسم صلب را می‌شود به یک سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ معین O خلاصه کرد. این سیستم کوپل-نیروی معادل اثر سیستم نیروهای وارد بر جسم صلب را به‌طور کامل مشخص می‌کند. بنابراین دو سیستم نیرو معادل‌اند به‌شرطی که بشود هردوی آنها را به یک سیستم کوپل-نیروی وارد بر نقطهٔ معین O خلاصه کرد. با توجه به اینکه سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ O با رابطه‌های (۵۲.۳) تعریف می‌شود می‌گوییم که دو سیستم متشکل از نیروهای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$ و غیره و $\mathbf{F}'_1$، $\mathbf{F}'_2$، $\mathbf{F}'_3$، و غیره، که به یک جسم صلب اثر می‌کنند، معادل‌اند، فقط به شرطی که مجموع نیروها و مجموع گشتاورهای نیروهای دو سیستم حول یک نقطهٔ O به ترتیب باهم برابر باشند. به بیان ریاضی، شرایط لازم و کافی برای معادل‌بودن دو سیستم نیرو چنین است

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \quad \text{و} \quad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}'_O \qquad (۵۷.۳)$$

توجه کنید که برای اثبات معادل‌بودن دو سیستم نیرو قسمت دوم رابطهٔ (۵۷.۳) باید فقط نسبت به یک نقطهٔ O برقرار باشد. اما اگر دو سیستم معادل باشند، این رابطه نسبت به هر نقطه‌ای برقرار خواهد بود.

با تجزیهٔ نیروها و گشتاورها در (۵۷.۳) به مؤلفه‌های قائم، شرایط لازم و کافی برای معادل‌بودن دوسیستم نیروی وارد بریک جسم صلب را می‌شود چنین بیان کرد

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \qquad (۵۸.۳)$$

این معادله‌ها مفهوم فیزیکی ساده‌ای دارند. آنها می‌گویند که دو سیستم نیرو با هم معادل‌اند، به شرطی که تمایل به ایجاد (۱) یک جور حرکت انتقالی در امتدادهای x، y، و z، (۲) یک جور حرکت دورانی حول محورهای x، y، و z داشته باشند.

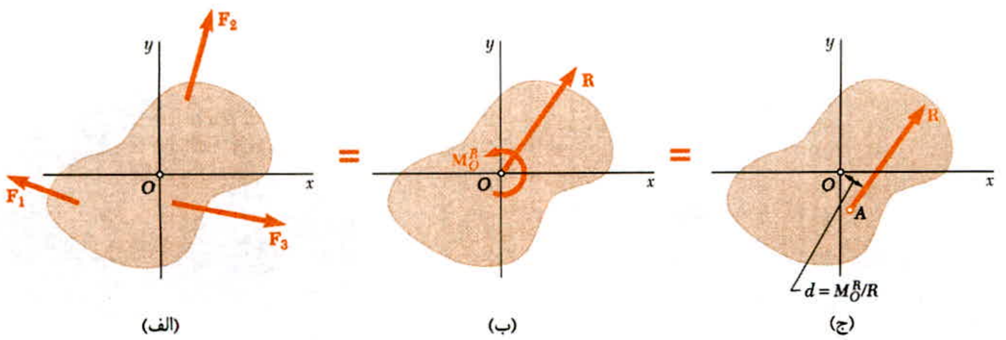
۱۹.۳ سیستم بردارهای هم‌سنگ

به‌طور کلی وقتی دو سیستم از بردارها در معادله‌های (۵۷.۳) و (۵۸.۳) صدق می‌کنند یعنی، وقتی برایندها و گشتاور برایندهای آنها حول یک نقطهٔ دلبخواه O به ترتیب برابرند، اصطلاحاً گفته می‌شود که دو سیستم هم‌سنگ‌اند. بنابراین نتیجه بخش پیش را می‌شود به این صورت بازگو کرد: اگر دو سیستم از نیروهای وارد بر یک جسم صلب هم‌سنگ باشند معادل هم هستند.

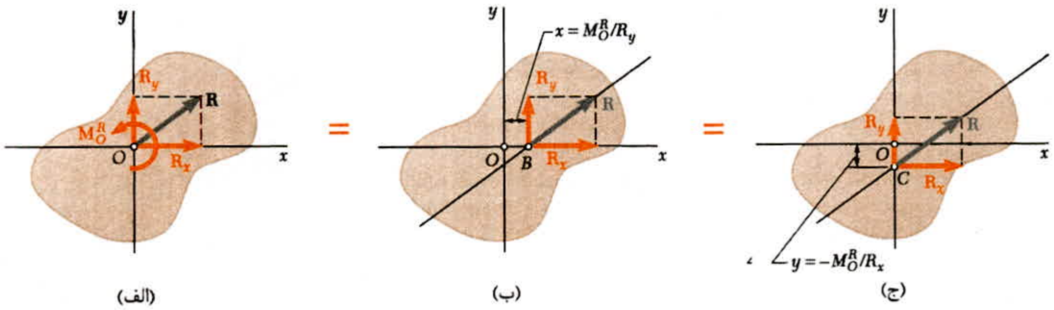
به این نکتهٔ مهم توجه کنید که گزارهٔ بالا برای هر سیستم از بردارها صادق نیست. مثلاً، سیستمی را در نظر بگیرید از نیروهای وارد بر مجموعه‌ای از ذرات مستقل که جسم صلب تشکیل نمی‌دهند. ممکن است اتفاقاً سیستم متفاوتی از نیروهای وارد بر همین ذرات هم‌سنگ سیستم اول باشد؛ یعنی، ممکن است دارای همان برایند و همان گشتاور برایند باشد، با اینهمه از آنجا که حالا نیروهای متفاوتی به ذرات وارد می‌شوند، اثرهای آنها بر روی ذرات متفاوت خواهد بود؛ این دو سیستم از نیروها اگر چه هم‌سنگ هستند، اما معادل نیستند.

۲۰.۳ بیشتر خلاصه‌کردن سیستم نیروها

در بخش ۱۷.۳ دیدیم که می‌شود هر سیستم از نیروهای وارد بر یک جسم صلب را تبدیل به یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O کرد، که شامل یک نیروی $\mathbf{R}$ برابر



شکل ۴۳.۳



شکل ۴۴.۳

با جمع نیروهای سیستم و بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$، با گشتاوری برابر با گشتاور برایند سیستم باشد.

وقتی $\mathbf{R} = ۰$ باشد، سیستم کوپل-نیرو ساده‌تر می‌شود و به بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ تبدیل می‌شود. بنابراین سیستم نیروها را می‌شود تبدیل کرد به یک تک‌کوپل که به آن کوپل برایند سیستم می‌گویند.

حال می‌خواهیم شرایطی را جستجو کنیم که تحت آنها بتوان یک سیستم نیروی معین را تبدیل به یک تک‌نیرو کرد. از بخش ۱۶.۳ نتیجه می‌شود که سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ O را می‌شود به یک تک‌نیروی $\mathbf{R}$ در امتداد یک خط اثر جدید تبدیل کرد، به شرطی که $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ متقابلاً برهم عمود باشند. بنابراین سیستم نیروهایی را می‌شود به یک تک‌نیرو ــ یا برایند ــ خلاصه کرد که در آنها نیروی $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ متقابلاً برهم عمود باشند. با آنکه این شرط معمولاً توسط سیستمهای نیروها در فضا برآورده نمی‌شود، اما سیستمهای متشکل از (۱) نیروهای همرس، (۲) نیروهای هم‌صفحه، یا (۳) نیروهای موازی این شرط را برآورده می‌کنند. دربارهٔ این موارد جداگانه صحبت خواهیم کرد.

۱. **نیروهای همرس** به یک نقطه وارد می‌شوند و بنابراین می‌توانیم آنها را مستقیماً با هم جمع ببندیم و به برایندشان $\mathbf{R}$ خلاصه کنیم. پس آنها همیشه به یک تک‌نیرو خلاصه می‌شوند. در فصل ۲ دربارهٔ نیروهای همرس به تفصیل بحث شده است.

۲. **نیروهای هم‌صفحه** در یک صفحه وارد می‌شوند، که می‌توانیم فرض کنیم صفحهٔ شکل است [شکل ۴۳.۳ (الف)]. جمع نیروهای سیستم $(\mathbf{R})$ هم در صفحهٔ شکل قرار خواهد داشت، در حالی که گشتاور هریک از نیروها حول O و بنابراین گشتاور برایند $\mathbf{M}_O^R$ عمود بر این صفحه خواهند بود. بنابراین سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ O تشکیل می‌شود از نیرویی مانند $\mathbf{R}$ و بردار کوپلی مانند $\mathbf{M}_O^R$ که متقابلاً برهم عمودند [شکل ۴۳.۳ (ب)].[۱] آنها را می‌توانیم با حرکت دادن $\mathbf{R}$ در صفحهٔ شکل تا جایی که گشتاورش حول O برابر با $\mathbf{M}_O^R$ شود، به یک تک‌نیروی خلاصه‌کنیم. فاصلهٔ O تا خط اثر $\mathbf{R}$ برابر است با $d = M_O^R/R$ [شکل ۴۳.۳ (ج)].

چنانکه در بخش ۱۷.۳ متذکر شدیم، اگر نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه کنیم، تقلیل سیستم نیروها به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. در این صورت سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔ O با مؤلفه‌هایش مشخص می‌شود [شکل ۴۴.۳ (الف)]

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O \qquad (۵۹.۳)$$

برای تقلیل این سیستم به یک تک‌نیروی $\mathbf{R}$، گشتاور $\mathbf{R}$ حول O باید برابر با M_O^R باشد. اگر مختصات نقطهٔ اثر برایند را با x و y نشان بدهیم، و فرمول (۲۲.۳) بخش ۸.۳ را به‌خاطر بیاوریم، می‌توانیم بنویسیم

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

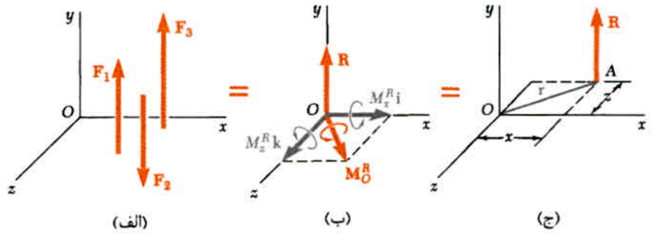
که معادلهٔ خط اثر $\mathbf{R}$ را نشان می‌دهد. همچنین می‌توانیم مستقیماً محل تلاقی خط اثر برایند با محورهای x و y را تعیین کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که وقتی $\mathbf{R}$ به نقطهٔ B وارد شود، $\mathbf{M}_O^R$ باید با گشتاور مؤلفهٔ y نیروی $\mathbf{R}$ حول نقطهٔ O برابر باشد [شکل ۴۴.۳ (ب)]، و وقتی R به نقطهٔ C وارد شود، $\mathbf{M}_O^R$ باید با گشتاور مؤلفه x نیروی $\mathbf{R}$ حول نقطهٔ O برابر باشد [شکل ۴۴.۳ (ج)].

۳. **نیروهای موازی** خط اثرهای موازی دارند و ممکن است هم‌جهت یا در جهتهای مخالف باشند. در اینجا فرض می‌کنیم که نیروها با محور y موازی‌اند [شکل ۳.۳ (الف)]، می‌بینیم که مجموع آنها $(\mathbf{R})$ هم موازی با محور y خواهد بود. از طرف دیگر، چون گشتاور یک نیروی معین باید عمود بر آن نیرو باشد، گشتاور هر یک از نیروها

---

۱. چون بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ بر صفحهٔ شکل عمود است، با علامت ↶ نشان داده شده است. کوپل پادساعتگرد ↶ برداری به‌طرف خارج از صفحهٔ کاغذ، و کوپل ساعتگرد ↷ برداری به‌طرف داخل صفحهٔ کاغذ را نشان می‌دهد.

عکس ۴.۳ نیروهای هم‌صفحه وارد شده توسط چهار قایق یدک‌کش بر USS *Pasadena* ی‌تواند با یک تک‌نیروی معادل وارد شده توسط یک قایق موتوری جابه‌جا شود.



شکل ۴۵.۳

ستم حول O، و در نتیجه گشتاور برایند $\mathbf{M}_O^R$، در صفحهٔ zx خواهد بود. بنابراین ستم کوپل-نیرو در نقطهٔ O تشکیل می‌شود از یک نیروی $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ که م عمودند [شکل ۴۵.۳ (ب)]. آنها را می‌توان به یک تک‌نیروی $\mathbf{R}$ [شکل ۴۵.۳ (ج)] یا اگر $\mathbf{R} = ۰$ باشد به تک‌کوپلی با گشتاور $\mathbf{M}_O^R$ تبدیل کرد.

در عمل سیستم کوپل-نیرو در نقطهٔO را با مؤلفه‌ها مشخص می‌کنند.

$$R_y = \Sigma F_y \qquad M_x^R = \Sigma M_x \qquad M_z^R = \Sigma M_z \qquad (۶۰$$

ری تقلیل سیستم به یک تک‌نیرو می‌توانیم $\mathbf{R}$ را به نقطهٔ اثر جدید $A(x, ۰, z)$ منتقل ؛ این نقطه طوری انتخاب می‌شود که گشتاور $\mathbf{R}$ حول O برابر با $\mathbf{M}_O^R$ باشد. نویسیم

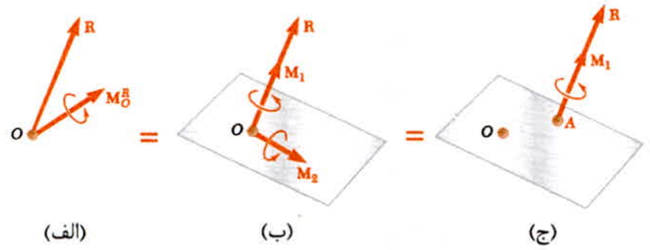
$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y\mathbf{j} = M_x^R\mathbf{i} + M_z^R\mathbf{k}$$

دست آوردن حاصلضربهای برداری و مساوی قراردادن ضریبهای بردارهای یکه در طرف معادله، دو معادلهٔ اسکالر به‌دست می‌آوریم که مختصات A را نشان می‌دهند

$$-zR_y = M_x^R \qquad xR_y = M_z^R$$

س ۵.۳ نیروهای موازی باد وارد بر علایم راهنمایی بزرگراه را می‌توان به یک نیروی معادل ل کرد. با تعیین این نیرو می‌توان محاسبه نیروهای وارد بر تکیه‌گاههای قاب‌تابلوها را ساده رد.



شکل ۴۶.۳

این معادله‌ها حاکی از آن هستند که گشتاورهای $\mathbf{R}$ حول محورهای x و z باید به‌ترتیب برابر با M_x^R و M_z^R باشند.

* ۲۱.۳ خلاصه‌کردن سیستم نیروها به یک رنچ

در حالت کلی سیستم نیروها در فضا، سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O متشکل است از یک نیروی $\mathbf{R}$ و یک بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ که برهم عمود نیستند و هیچ‌یک از آنها صفر نیست [شکل ۴۶.۳ (الف)]. بنابراین سیستم نیروها را نمی‌توان به یک تک‌نیرو یا یک تک‌کوپل خلاصه کرد. با وجود این، می‌شود بردار کوپل را به دو بردار کوپل دیگر تبدیل کرد که از تجزیهٔ $\mathbf{M}_O^R$ به مؤلفه‌های $\mathbf{M}_۱$ در امتداد $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}_۲$ در صفحهٔ عمود بر $\mathbf{R}$ به‌دست می‌آیند [شکل ۴۶.۳ (ب)]. بعد می‌شود بردار کوپل $\mathbf{M}_۲$ و نیروی $\mathbf{R}$ را به یک تک‌نیروی $\mathbf{R}$، در امتداد یک خط اثر جدید، تبدیل کرد. بنابراین سیستم اولیهٔ نیروها تقلیل پیدا می‌کند به $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_۱$ [شکل ۴۶.۳ (ج)]، یعنی به $\mathbf{R}$ و به یک کوپل که در صفحهٔ عمود بر $\mathbf{R}$ اثر می‌کند. این سیستم خاص کوپل-نیرو را که از ترکیب انتقال و دوران نتیجه می‌شود، رنچ می‌نامند. خط اثر $\mathbf{R}$ را محور رنچ می‌نامند، و نسبت $p = M_۱/R$ را گام رنچ می‌گویند. بنابراین هر رنچ از دو بردار هم‌خط تشکیل می‌شود، که یکی نیروی $\mathbf{R}$، و دیگری بردار کوپل $\mathbf{M}_۱$ است و داریم

$$\mathbf{M}_۱ = p\mathbf{R} \qquad (۶۱.۳)$$

با توجه به عبارت (۳۵.۳) به‌دست‌آمده در بخش ۹.۳ برای تصویر یک بردار بر روی خط اثر بردار دیگر، پی‌می‌بریم که تصویر $\mathbf{M}_O^R$ بر روی خط اثر $\mathbf{R}$ برابر است با

$$M_۱ = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

پس گام رنچ را می‌شود چنین بیان کرد[۱]

$$p = \frac{M_۱}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^۲} \qquad (۶۲.۳)$$

برای تعریف محور رنچ می‌توانیم رابطه‌ای بنویسیم که شامل بردار مکان $\mathbf{r}$ یک نقطهٔ دلبخواه P واقع بر آن محور باشد. با وصل کردن نیروی برایند $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_۱$ به نقطهٔ P (شکل ۴۷.۳) و مساوی قراردادن گشتاور این سیستم کوپل-نیرو حول

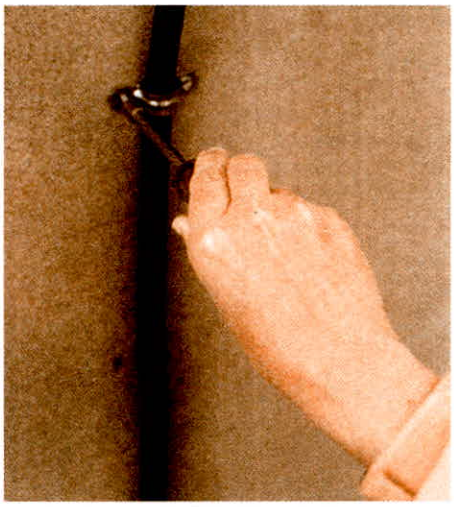
۱. عبارتهای به‌دست‌آمده برای تصویر بردار کوپل بر روی خط اثر $\mathbf{R}$ و برای گام رنچ از نقطهٔ انتخابی O مستقل‌اند. با استفاده از رابطهٔ (۵۳.۳) از بخش ۱۷.۳، پی‌می‌بریم که اگر از نقطهٔ دیگری مانند O' استفاده کرده بودیم، صورت کسر در (۶۲.۳) چنین می‌شد

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

چون حاصلضرب سه‌گانهٔ $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ به‌عینه مساوی با صفر است، داریم

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

بنابراین، ضرب اسکالر $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ از انتخاب نقطهٔ O مستقل است.



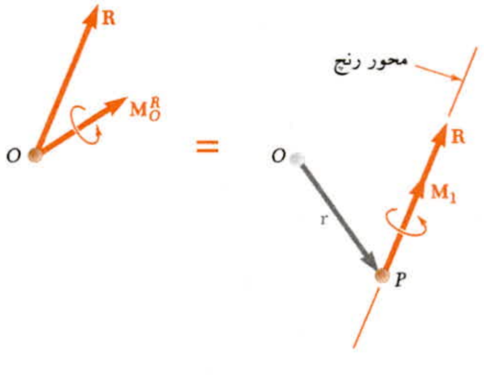
عکس ۶.۳ عمل جلوبری همراه چرخش برای محکم کردن یک پیچ که خطوط اثر نیرو و بردار کوپل و رنج را نشان می‌دهد.

نقطهٔ O با $\mathbf{M}_O^R$، گشتاور برایند سیستم نیروهای اولیه، می‌نویسیم

$$\mathbf{M}_۱ + \mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \qquad (۶۳.۳)$$

یا، با یادآوری معادلهٔ (۶۱.۳)

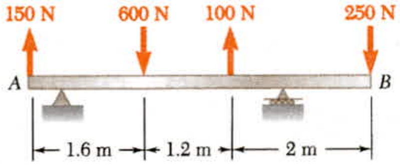
$$p\mathbf{R} + \mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \qquad (۶۴.۳)$$



شکل ۴۷.۳

مسئلهٔ نمونه ۸.۳

به یک تیر ۴٫۸۰ متری نیروهایی مطابق شکل وارد می‌شوند. این سیستم از نیروها را به (الف) یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ A، (ب) یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ B، و (ج) یک تک‌نیرو یا برایند خلاصه کنید.

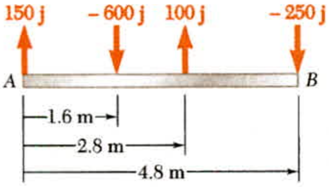


توجه: چون عکس‌العملهای تکیه‌گاهها در این سیستم از نیروها منظور نشده است، این سیستم نمی‌تواند تیر را در تعادل نگه دارد.

حل:

(الف) سیستم کوپل-نیرو در A. سیستم کوپل-نیروی معادل در A، متشکل از یک نیروی $\mathbf{R}$ و یک کوپل $\mathbf{M}_A^R$ است که چنین تعیین می‌شوند:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$
$$= (۱۵۰\ \mathrm{N})\mathbf{j} - (۶۰۰\ \mathrm{N})\mathbf{j} + (۱۰۰\ \mathrm{N})\mathbf{j} - (۲۵۰\ \mathrm{N})\mathbf{j} = -(۶۰۰\ \mathrm{N})\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$$
$$= (۱٫۶\mathbf{i})\times(-۶۰۰\mathbf{j}) + (۲٫۸\mathbf{i})\times(۱۰۰\mathbf{j}) + (۴٫۸\mathbf{i})\times(-۲۵۰\mathbf{j})$$
$$= -(۱۸۸۰\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$

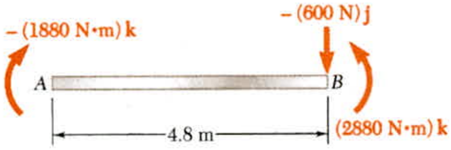


پس سیستم کوپل-نیروی معادل در A عبارت است از

$$\mathbf{R} = ۶۰۰\ \mathrm{N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_A^R = ۱۸۸۰\ \mathrm{N\cdot m} \curvearrowright \quad ◄$$

(ب) سیستم کوپل-نیرو در B. سیستم کوپل-نیرویی در نقطهٔ B پیدا می‌کنیم که با سیستم کوپل-نیروی نقطهٔ A که در قسمت (الف) به‌دست آمد، معادل باشد. نیروی $\mathbf{R}$ ثابت می‌ماند، ولی کوپل جدید $\mathbf{M}_B^R$ را باید طوری تعیین کرد که گشتاور این کوپل با گشتاور سیستم کوپل-نیروی حاصل در قسمت الف حول B، برابر باشد. پس، داریم

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA}\times\mathbf{R}$$
$$= -(۱۸۸۰\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} + (-۴٫۸\ \mathrm{m})\mathbf{i}\times(-۶۰۰\ \mathrm{N})\mathbf{j}$$
$$= -(۱۸۸۰\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} + (۲۸۸۰\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k} = +(۱۰۰۰\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$



پس سیستم کوپل-نیروی معادل در B عبارت است از

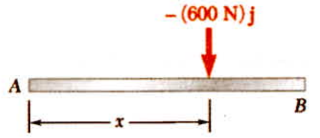
$$\mathrm{R} = ۶۰۰\ \mathrm{N}\downarrow \qquad \mathrm{M}_B^R = ۱۰۰۰\ \mathrm{N\cdot m} \curvearrowleft \quad ◄$$

(ج) تک‌نیرو یا برایند. برایند این سیستم از نیروها برابر است با $\mathbf{R}$ و نقطهٔ اثرش باید طوری باشد که گشتاور $\mathbf{R}$ حول A برابر با $\mathbf{M}_A^R$ بشود. می‌نویسیم

$$\mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$
$$x\mathbf{i}\times(-۶۰۰\ \mathrm{N})\mathbf{j} = -(۱۸۸۰\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$
$$-x(۶۰۰\ \mathrm{N})\mathbf{k} = -(۱۸۸۰\ \mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$

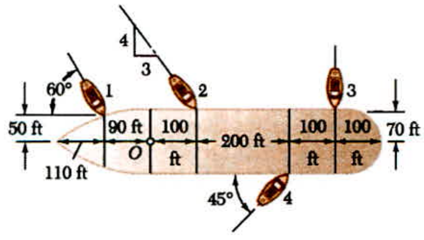
ـ نتیجه می‌گیریم که $x = ۳/۱۳\ \text{m}$ است. بنابراین تک‌نیروی معادل این سیستم برابر است با

◄ $R = ۶۰۰\ \text{N}\downarrow \qquad x = ۳/۱۳\ \text{m}$



مسئلهٔ نمونه ۹.۳

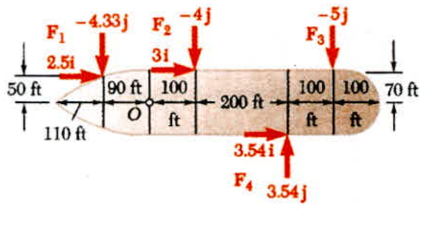
یک کشتی اقیانوس‌پیما را چهار یدک‌کش به طرف اسکله می‌کشند. هر یدک‌کش ۵۰۰۰ lb نیرو در راستاهای نشان داده شده وارد می‌کند. (الف) سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O را پیدا کنید. (ب) یک یدک‌کش نیرومندتر به کجای بدنهٔ کشتی باید نیرو وارد کند تا اثرش درست مثل اثر چهار یدک‌کش قبلی باشد؟



حل:

(الف) سیستم کوپل-نیرو در O. هر یک از نیروها را به مؤلفه‌های نشان داده شده در نمودار تجزیه می‌کنیم (از یکای kip استفاده کرده‌ایم). سیستم کوپل-نیرو در O با سیستم داده شده شامل نیروی $\mathbf{R}$ و یک کوپل $\mathbf{M}_O^R$ که به این ترتیب به‌دست می‌آیند

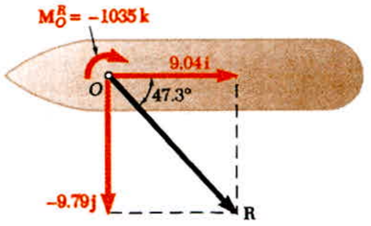
$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F} \\
&= (۲/۵۰\mathbf{i} - ۴/۳۳\mathbf{j}) + (۳/۰۰\mathbf{i} - ۴/۰۰\mathbf{j}) + (-۵/۰۰\mathbf{j}) \\
&\quad + (۳/۵۴\mathbf{i} + ۳/۵۴\mathbf{j}) \\
&= ۹/۰۴\mathbf{i} - ۹/۷۹\mathbf{j} \\
\mathbf{M}_O^R &= \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) \\
&= (-۹۰\mathbf{i} + ۵۰\mathbf{j})\times(۲/۵۰\mathbf{i} - ۴/۳۳\mathbf{j}) \\
&\quad + (۱۰۰\mathbf{i} + ۷۰\mathbf{j})\times(۳/۰۰\mathbf{i} - ۴/۰۰\mathbf{j}) \\
&\quad + (۴۰۰\mathbf{i} + ۷۰\mathbf{j})\times(-۵/۰۰\mathbf{j}) \\
&\quad + (۳۰۰\mathbf{i} - ۷۰\mathbf{j})\times(۳/۵۴\mathbf{i} + ۳/۵۴\mathbf{j}) \\
&= (۳۹۰ - ۱۲۵ - ۴۰۰ - ۲۱۰ - ۲۰۰۰ + ۱۰۶۲ + ۲۴۸)\mathbf{k} \\
&= -۱۰۳۵\mathbf{k}
\end{aligned}$$



بنابراین سیستم کوپل-نیروی معادل در O عبارت است از

$$\mathbf{R} = (۹/۰۴\ \text{kip})\mathbf{i} - (۹/۷۹\ \text{kip})\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_O^R = -(۱۰۳۵\ \text{kip}\cdot\text{ft})\mathbf{k}$$

◄ $R = ۱۳/۳۳\ \text{kip}\ \measuredangle ۴۷/۳^\circ \qquad M_O^R = ۱۰۳۵\ \text{kip}\cdot\text{ft}\ \circlearrowright$



تذکر. چون همهٔ نیروها در صفحهٔ شکل قرار دارند، می‌توانستیم انتظار داشته باشیم که جمع گشتاورهای آنها بر صفحه عمود باشد. توجه کنید که گشتاور هر مؤلفهٔ نیرو را می‌توانستیم مستقیماً از روی شکل با ضرب بزرگی آن در فاصلهٔ عمودی‌اش تا O، و بعد تخصیص یک علامت مثبت یا منفی به این حاصلضرب ــ بسته به جهت گشتاور ــ تعیین کنیم.

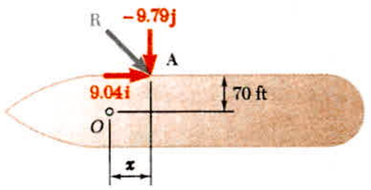
(ب) یدک‌کش نیرومندتر. نیروی ناشی از یدک‌کش تنها باید برابر با $\mathbf{R}$ و نقطهٔ اثرش (A) باید در جایی باشد که گشتاور $\mathbf{R}$ حول O برابر با $\mathbf{M}_O^R$ شود. با توجه به اینکه بردار مکان A عبارت است از

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + ۷۰\mathbf{j}$$

می‌نویسیم

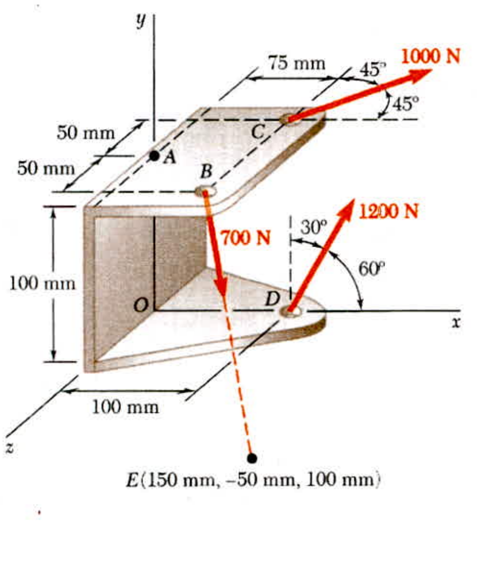
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\times\mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\
(x\mathbf{i} + ۷۰\mathbf{j})\times(۹/۰۴\mathbf{i} - ۹/۷۹\mathbf{j}) &= -۱۰۳۵\mathbf{k} \\
-x(۹/۷۹)\mathbf{k} - ۶۳۳\mathbf{k} &= -۱۰۳۵\mathbf{k}
\end{aligned}$$

◄ $x = ۴۱/۱\ \text{ft}$



مسئلهٔ نمونه ۱۰.۳

سه کابل مطابق شکل به یک نگهدارنده متصل شده‌اند. سیستم کوپل-نیروی معادل با نیروهای کابلها را در نقطهٔ A پیدا کنید.



حل:
ابتدا بردار مکانهای نسبی واصل از نقطهٔ A به نقطه اثرهای نیروهای مختلف را پیدا می‌کنیم و نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه می‌کنیم. نظر به اینکه $\mathbf{F}_B = (۷۰۰\ \text{N})\boldsymbol{\lambda}_{BE}$ است که در آن

$$\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{۷۵\mathbf{i} - ۱۵۰\mathbf{j} + ۵۰\mathbf{k}}{۱۷۵}$$

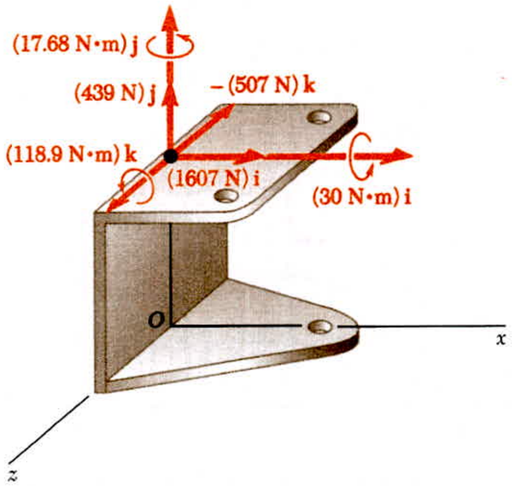
با استفاده از یکاهای متر و نیوتون، داریم

$$\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = ۰٫۰۷۵\mathbf{i} + ۰٫۰۵۰\mathbf{k} \quad \mathbf{F}_B = ۳۰۰\mathbf{i} - ۶۰۰\mathbf{j} + ۲۰۰\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = ۰٫۰۷۵\mathbf{i} - ۰٫۰۵۰\mathbf{k} \quad \mathbf{F}_C = ۷۰۷\mathbf{i} - ۷۰۷\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} = ۰٫۱۰۰\mathbf{i} - ۰٫۱۰۰\mathbf{j} \quad \mathbf{F}_D = ۶۰۰\mathbf{i} + ۱۰۳۹\mathbf{j}$$

سیستم کوپل-نیروی معادل با نیروهای وارد از کابلها در نقطهٔ A عبارت است از یک نیروی $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ و یک کوپل $\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$. نیروی $\mathbf{R}$ به‌راحتی از جمع مؤلفه‌های x، y، و z نیروها به‌دست می‌آید

◄ $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (۱۶۰۷\ \text{N})\mathbf{i} + (۴۳۹\ \text{N})\mathbf{j} - (۵۰۷\ \text{N})\mathbf{k}$

اگر گشتاورهای نیروها را به‌صورت دترمینان بنویسیم محاسبهٔ M_A^R ساده‌تر می‌شود (بخش ۸.۳):



$$\mathbf{r}_{B/A}\times\mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰٫۰۷۵ & ۰ & ۰٫۰۵۰ \\ ۳۰۰ & -۶۰۰ & ۲۰۰ \end{vmatrix} = ۳۰\mathbf{i} \qquad -۴۵\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A}\times\mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰٫۰۷۵ & ۰ & -۰٫۰۵۰ \\ ۷۰۷ & ۰ & -۷۰۷ \end{vmatrix} = \qquad ۱۷٫۶۸\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{D/A}\times\mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰٫۱۰۰ & -۰٫۱۰۰ & ۰ \\ ۶۰۰ & ۱۰۳۹ & ۰ \end{vmatrix} = \qquad ۱۶۳٫۹\mathbf{k}$$

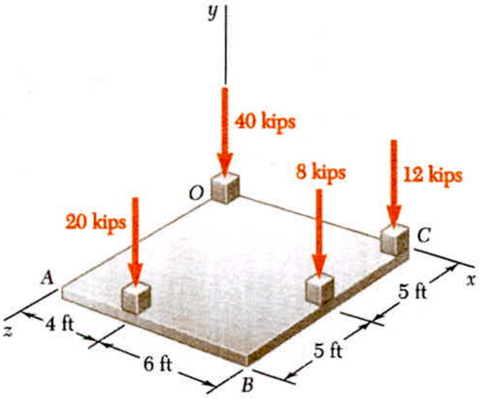
با جمع عبارتهای به‌دست آمده، خواهیم داشت

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = (۳۰\ \text{N.m})\mathbf{i} + (۱۷٫۶۸\ \text{N.m})\mathbf{j}$$
◄ $$+ (۱۱۸٫۹\ \text{N.m})\mathbf{k}$$

مؤلفه‌های قائم نیروی $\mathbf{R}$ و کوپل $\mathbf{M}_A^R$ در شکل بالا نشان داده شده‌اند.

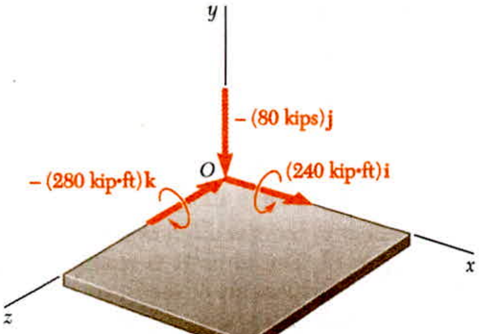
مسئلهٔ نمونه ۱۱.۳

یک پی مربعی مطابق شکل چهارستون را نگهداری می‌کند. بزرگی و نقطهٔ اثر برایند بارهای وارد شده را تعیین کنید.



حل:
ابتدا سیستم نیروهای داده شده را به یک کوپل-نیرو در مبدأ مختصات O خلاصه می‌کنیم. این سیستم کوپل-نیرو از یک نیروی $\mathbf{R}$ و یک کوپل $\mathbf{M}_O^R$ تشکیل می‌شود که عبارت‌اند از

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$$



بردار مکانهای نقطه اثرهای نیروها را تعیین و محاسبات را به شکل یک جدول مرتب می‌کنیم.

$\mathbf{r}$, ft	$\mathbf{F}$, kip	$\mathbf{r}\times\mathbf{F}$, kip · ft
۰	$-۴۰\mathbf{j}$	۰
$۱۰\mathbf{i}$	$-۱۲\mathbf{j}$	$-۱۲۰\mathbf{k}$
$۱۰\mathbf{i} + ۵\mathbf{k}$	$-۸\mathbf{j}$	$۴۰\mathbf{i} - ۸۰\mathbf{k}$
$۴\mathbf{i} + ۱۰\mathbf{k}$	$-۲۰\mathbf{j}$	$۲۰۰\mathbf{i} - ۸۰\mathbf{k}$
	$\mathbf{R} = -۸۰\mathbf{j}$	$\mathbf{M}_O^R = ۲۴۰\mathbf{i} - ۲۸۰\mathbf{k}$

چون نیروی $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_O^R$ متقابلاً برهم عمودند، سیستم کوپل-نیروی

دست‌آمده را می‌شود به یک تک‌نیرو ($\mathbf{R}$) خلاصه کرد. نقطهٔ اثر جدید $\mathbf{R}$ باید ر صفحهٔ پی و طوری انتخاب شود که گشتاور $\mathbf{R}$ حول O برابر با $\mathbf{M}_O^R$ باشد. اگر ردار مکان این نقطهٔ اثر را با $\mathbf{r}$ و مختصاتش را با x و z نشان دهیم، می‌توانیم نویسیم

$$\mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k})\times(-۸۰\mathbf{j}) = ۲۴۰\,\mathbf{i} - ۲۸۰\,\mathbf{k}$$

$$-۸۰\,x\mathbf{k} + ۸۰\,z\mathbf{i} = ۲۴۰\,\mathbf{i} - ۲۸۰\,\mathbf{k}$$

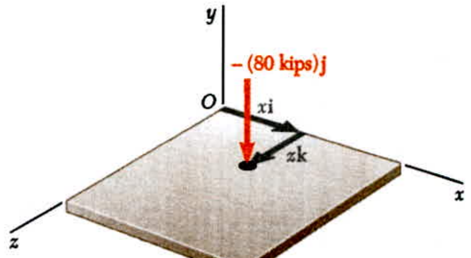
که از آن نتیجه می‌شود

$$۸۰\,z = ۲۴۰ \qquad -۸۰\,x = -\,۲۸۰$$

$$z = ۳{,}۰۰\ \text{ft} \qquad x = ۳{,}۵۰\ \text{ft}$$

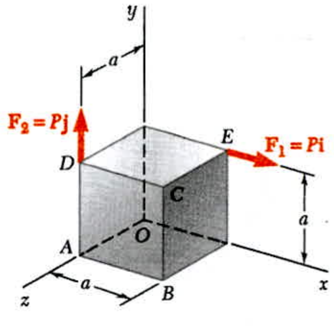
نتیجه می‌گیریم که برایند سیستم نیروهای داده شده برابر است با

◄ $x = ۳{,}۵۰\ \text{ft},\ z = ۳{,}۰۰\ \text{ft}$ $\qquad \mathbf{R} = ۸۰\ \text{kip}\downarrow$



مسئلهٔ نمونه ۱۲.۳

دو نیرو با بزرگی یکسان P به مکعبی به ضلع a مطابق شکل وارد می‌شوند. به‌جای این دو نیرو یک رنچ معادل قرار دهید و (الف) بزرگی و راستای نیروی برایند $\mathbf{R}$ را تعیین نید. (ب) گام رنچ را پیدا کنید. (ج) محل تلاقی محور رنچ با صفحهٔ yz را مشخص نید.



حل:

سیستم کوپل ـ نیروی معادل در O. ابتدا سیستم کوپل ـ نیروی معادل در مبدأ O را تعیین می‌کنیم. بردار مکانهای نقطه‌های E و D، یعنی نقطه اثرهای دو نیروی مورد ظر عبارت‌اند از $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ و $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. برایند دو نیرو ($\mathbf{R}$) و برایند شتاورهای آنها ($\mathbf{M}_O^R$) حول O عبارت‌اند از

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲ = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad (۱)$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{r}_E\times\mathbf{F}_۱ + \mathbf{r}_D\times\mathbf{F}_۲ = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j})\times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k})\times P\mathbf{j}$$
$$= -\,Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \qquad (۲)$$

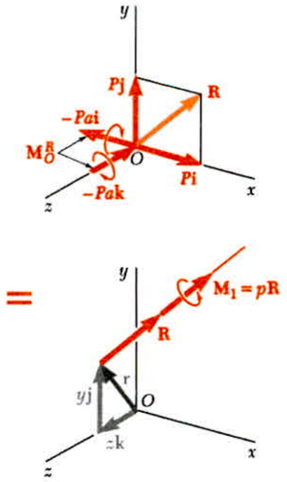
(الف) نیروی برایند $\mathbf{R}$. از معادلهٔ (۱) و شکل نتیجه می‌گیریم که بزرگی نیروی برایند $R = P\sqrt{۲}$ است و در صفحهٔ xy قرار دارد، و با محورهای x و y زاویهٔ $۴۵°$ تشکیل می‌دهد. پس

◄ $R = P\sqrt{۲} \qquad \theta_x = \theta_y = ۴۵° \qquad \theta_z = ۹۰°$

(ب) گام رنچ. با به کار بردن فرمول (۶۲.۳) از بخش ۲۱.۳ و معادله‌های (۱) و (۲) بالا، می‌نویسیم

$$p = \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{M}_O^R}{R^۲} = \frac{P(\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(-Pa)(\mathbf{i}+\mathbf{k})}{(P\sqrt{۲})^۲} = \frac{-P^۲a(۱+۰+۰)}{۲P^۲}$$

◄ $p = -\dfrac{a}{۲}$



(ج) محور رنچ. از معادلهٔ (۶۱.۳) و یافته‌های بالا نتیجه می‌گیریم که رنچ متشکل از نیروی $\mathbf{R}$، رابطهٔ (۱)، و بردار کوپل زیر است

$$\mathbf{M}_۱ = p\mathbf{R} = -\frac{a}{۲}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{۲}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad (۳)$$

برای پیدا کردن محل تلاقی محور رنچ با صفحهٔ yz، می‌گوییم که گشتاور رنچ حول O برابر با گشتاور برایند $\mathbf{M}_O^R$ی سیستم اولیه است:

$$\mathbf{M}_۱ + \mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

یا، با توجه به اینکه $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ است و با نشاندن $\mathbf{R}$، $\mathbf{M}_O^R$، و $\mathbf{M}_۱$ از معادله‌های (۱)، (۲)، و (۳)، خواهیم داشت

$$-\frac{Pa}{۲}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\,Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{۲}\mathbf{i} - \frac{Pa}{۲}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} = -\,Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k}$$

با مساوی قراردادن ضریبهای $\mathbf{k}$ و سپس ضریبهای $\mathbf{j}$، نتیجه می‌شود

◄ $z = a/۲ \qquad y = a$

چگونه مسئله حل کنیم

این درس اختصاص به تبدیل و خلاصه کردن سیستم نیروها داشت. در حل مسئله‌های این بخش از شما خواسته می‌شود که عملیات زیر را انجام بدهید.

۱. تبدیل یک سیستم نیرو به یک نیرو و یک کوپل در نقطهٔ معین A. این نیرو برایند $(\mathbf{R})$ سیستم است و از جمع نیروها به‌دست می‌آید؛ گشتاور کوپل گشتاور برایند سیستم است و از جمع گشتاورهای نیروها حول نقطهٔ A به‌دست می‌آید. داریم

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$$

که در آن بردار مکان $\mathbf{r}$ از نقطهٔ A به هر نقطه‌ای روی خط اثر $\mathbf{F}$ رسم می‌شود.

۲. حرکت‌دادن یک سیستم کوپل ـ نیرو از نقطهٔ A به نقطهٔ B. اگر بخواهید یک سیستم نیرو را پس از تبدیل آن به یک سیستم کوپل ـ نیرو در نقطهٔ A، به یک سیستم کوپل ـ نیرو در نقطه B تبدیل کنید، نیاز به محاسبهٔ دوبارهٔ گشتاور نیروها حول نقطهٔ B ندارید. برایند $\mathbf{R}$ تغییر نمی‌کند، و گشتاور برایند جدید $\mathbf{M}_B^R$ را می‌توان از جمع $\mathbf{M}_A^R$ و گشتاور حول B نیروی $\mathbf{R}$ وارد بر A به‌دست آورد [مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۳]. با نشان‌دادن بردار رسم شده از B به A با $\mathbf{s}$ می‌توانید بنویسید

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s}\times\mathbf{R}$$

۳. تحقیق دربارهٔ معادل بودن دو سیستم نیرو. ابتدا هر دو سیستم را به یک سیستم کوپل ـ نیرو در نقطهٔ، دلبخواه، A تبدیل کنید (چنانکه در بند ۱ توضیح داده شد). دو سیستم معادل‌اند (یعنی، اثر یکسانی روی یک جسم صلب دارند) اگر دو سیستم کوپل ـ نیرویی که به‌دست آورده‌اید یکسان باشند، یعنی اگر

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \quad \text{و} \quad \Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma\mathbf{M}'_A$$

اگر اولین معادله صادق نباشد، یعنی، اگر دو سیستم دارای برایند برابر $\mathbf{R}$ نباشند، دو سیستم نمی‌توانند معادل باشند و بنابراین دیگر لزومی ندارد که ببینید آیا معادله دوم برقرار است یا نه.

۴. تبدیل یک سیستم نیروی معین به یک تک‌نیرو. ابتدا سیستم مورد نظر را به یک سیستم کوپل ـ نیرو متشکل از برایند $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_A^R$ در نقطهٔ مناسب A تبدیل کنید (مانند آنچه در بند ۱ گفته شد). از درس گذشته به یاد دارید که تقلیل بیشتر سیستم به یک تک‌بردار فقط به شرطی امکانپذیر است که نیروی $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_A^R$ متقابلاً برهم عمود باشند. و این البته در مورد سیستمهایی صادق است که همرس، هم‌صفحه، یا موازی باشند. بنابراین تک‌نیروی لازم را می‌توان با حرکت‌دادن $\mathbf{R}$ به‌دست آورد تا جایی که گشتاورش حول A برابر با $\mathbf{M}_A^R$ شود، چنانکه در مسئله‌های درس گذشته عمل کردید. همچنین می‌توانید بنویسید که بردار مکان $\mathbf{r}$ از نقطهٔ A به هر نقطهٔ روی خط اثر تک‌نیروی $\mathbf{R}$ باید در معادلهٔ زیر صدق کند

$$\mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

در مسئله‌های نمونه ۸.۳ و ۹.۳، و ۱۱.۳ از این روش استفاده کردیم.

۵. تبدیل یک سیستم نیروی معین به یک رنچ. اگر نیروها در سیستم داده‌شده همرس، هم‌صفحه، یا موازی نباشند، سیستم کوپل ـ نیرو در نقطه A متشکل از یک نیروی $\mathbf{R}$ و یک بردار کوپل M_A^R خواهد بود، که در حالت کلی برهم عمود نیستند. (راه تحقیق دربارهٔ عمود بودن $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}_A^R$ برهم تشکیل ضرب اسکالر آنها است. اگر حاصل این ضرب صفر باشد آنها برهم عمودند؛ و در غیر این صورت عمود برهم نخواهند بود.) اگر $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}_A^R$ برهم عمود نباشند، سیستم کوپل ـ نیرو (و بنابراین سیستم نیروهای داده شده) را نمی‌شود تبدیل به یک تک‌نیرو کرد. اما می‌شود سیستم را به یک رنچ تبدیل کرد ــ یعنی ترکیب یک نیروی $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_1$ در امتداد یک خط اثر مشترک که آن را محور رنچ می‌نامند (شکل ۴۷.۳). نسبت $p = M_1/R$ را گام رنچ می‌نامند.

برای تبدیل یک سیستم نیروی معین به یک رنچ باید به این ترتیب عمل کنید:

الف. سیستم داده شده را به یک سیستم کوپل ـ نیروی معادل $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O^R)$، واقع در مبدأ O، خلاصه کنید.

ب. گام p را از معادلهٔ (۶۲.۳)

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{M}_O^R}{R^2} \qquad (۶۲.۳)$$

و بردار کوپل را از تساوی $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$ به‌دست بیاورید.

ج. گشتاور حول O مربوط به رنچ را برابر با گشتاور برایند M_O^R سیستم کوپل ـ نیرو در نقطه O قرار بدهید:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \qquad (۶۳.۳)$$

این معادله امکان می‌دهد که محل تلاقی خط اثر رنچ با یک صفحه خاص را پیدا کنید، زیرا بردار مکان $\mathbf{r}$ در راستای از O تا آن نقطه است.

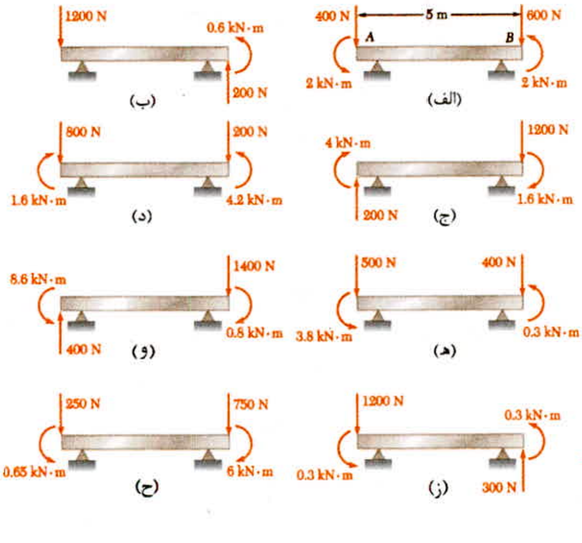
این مراحل در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲.۳ نشان داده شده است. اگرچه تعیین رنچ و محل تلاقی محور آن با یک صفحه ممکن است مشکل به‌نظر برسد، اما درواقع همان کاربرد ایده‌ها و روشهای تدوین شده در این فصل است. بنابراین وقتی در رنچ مهارت پیدا کردید، می‌توانید مطمئن باشید که بیشتر مطالب فصل ۳ را یاد گرفته‌اید.

مسئله‌ها

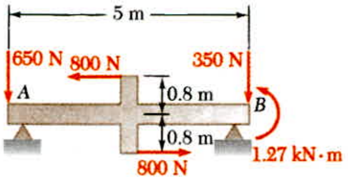
۹۸.۳ تیری به طول $5\ \mathrm{m}$ تحت تأثیر بارگذاریهای مختلف قرار گرفته است. (الف) هر بارگذاری را با یک سیستم کوپل ـ نیروی معادل در انتهای B از تیر جایگزین کنید. (ب) کدامیک از بارگذاریها معادل‌اند.

۹۹.۳ تیری به طول $5\ \mathrm{m}$ مطابق شکل بارگذاری شده است. کدام بارگذاری مسئله ۹۸.۳ معادل با این بارگذاری است.

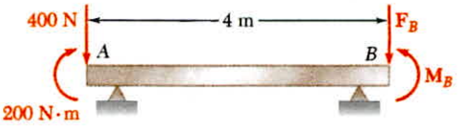
۱۰۰.۳ تک‌نیروی معادل و فاصله از انتهای A تا خط اثرش برای تیر و بارگذاری نشان داده شده را در حالتهای زیر به‌دست آورید (الف) $\mathbf{F}_B = 200\ \mathrm{N}\downarrow$، $\mathbf{M}_B = 100\ \mathrm{N\cdot m}$، (ب) $\mathbf{F}_B = 100\ \mathrm{N}\uparrow$، $\mathbf{M}_B = -600\ \mathrm{N\cdot m}$، (ج) $\mathbf{F}_B = 100\ \mathrm{N}\downarrow$، $\mathbf{M}_B = -200\ \mathrm{N\cdot m}$.



شکل م ۹۸.۳

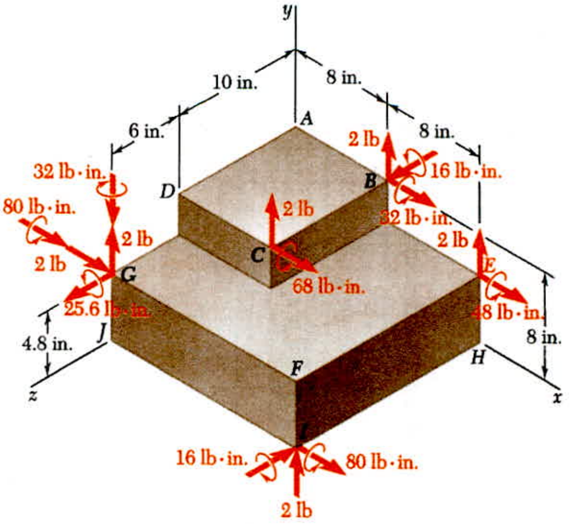


شکل م ۹۹.۳



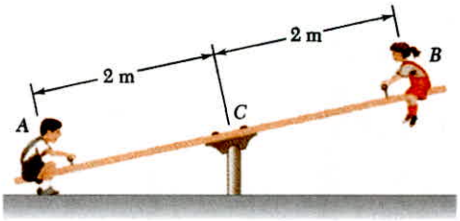
شکل م ۱۰۰.۳

۱۰۱.۳ پنج سیستم کوپل نیروی مجزا بر گوشه‌های یک قطعه فلزی مطابق شکل وارد شده است. مطلوب است سیستم‌های معادل با نیروی $\mathbf{F} = (2\ \text{lb})\mathbf{j}$ و کوپل گشتاور $\mathbf{M} = (48\ \text{lb}\cdot\text{in})\mathbf{i} + (32\ \text{lb}\cdot\text{in})\mathbf{k}$ واقع شده در نقطه A.



شکل م ۱۰۱.۳

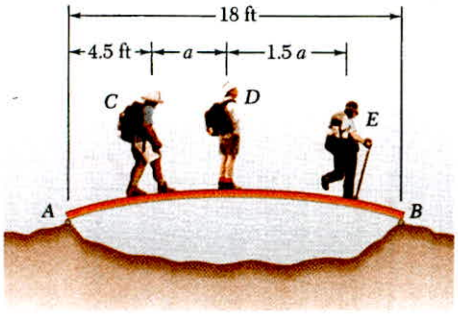
۱۰۲.۳ دو بچه به جرمهایی به‌ترتیب ۳۸ kg و ۲۹ kg در دو سر A و B یک الاکلنگ نشسته‌اند. سومین بچه در چه قسمتی از الاکلنگ بنشیند تا برایند وزن این سه بچه از نقطهٔ C بگذرد، اگر بدانیم جرم او برابر است با (الف) ۲۷ kg، (ب) ۲۴ kg.



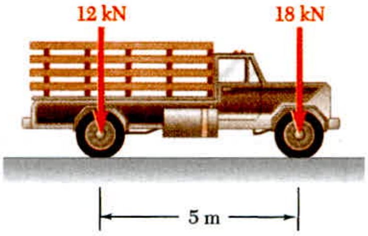
شکل م ۱۰۲.۳

۱۰۳.۳ سه گردشگر مطابق شکل از روی پلی می‌گذرند. می‌دانیم که وزن گردشگران به‌ترتیب در نقاط C، D، و E برابر ۲۰۰ lb، ۱۷۵ lb، و ۱۳۵ lb است. معین کنید (الف) فاصله افقی از A تا خط اثر برایند سه وزن این سه نفر، اگر $a = 3.3$ ft، (ب) اندازه در a طوری که تحمل بارها روی نقاط A و B پل برابر باشند.

۱۰۴.۳ برای بردن یک کامیون در حالت خالی، بارها در جلو و عقب محور به‌ترتیب برابر ۱۸ kN و ۱۲ kN باشد معین کنید وزن و محل سنگین‌ترین باری که کامیون می‌تواند حمل کند. اگر بار روی هر محور از ۴۰ kN تجاوز نکند.

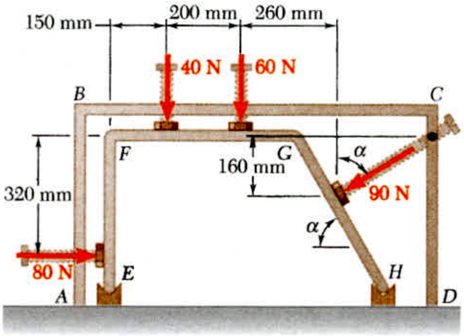


شکل م ۱۰۳.۳



شکل م ۱۰۴.۳

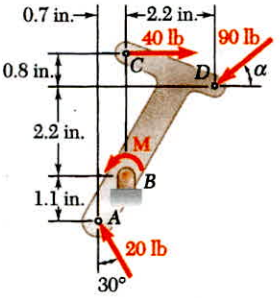
۱۰۵.۳ کارگیر $ABCD$ به‌منظور ساخت مدلهای نورکشسان اجزای مکانیکی به‌کار می‌آید. برای مدل و نیروهای نشان داده شده اگر $\alpha = 50°$ باشد مطلوب است (الف) برایند نیروهای وارد شده، (ب) نقطه‌ای که خط اثر برایند خط ترسیم بین نقاط F و G را قطع می‌کند.



شکل م ۱۰۵.۳ و م ۱۰۶.۳

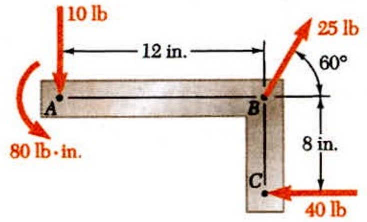
۱۰۶.۳ کارگیر $ABCD$ به‌منظور ساخت مدلهای نورکشسان اجزای مکانیکی به‌کار می‌آید. برای مُدل و نیروهای نشان داده شده مطلوب است (الف) مقدار α را طوری که خط اثر برایند نیروهای وارد شده از میان مدل ۱۰۰ mm به سمت راست نیروی ۴۰-N بگذرد، (ب) برایند نیروهای وارد شده.

۱۰۷.۳ وقتی کوپل $\mathbf{M}$ در یک مکانیسم وارد می‌شود، برایند نیروهای وارد بر حلقه مطابق شکل از یک راهنما و اتصال دهنده تشکیل شده است. مطلوب است (الف) مقادیر $\mathbf{M}$ و α را طوری که نیروها و کوپلهای وارد شده را بتوان به یک تک‌نیروی معادل تبدیل کرد و خط اثر از نقاط B و D بگذرد. (ب) نیروی معادل.



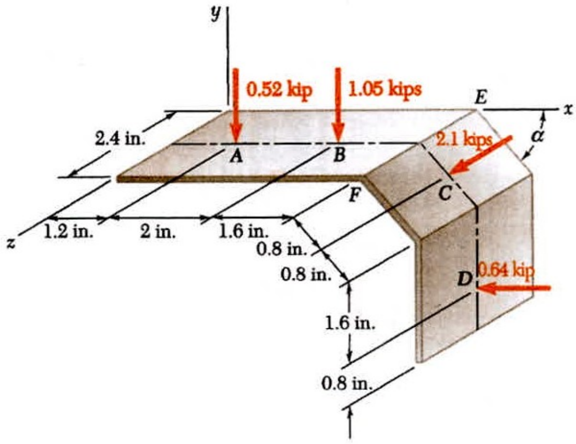
شکل م ۱۰۷.۳

۱۰۸.۳ سه نیرو و یک کوپل نشان داده شده بر یک دیوارکوب زاویه‌دار وارد می‌شوند. (الف) برایند سیستم نیروها را به‌دست آورید. (ب) محل نقاطی که خط اثر برایند خط AB و BC را قطع می‌کند.



شکل م ۱۰۸.۳

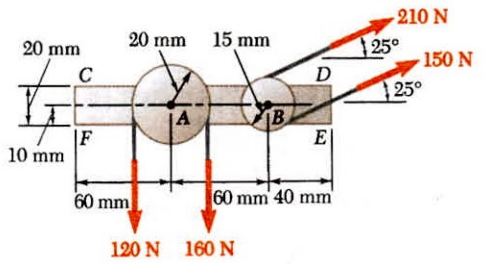
۱۰۹.۳ برای ایجاد چهار سوراخ همزمان در ورقی آلومینیمی، مطابق شکل نیروهایی با منگنه بر ورق وارد می‌شود. اگر نیروها بر سطوح این ورق عمود باشند، مطلوب است (الف) برایند نیروهای وارد شده بر قطعه، اگر $\alpha = ۴۵°$ باشد. نقطه قطع خط اثر برایند با خط واصل A و B را به‌دست آورید. (ب) اندازه α را طوری به‌دست آورید که خط اثر برایند از لبهٔ EF بگذرد.



شکل م ۱۰۹.۳ و م ۱۱۰.۳

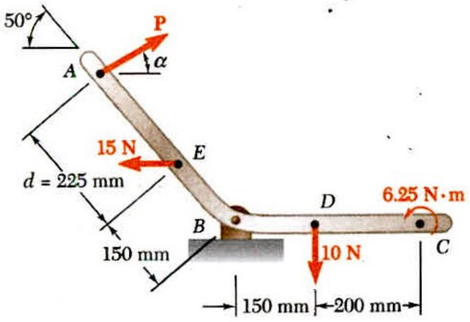
۱۱۰.۳ برای ایجاد چهار سوراخ همزمان در ورقی آلومینیمی، مطابق شکل نیروهایی با منگنه بر ورق وارد می‌شود. اگر نیروها بر سطوح ورق عمود باشند، مطلوب است (الف) مقدار α را طوری که برایند نیروهای وارد شده، موازی با نیروی ۲٫۱-kip باشد، (ب) برایند متناظر نیروهای وارد شده و نقطه تقاطع خط اثرش را با خط واصل بین نقاط A و B.

۱۱۱.۳ قرقره‌های A و B روی یک دیوارکوب $CDEF$ نصب شده است. کشش در هر طرف تسمه‌ها در شکل نشان داده شده است. چهار نیرو را با یک تک‌نیروی معادل نیروها جایگزین کنید و محل قرارگرفتن خط اثر تقاطع لبه پایینی دیوارکوب را تعیین کنید.



شکل م ۱۱۱.۳

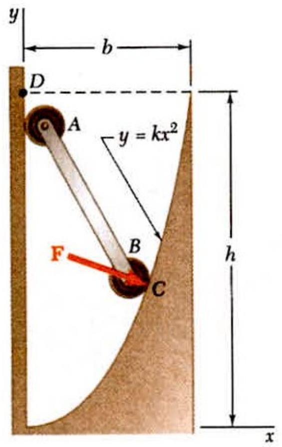
۱۱۲.۳ سه نیرو و یک کوپل بر میل‌لنگ ABC وارد می‌شود. با دانستن اینکه $P = ۲۵\text{ N}$ و $\alpha = ۴۰°$ مطلوب است (الف) برایند سیستم نیروهای مفروض، (ب) محل قطع خط اثر برایند و خط واصل بین نقاط B و C، (ج) محل قطع خط اثر برایند و خط واصل بین نقاط A و B.



شکل م ۱۱۲.۳ و م ۱۱۳.۳

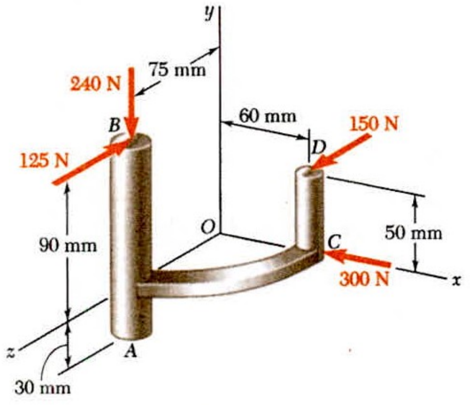
۱۱۳.۳ سه نیرو و یک کوپل بر میل‌لنگ ABC وارد می‌شود. اندازهٔ d را طوری به‌دسـ آورید که سیستم نیروهای مفروض معادل صفر در (الف) نقطه B، (ب) نقطه D باشد.

۱۱۴.۳ وقتی دنبال کننده AB در امتداد سطح عضو C می‌غلتد، نیروی ثابت F عمو بر سطح را وارد می‌کند. (الف) نیروی F را به یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطه D جایگزین کنید. (ب) به‌ازای $b = ۱\text{ ft}$ و $h = ۲\text{ ft}$ مطلوب است مقدار x را در حالتی که گشتاور سیستم نیرو-کوپل معادل در A ماکزیمم باشد.



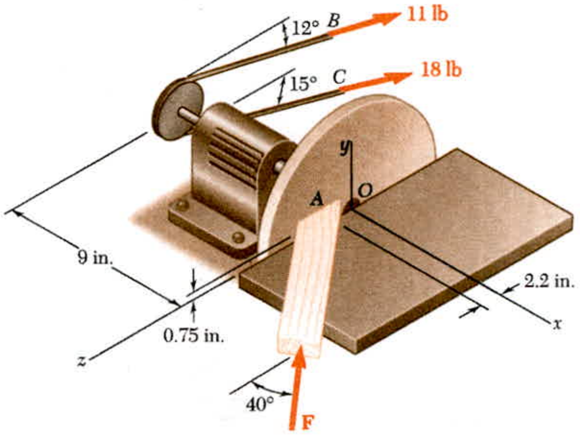
شکل م ۱۱۴.۳

۱۱۵.۳ قطعه‌ای از ماشین تحت اثر نیروهای نشان داده شده قرار می‌گیرد. هر یک از آ موازی یکی از محورهای مختصات است. این نیروها را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل د نقطه A جایگزین کنید.



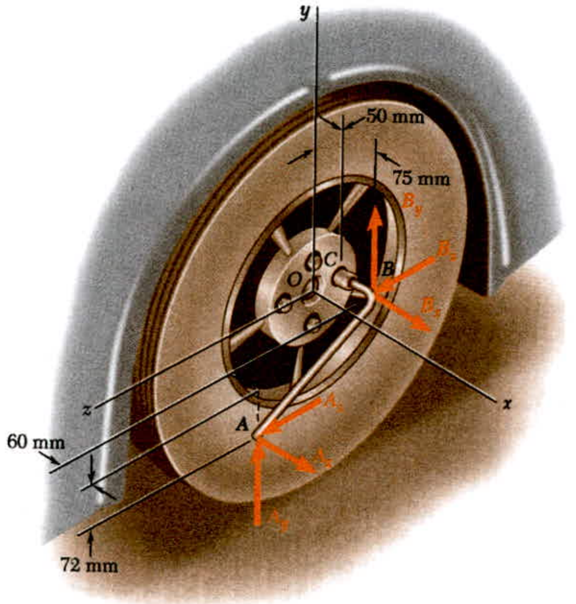
شکل م ۱۱۵.۳

۱۱۶.۳ در هنگام سمباده‌کاری قطعه‌ای چوبی، نیروی $\mathbf{F}$ به بزرگی ۱٫۸ lb را بر دیسک وارد می‌کند. می‌دانیم که نیروهای وارد شده از تسمه قرقرهٔ به قطر ۵ in در صفحه موازی با صفحه yz قرار می‌گیرد. $\mathbf{F}$ و نیروهای تسمه را به D یک سیستم کوپل-نیروی معادل در O تبدیـ کنید.



شکل م ۱۱۶.۳

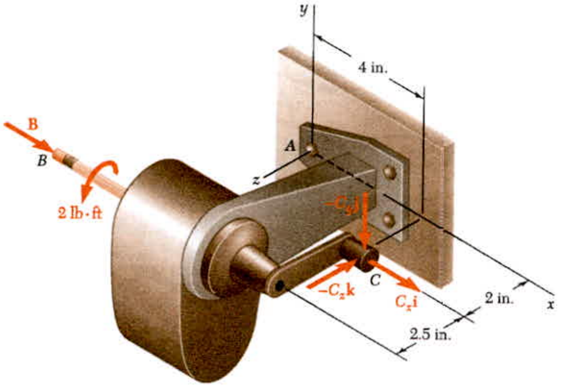
۱۱۷.۳ مالک خودرو از رنچ ABC برای شل کردن پیچ در C استفاده می‌کند. طول دسته برابر ۳۷۲ mm و مالک خودرو نیروهای A و B را بر رنچ وارد می‌کند. می‌دانیم که این نیروها که با یک سیستم کوپل-نیرو در قطعه O معادل‌اند، شامل نیروی $\mathbf{R} = -(۱۰\ \mathrm{N})\mathbf{i} + (۶\ \mathrm{N})\mathbf{k}$ و کوپل $\mathbf{M}_O = (۶۰\ \mathrm{N \cdot m})\mathbf{i} + (۰/۰۵\ \mathrm{N \cdot m})\mathbf{j} - (۱۰\ \mathrm{N \cdot m})\mathbf{k}$ است. مطلوب است نیروهای وارد بر A و B، وقتی $A_x = ۲\ \mathrm{N}$ است.



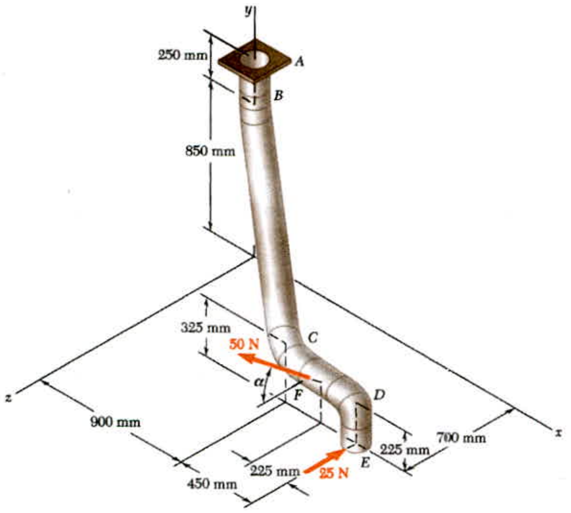
شکل م ۱۱۷.۳

۱۱۸.۳ دانش آموزی با استفاده از مداد تراش، نیروها و کوپلی مطابق شکل بر آن وارد می‌کند. (الف) مطلوب است نیروهای وارد بر B و C را در صورتی که می‌دانیم این نیروها و کوپل با یک سیستم کوپل-نیروی وارد بر A شامل نیروی $\mathbf{R} = (۳/۹\ \mathrm{lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (۱/۱\ \mathrm{lb})\mathbf{k}$ و کوپل $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (۱/۵\ \mathrm{lb \cdot ft})\mathbf{j} - (۱/۱\ \mathrm{lb \cdot ft})\mathbf{k}$ معادل‌اند. (ب) مقادیر متناظر R_y و M_x را به‌دست آورید.

۱۱۹.۳ قسمتی از یک دودکش در نقطهٔ A به سقف چسبیده است. یک کارگر در حالی که انتهای آزاد دودکش را در F نگه داشته است آن را در نقطه E به درون هل می‌دهد و در F به بیرون می‌کشد تا انتهای E با کوره در یک راستا باشند. اگر نیروی ۵۰-N در نقطهٔ F در صفحه‌ای موازی با صفحه yz واقع باشد، (الف) زاویه α نیروی وارد در F را که با افق تشکیل می‌دهد به‌دست آورید، طوری که مجرای AB تمایلی به چرخش حول عمود نداشته باشد، (ب) سیستم کوپل-نیروی معادل در B را برای سیستم نیروی مفروض وقتی این شرط صدق می‌کند، به‌دست آورید.



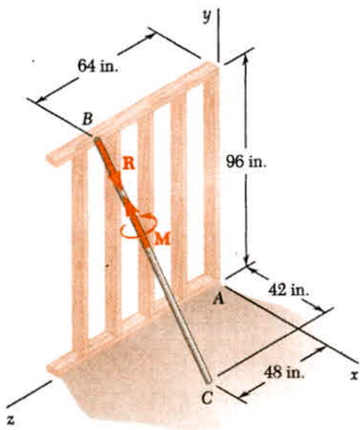
شکل م ۱۱۸.۳



شکل م ۱۱۹.۳ و م ۱۲۰.۳

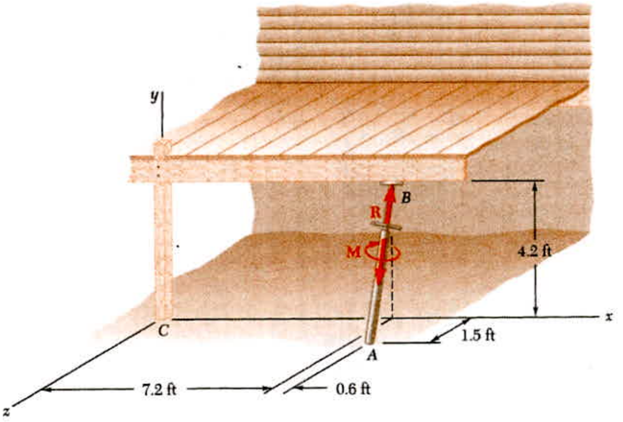
۱۲۰.۳ قسمتی از یک دودکش در نقطه A به سقف چسبیده است. یک کارگر در حالی که انتهای آزاد دودکش را در F نگه داشته است، آن را در نقطهٔ E به درون هل می‌دهد و در F به بیرون می‌کشد تا انتهای E با کوره در یک راستا باشند. اگر نیروی ۵۰-N در نقطه F در صفحه‌ای موازی با صفحه yz واقع باشد، و $\alpha = ۶۰^\circ$، (الف) سیستم مفروض را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ C جایگزین کنید، (ب) اگر از D به C نگاه کنیم مجرای CD گرایش دارد نسبت به زانویی C به شکل پاد ساعتگرد بچرخد یا ساعتگرد.

۱۲۱.۳ وقتی تیر محکم کننده BC برای آوردن یک دیوار به حالت عمودی استفاده می‌شود، سیستم کوپل-نیروی نشان داده شده بر دیوار وارد می‌شود. این سیستم کوپل-نیرو را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در A جایگزین کنید. می‌دانیم که $R = ۲۱/۲\ \mathrm{lb}$ و $M = ۱۳/۲۵\ \mathrm{lb \cdot ft}$.



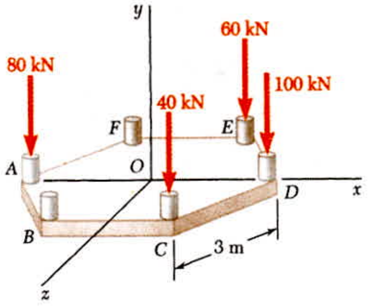
شکل م ۱۲۱.۳

۱۲۲.۳ برای بالا بردن و تعمیر یک سرپوش شکم داده از یک جک پیچی به‌منظور نگهداری قسمت جلوی سرپوش استفاده می‌کنیم. جک برای باز شدن از یک سیستم کوپل-نیروی با $R = ۶۰\ \text{lb}$ و $M = ۲۲٫۵\ \text{lb.ft}$ استفاده می‌کند. این سیستم را به یک سیستم کوپل-نیروی معادل وارد بر نقطهٔ C تبدیل کنید.



شکل م ۱۲۲.۳

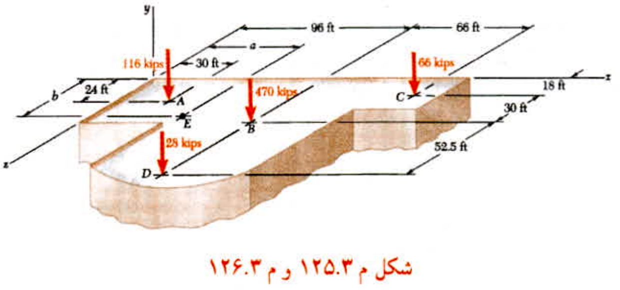
۱۲۳.۳ مطابق شکل پایه بتونی بالشتک یک شش‌ضلعی منتظم با اضلاع ۳ m چهار ستون بارها را نگهداری می‌کند. مطلوب است بزرگی و نقطه‌ای که برایند چهار بار بر آن وارد می‌شود.



شکل م ۱۲۳.۳ و م ۱۲۴.۳

۱۲۴.۳ مطابق شکل پایه معمولی بالشتک شش ضلعی منتظم، با اضلاع ۳ m چهار ستون بارها را نگهداری می‌کند. مطلوب است بزرگی بارهای اضافی که باید بر B و F وارد شود، اگر برایند هر شش بار از مرکز پایه عبور کند.

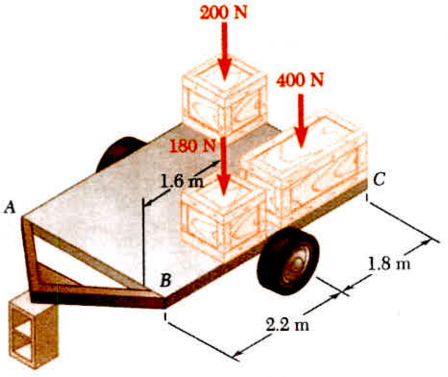
۱۲۵.۳ نیروهای نشان داده شده در شکل برایند بارهایی است که برف بر بخشی از سقف ساختمانی رو به پایین وارد کرده است. بزرگی و نقطه اثر برایند این چهار نیرو را به‌دست آورید.



شکل م ۱۲۵.۳ و م ۱۲۶.۳

۱۲۶.۳ نیروهای نشان داده شده در شکل برایند بارهایی است که برف بر بخشی از سقف ساختمانی رو به پایین وارد کرده است. اگر برف متناظر با نیروی ۱۱۶-kip پارو و به نقطهٔ E وارد شود، در صورتی که نقطه اثر برایند این چهار بار در نقطه B باشد، a و b را به‌دست آورید.

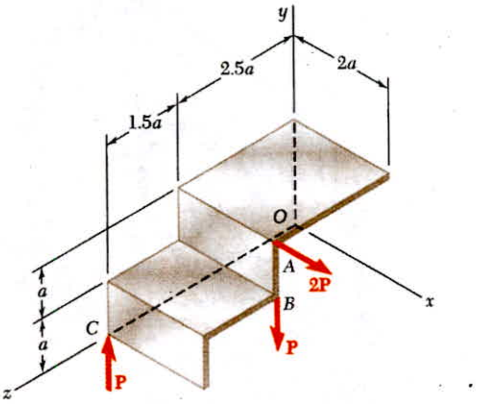
۱۲۷.۳* دو جعبه به ابعاد ۰٫۶ × ۰٫۶ × ۰٫۶ m و یک جعبه به ابعاد ۰٫۶ × ۰٫۶ × ۱٫۲ m مطابق شکل در کف یک تریلر به ابعاد ۲ × ۴ m قرار گرفته‌اند. جعبه‌ها طوری قرار گرفته‌اند که با لبه عقب و پهلویی در یک راستا هستند. مطلوب است کمترین باری که در جعبه دیگر به ابعاد ۰٫۶ × ۰٫۶ × ۱٫۲ m و جای آن روی کف به نحوی که جعبه در جای خود بماند و هیچ قسمتی از کف بیرون نماند. با این فرض که هر جعبه دارای بار یکنواخت باشد و خط اثر برایند چهار جعبه از محل تقاطع خطوط مرکزی کف و محور تریلر بگذرد (راهنمایی: جعبه را هم می‌توان روی سطوح جانبی و هم روی قاعده‌اش قرار داد.)



شکل م ۱۲۷.۳

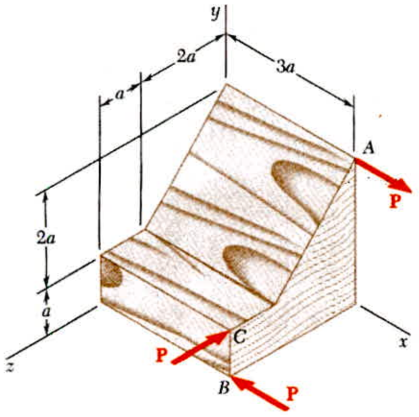
۱۲۸.۳* مسئلهٔ ۱۲۷.۳ را به نحوی حل کنید که بیشترین وزن مربوط به جعبه چهارم باشد و حداقل یک ضلع جعبه روی لبهٔ پهلویی کف تریلر قرار داشته باشد.

۱۲۹.۳* مطابق شکل بر یک قطعه چوبی سه نیرو با بزرگی یکسان و راستای مشخص وارد می‌شود. این نیروها را با یک رنچ معادل جایگزین می‌کنند. مطلوب است (الف) بزرگی راستای برایند $\mathbf{R}$، (ب) گام رنچ، (ج) نقطه‌ای که محور رنچ که صفحه yz را قطع می‌کند.



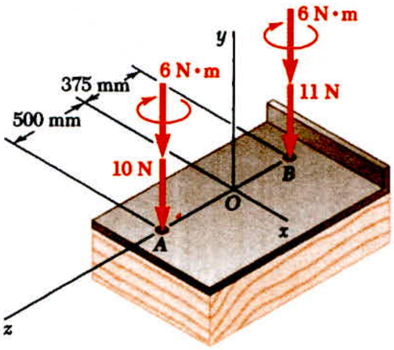
شکل م ۱۲۹.۳

۱۳۰.۳* بر قطعه‌چوبی سه نیرو به بزرگی P و راستای نشان داده شده، وارد می‌شود. سه نیرو را با یک رنچ معادل جایگزین کنید. مطلوب است (الف) بزرگی و راستای برایند $\mathbf{R}$، (ب) گام رنچ، (ج) نقطه‌ای که محور رنچ صفحه xy را قطع می‌کند.



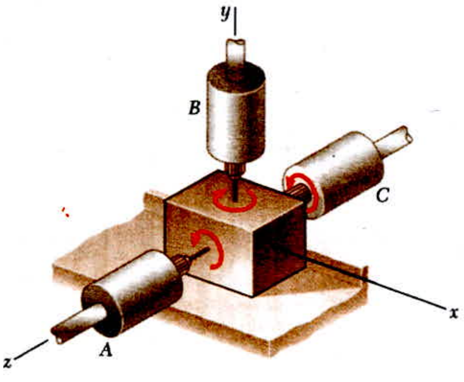
شکل م ۱۳۰.۳

۱۳۱.۳ نیروها و کوپلهای نشان داده شده بر دو پیچ وارد می‌شود تا قطعه ورق فلزی محکم به قطعه‌ای چوبی متصل کند. نیروها و کوپلها را به یک رنچ معادل تبدیل کنید. مطلوب است (الف) برایند نیروی **R**، (ب) گام رنچ، (ج) محل تقاطع محور رنچ و صفحه zx.



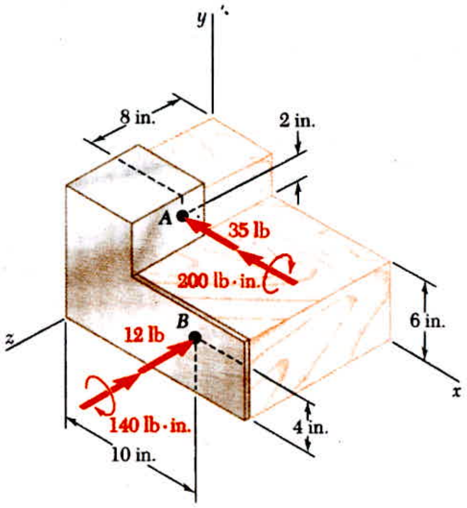
شکل م ۱۳۱.۳

۱۳۲.۳ در یک فرایند کارخانه اتومبیل‌سازی با مته، سه سوراخ همزمان در یک قطعه ...ینیمی نشان داده شده ایجاد می‌شود. مطابق شکل مته یک نیروی N- ۵۰ و یک ...ل N·m ۰٫۱۰۰ روی قطعه وارد می‌کند. می‌دانیم که مته A در جهت پادساعتگرد و مته‌های B و C در جهت ساعتگرد می‌چرخند (چنانکه از هر مته مشاهده می‌شود). نیروها ...وپلهای وارد شده به توسط مته، روی قطعه برای یک رنچ معادل تبدیل کنید. مطلوب است ...ف) برایند نیروی **R**، (ب) گام رنچ، (ج) نقطه‌ای که محور رنچ صفحه zx را قطع می‌کند.



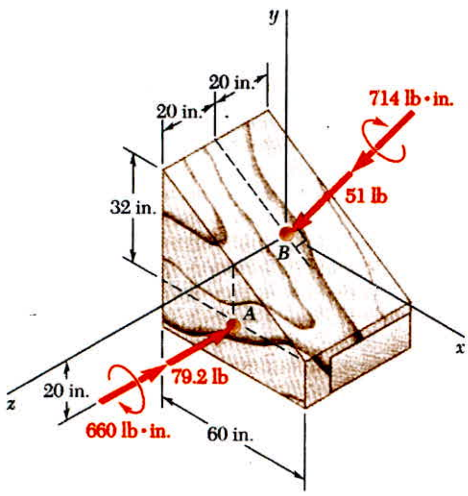
شکل م ۱۳۲.۳

۱۳۳.۳ دو پیچ A و B مطابق شکل نشان داده شده نیروها و کوپلها را محکم می‌کنند. دو ...ج را با یک تک رنچ معادل جایگزین کنید. مطلوب است (الف) برایند **R**، (ب) گام تک‌رنچ ...ادل، (ج) نقطه‌ای که محور رنچ صفحه yz را قطع می‌کند.



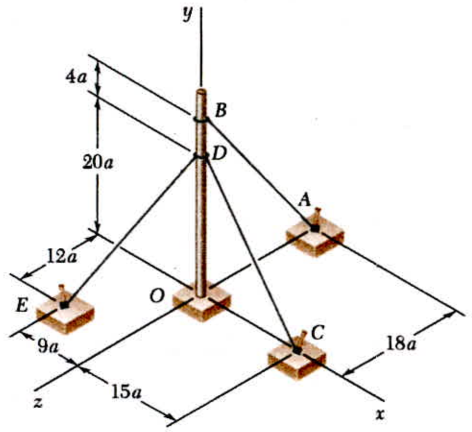
شکل م ۱۳۳.۳

۱۳۴.۳* دو پیچ A و B مطابق شکل نشان داده شده و کوپلها را محکم می‌کنند. دو رنچ را با یک تک‌رنچ معادل جایگزین کنید. مطلوب است (الف) برایند **R**، (ب) گام تک‌رنچ معادل، (ج) نقطه‌ای که محور رنچ صفحه xz را قطع می‌کند.



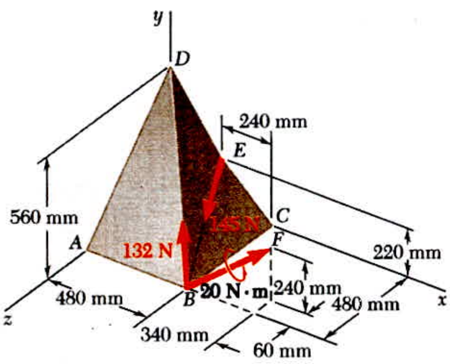
شکل م ۱۳۴.۳

۱۳۵.۳* تیر یک پرچم با سه کابل نگهداری می‌شود. اگر کشش در هر کابل دارای مقدار یکسان p باشد، نیروهای وارده بر تیر را با یک رنچ معادل جایگزین کنید. مطلوب است (الف) برایند نیروی **R**، (ب) گام رنچ، (ج) نقطه‌ای که محور رنچ صفحهٔ xz را قطع می‌کند.

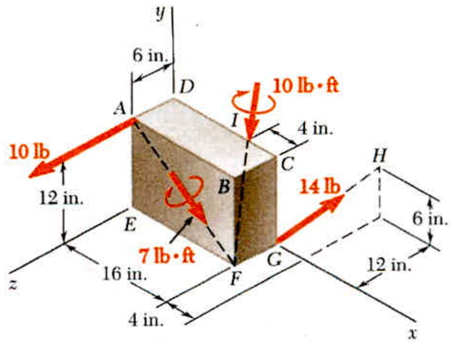


شکل م ۱۳۵.۳

۱۳۶.۳* و ۱۳۷.۳* معین کنید آیا سیستم کوپل-نیروی نشان داده شده را می‌توان به یک تک‌نیروی معادل، **R**، تبدیل کرد. اگر آری **R** و نقطه‌ای که خط اثر **R** صفحه yz را قطع می‌کند به‌دست آورید. اگر نه، سیستم مفروض را با یک رنچ معادل جایگزین کنید و برایند و گام آن و تقاطع محور آن با صفحه yz را به‌دست آورید.

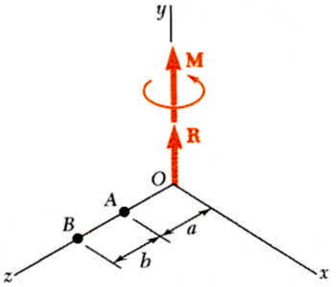


شکل م ۱۳۶.۳



شکل م ۱۳۷.۳

*۱۳۸.۳ رنچ نشان داده شده را با یک سیستم معادل شامل دو نیروی عمود بر محور z که به‌ترتیب بر نقاط A و B وارد می‌شود، جایگزین کنید.



شکل م ۱۳۸.۳

*۱۳۹.۳ نشان دهید که در حالت کلی یک رنچ را می‌توان با دو نیرو جایگزین کرد. در چنین انتخابی یکی از نیروها از نقطه‌ای مفروض عبور می‌کند و نیروی دیگر در صفحه معین قرار دارد.

*۱۴۰.۳ نشان دهید که یک رنچ را می‌توان با دو نیروی عمود که یکی از آنها در صفحه‌ای معین قرار دارد جایگزین کرد.

*۱۴۱.۳ نشان دهید که آیا یک رنچ را می‌توان با دو نیرو که یکی از آنها دارای خط اثر مشخص باشد، جایگزین کرد.

دوره و خلاصه فصل ۳

در این فصل اثر نیروهای وارد بر جسم صلب را مطالعه کردیم. ابتدا یاد گرفتیم که بین نیروهای داخلی و خارجی فرق بگذاریم [بخش ۲.۳] و دیدیم که، طبق اصل قابلیت انتقال، اگر یک نیروی خارجی را ــ که به یک جسم صلب وارد می‌شود ــ در امتداد خط اثرش حرکت بدهیم تغییری در تأثیر آن پدید نمی‌آید [بخش ۳.۳]. به‌عبارت دیگر، اگر دو نیروی $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F'}$ که به یک جسم صلب وارد می‌شوند، بزرگی، راستا و خط اثر یکسان داشته باشند بر روی جسم در دو نقطهٔ مختلف یک اثر دارند (شکل ۴۸.۳). چنین دو نیرویی را معادل می‌گویند.

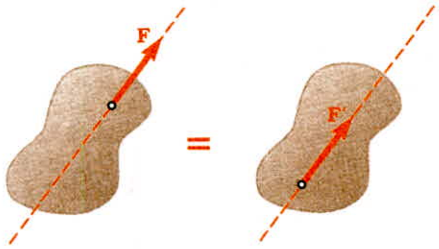
قبل از پرداختن به موضوع سیستم نیروهای معادل، مفهوم ضرب برداری دو بردار را معرفی کردیم، [بخش ۴.۳]. ضرب برداری

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

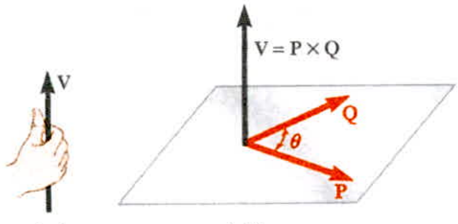
بردارهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را برداری تعریف کردیم که عمود بر صفحهٔ شامل $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ است (شکل ۴۹.۳)، و بزرگیش از رابطهٔ

$$V = PQ\sin\theta \qquad (۱.۳)$$

به‌دست می‌آید، و راستای آن طوری است که ناظر واقع بر روی نوک $\mathbf{V}$، چرخش آن را به‌اندازهٔ θ برای منطبق‌کردن $\mathbf{P}$ بر روی $\mathbf{Q}$ پادساعتگرد می‌بیند. اصطلاحاً می‌گویند



شکل ۴۸.۳



شکل ۴۹.۳

که سه بردار $\mathbf{P}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{V}$ که به این ترتیب اختیار شده باشند یک سه‌تایی راستگرد تشکیل می‌دهند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که ضربهای برداری $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ و $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ با بردارهای برابر و مخالف نشان داده می‌شوند. داریم

$$\mathbf{Q}\times\mathbf{P} = -(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) \qquad (۴.۳)$$

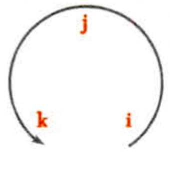
همچنین از تعریف ضرب برداری دو بردار نتیجه می‌شود که ضربهای برداری بردارهای یکه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ عبارت‌اند از

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

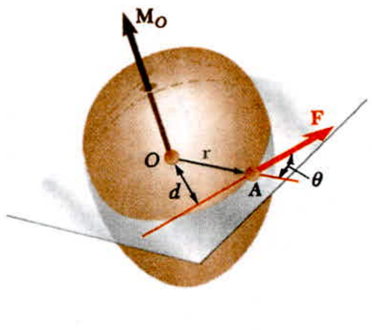
و به همین ترتیب. راه تعیین علامت حاصلضرب برداری دو بردار یکه این است که حرفهای نمایندهٔ آنها را روی یک دایره، و در جهت پادساعتگرد بچینیم (شکل ۵۰.۳). اگر ترتیب بردارها در جهت پادساعتگرد باشد حاصلضرب برداری آنها مثبت و در غیر این صورت منفی خواهد بود.

مؤلفه‌های قائم ضرب برداری $\mathbf{V}$ دو بردار $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را به این صورت بیان کردیم [بخش ۵.۳]

$$\begin{aligned} V_x &= P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y &= P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z &= P_xQ_y - P_yQ_x \end{aligned} \qquad (۹.۳)$$



شکل ۵۰.۳



شکل ۵۱.۳

همچنین بااستفاده از دترمینان آن را به‌صورت زیر نوشتیم

$$\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix} \qquad (۱۰.۳)$$

گشتاور یک نیروی **F** حول نقطهٔ O، را در بخش ۶.۳ تعریف کردیم و گفتیم که
ـارت است از ضرب برداری

$$\mathbf{M}_O=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۱۱.۳)$$

ـه در آن **r** بردار مکان است که از O به نقطهٔ اثر Aی نیروی **F** رسم می‌شود (شکل ۵۱.۳). زاویهٔ میان خط اثرهای **r** و **F** را با θ نشان دادیم و دیدیم که بزرگی گشتاور حول O را می‌شود چنین بیان کرد

$$M_O=rF\sin\theta=Fd \qquad (۱۲.۳)$$

در آن d نمایندهٔ فاصله عمودی O تا خط اثر **F** است.
مؤلفه‌های قائم گشتاور $\mathbf{M}_O$ ناشی از یک نیروی **F** را چنین بیان کردیم [بخش ۸.ـ]

$$\begin{aligned}M_x&=yF_z-zF_y\\ M_y&=zF_x-xF_z\\ M_z&=xF_y-yF_x\end{aligned} \qquad (۱۸.۳)$$

ـه در آن x، y، و z مؤلفه‌های بردار مکان **r**اند (شکل ۵۲.۳). $\mathbf{M}_O$ را بااستفاده از ـرمینان به این صورت نوشتیم

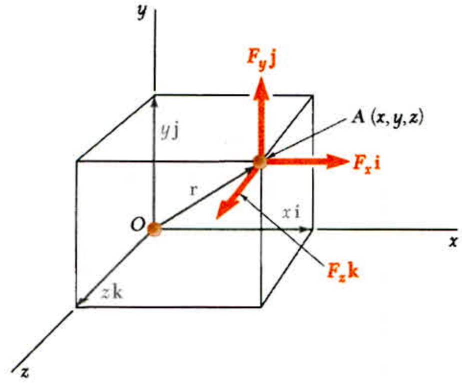
$$\mathbf{M}_O=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \qquad (۱۹.۳)$$

ـ مورد کلی‌تر گشتاور یک نیروی **F** وارد بر نقطهٔ A حول یک نقطهٔ دلبخواه B، ـاشتیم

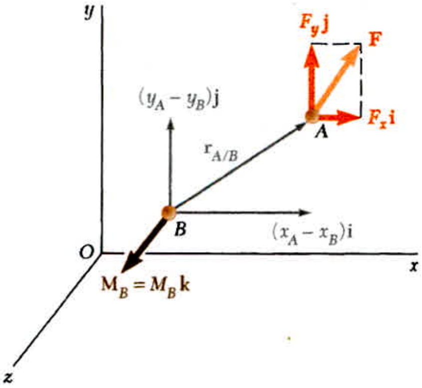
$$\mathbf{M}_B=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \qquad (۲۱.۳)$$

ـ در آن $x_{A/B}$، $y_{A/B}$، و $z_{A/B}$ نمایندهٔ مؤلفه‌های بردار $\mathbf{r}_{A/B}$اند.

$$x_{A/B}=x_A-x_B \qquad y_{A/B}=y_A-y_B \qquad z_{A/B}=z_A-z_B$$



شکل ۵۲.۳



شکل ۵۳.۳

در مورد مسئله‌هایی که فقط دو بعد را شامل می‌شوند، نیروی **F** را می‌شود واقع در صفحهٔ xy فرض کرد. گشتاور $\mathbf{M}_B$ی این نیرو و حول نقطهٔ B واقع در همان صفحه عمود بر آن صفحه است (شکل ۵۳.۳) و به‌طورکامل با اسکالر زیر مشخص می‌شود

$$M_B=(x_A-x_B)F_y-(y_A-y_B)F_x \qquad (۲۳.۳)$$

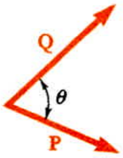
روشهای مختلف محاسبهٔ گشتاور یک نیرو حول یک نقطه را در مسئله‌های نمونه ۱.۳ تا ۴.۳ نشان دادیم.

ضرب اسکالر دو بردار **P** و **Q** [بخش ۹.۳] را با **P.Q** نشان دادیم و آن را به‌صورت کمیت اسکالر

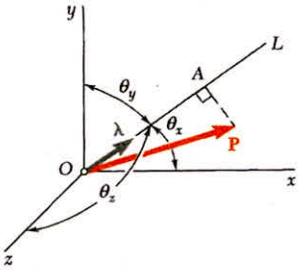
$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=PQ\cos\theta \qquad (۲۴.۳)$$

تعریف کردیم، که θ زاویهٔ میان **P** و **Q** است (شکل ۵۴.۳). با بیان ضرب اسکالر **P** و **Q** برحسب مؤلفه‌های قائم این دو بردار، دیدیم که

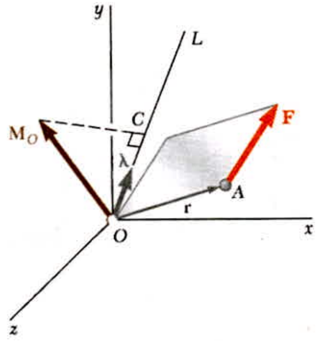
$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z \qquad (۳۰.۳)$$



شکل ۵۴.۳



شکل ۵۵.۳



شکل ۵۶.۳

تصویر یک بردار **P** روی یک محور OL (شکل ۵۵.۳) را می‌شود با تشکیل ضرب اسکالر **P** و بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ در امتداد OL به‌دست آورد. یعنی

$$P_{OL} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda} \qquad (۳۶.۳)$$

یا، با استفاده از مؤلفه‌های قائم

$$P_{OL} = P_x\cos\theta_x + P_y\cos\theta_y + P_z\cos\theta_z \qquad (۳۷.۳)$$

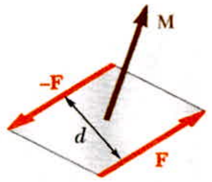
که θ_x، θ_y، و θ_z نمایندهٔ زوایایی هستند که محور OL با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد.

ضرب سه‌گانهٔ مختلط سه بردار **S**، **P**، و **Q** را با عبارت اسکالر

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) \qquad (۳۸.۳)$$

تعریف کردیم که از ضرب اسکالر **S** در ضرب برداری **P** و **Q** [بخش ۱۰.۳] به‌دست می‌آید. نشان دادیم که

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (۴۱.۳)$$



شکل ۵۷.۳

که در آن اجزای دترمینان مؤلفه‌های قائم سه بردارند.

گشتاور یک نیروی **F** حول یک محور OL [بخش ۱۱.۳] بنا به تعریف عبار است از تصویر گشتاور $\mathbf{M}_O$ی نیروی **F** روی OL که برابر با OC است [شکل ۶.۳ یعنی، عبارت است از ضرب سه‌گانهٔ مختلط بردار یکهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ و بردار مکان **r** و نیروی **F**

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) \qquad (۴۲.۳)$$

با استفاده از دترمینان برای ضرب سه‌گانه، داریم

$$\mathbf{M}_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۴۳.۳)$$

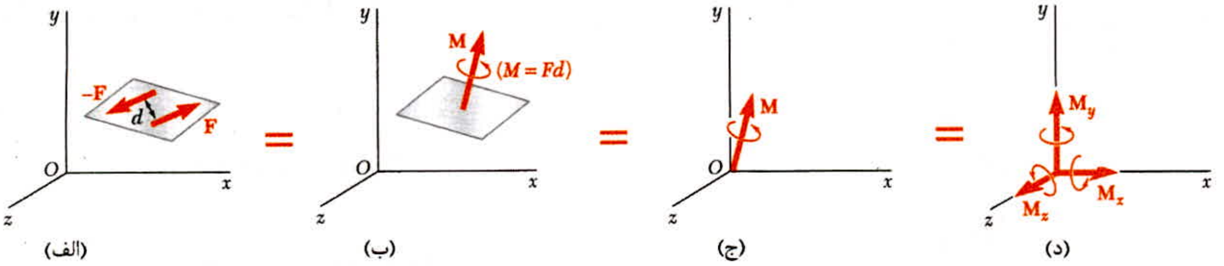
که در آن $\boldsymbol{\lambda}_x$، $\boldsymbol{\lambda}_y$، و $\boldsymbol{\lambda}_z$ برابر کسینوسهای هادی محور OL؛ x، y، و z برابر مؤلفه‌ها‌ی بردار **r**؛ و F_x، F_y، و F_z برابر مؤلفه‌های بردار **F**اند.

به عنوان مثال تعیین گشتاور نیرویی حول محور داده شده در مسئله ۵.۳.

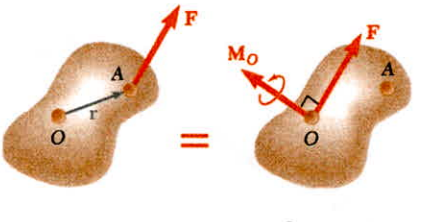
دو نیروی **F** و **F**– که بزرگیهای برابر، خط اثرهای موازی، و جهتهای خلاف داشته باشند تشکیل یک کوپل می‌دهند [بخش ۱۲.۳]. نشان دادیم که گشتاور کو از نقطه‌ای که حول آن محاسبه می‌شود مستقل است و برداری است مانند **M** ع بر صفحهٔ کوپل و از نظر بزرگی برابر با حاصلضرب بزرگی مشترک دو بردار یعنی فاصله عمودی d میان خط اثرهای آنهاست (شکل ۵۷.۳).

دو کوپل که گشتاورهای یکسان (**M**) داشته باشند معادل‌اند، یعنی تأثیر یکسا بر روی یک جسم صلب می‌گذارند [بخش ۱۳.۳]. مجموع دو کوپل خود یک کوپ است [بخش ۱۴.۳] و گشتاور **M** کوپل برایند را می‌شود از جمع برداری گشتاورهای $\mathbf{M}_۱$ و $\mathbf{M}_۲$ کوپلهای اولیه به‌دست آورد [مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۳]. نتیجه می‌گیریم که کوپ را می‌شود با یک بردار نشان داد، که آن را بردار کوپل می‌گویند و از نظر بزرگی راستا برابر با گشتاور **M** کوپل است [بخش ۱۵.۳]. بردار کوپل یک بردار آزاد اس که آن را در صورت لزوم می‌شود به مبدأ O وصل و به مؤلفه‌هایش تجزیه ک (شکل ۵۸.۳).

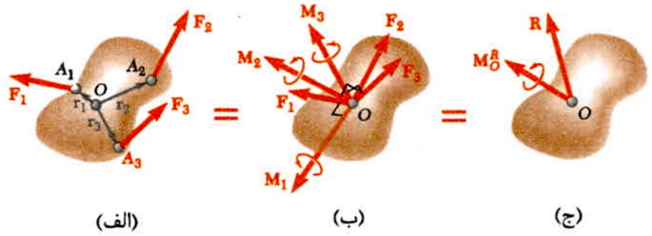
هر نیروی **F** را که به نقطهٔ A از یک جسم صلب اثر می‌کند می‌توان به یک سیست کوپل-نیرو در یک نقطهٔ دلبخواه **O** تبدیل کرد، که شامل نیروی **F** وارد بر O و یک



شکل ۵۸.۳



شکل ۵۹.۳



شکل ۶۰.۳

ل به گشتاور $\mathbf{M}_O$ برابر با گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ در مکان اولیه آن حول نقطه O است [بخش ۱۶.۳]. باید توجه داشته باشید که نیروی $\mathbf{F}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_O$ همیشه برهم عمودند (شکل ۵۹.۳).

نتیجه می‌گیریم [بخش ۱۷.۳] که هر سیستم از نیروها را می‌شود تبدیل به یک سیستم کوپل-نیرو در یک نقطهٔ معین O کرد؛ برای این کار ابتدا هریک از نیروهای سیستم را به یک سیستم کوپل-نیروی معادل در نقطهٔ O (شکل ۶۰.۳) تبدیل می‌کنیم د کلیه نیروها و تمام کوپلهای حاصل را با هم جمع می‌بندیم تا یک نیروی برایند و یک بردار کوپل برایند $\mathbf{M}^{OR}$ به‌دست آید [مسئله‌های نمونهٔ ۸.۳ تا ۱۱.۳]. به داشته باشید که به‌طور کلی برایند $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}^{OR}$ عمود بر یکدیگر خواهند بود.

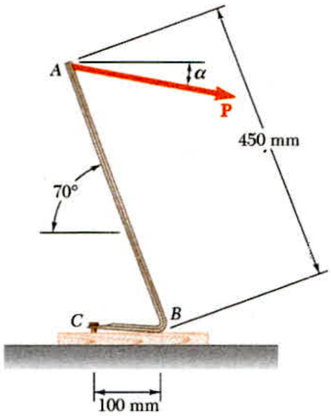
از بحث بالا نتیجه گرفتیم [بخش ۱۸.۳] که در مورد اجسام صلب، دو سیستم از نیروهای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$، ... و $\mathbf{F}'_1$، $\mathbf{F}'_2$، و $\mathbf{F}'_3$، ...، معادل‌اند اگر، و تنها اگر داشته باشیم

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{و} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \qquad (۵۷.۳)$$

اگر نیروی برایند $\mathbf{R}$ و بردارکوپل برایند $\mathbf{M}^{OR}$ بر هم عمود باشند، سیستم کوپل-نیرو نقطهٔ O را می‌شود ساده‌ترکرد و به یک تک‌نیروی برایند خلاصه کرد [بخش ۲۰.۳]. موضوع برای هر یک از سیستمهای زیر مصداق دارد، (الف) نیروهای همرس ک. به فصل ۲)، (ب) نیروهای هم‌صفحه [مسئله‌های نمونه ۸.۳ و ۹.۳] یا (ج) های موازی [مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱.۳]. اگر برایند $\mathbf{R}$ و بردارکوپل $\mathbf{M}^{OR}$ برهم عمود اشند، سیستم را نمی‌شود به یک تک‌نیرو ساده کرد. با این‌همه می‌شود آن را به نوع خاصی سیستم کوپل-نیرو تبدیل کرد که آن را رنچ می‌گویند. رنچ متشکل از برایند $\mathbf{R}$ و بردار کوپل $\mathbf{M}_1$ در راستای $\mathbf{R}$ است [بخش ۲۱.۳ و مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲.۳].

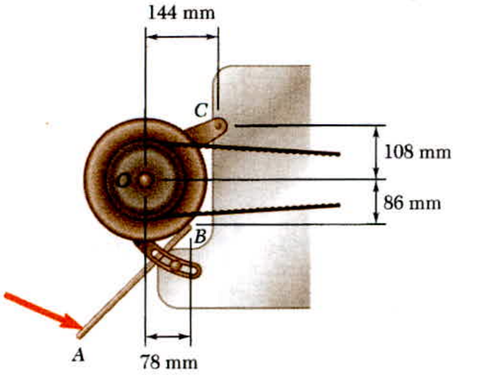
مسئله‌های دوره‌ای

۱۴۲.۳ برای بیرون کشیدن میخ از نقطه C تخته نیروی ۸۰۰ N لازم است. در هنگام اولین ...ت میخ، مطلوب است (الف) گشتاور حول B نیروی وارد بر میخ، (ب) اگر $\alpha = 10°$ ...، بزرگی نیروی $\mathbf{P}$ که همان گشتاور حول B را ایجاد می‌کند، (ج) کمترین نیروی $\mathbf{P}$ که ...ان گشتاور حول B را ایجاد می‌کند.



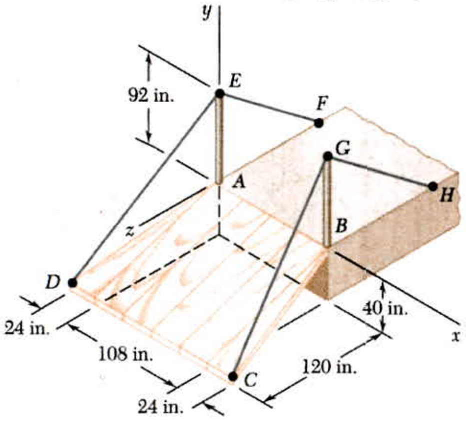
شکل م ۱۴۲.۳

۱۴۳.۳ مکانیکی برای سخت کردن تسمه دینام از لوله AB به‌عنوان اهرم استفاده می‌کند. با وارد کردن نیرو بر نقطه A به سمت پایین، نیروی ۵۸۰ N به نقطه B وارد می‌شود. گشتاور این نیرو حول پیچ واقع در C را تعیین کنید، اگر خط اثر آن از نقطهٔ O بگذرد.



شکل م ۱۴۳.۳

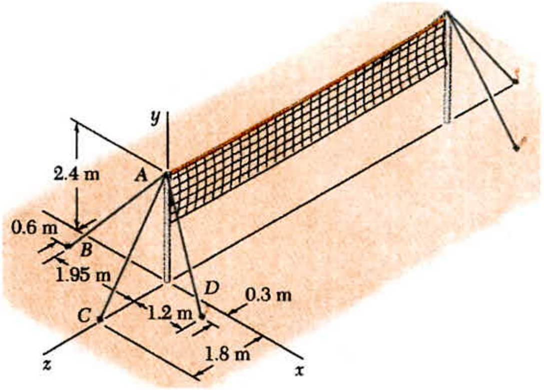
۱۴۴.۳ سکوی $ABCD$ توسط کابلهایی متصل به گوشه‌های C و D نگهداری می‌شود. کشش در هر یک از کابلها ۳۶۰ lb است. گشتاور نیروی وارد حول A را تعیین کنید. (الف) نیروی کابل در B، (ب) نیروی کابل در C.



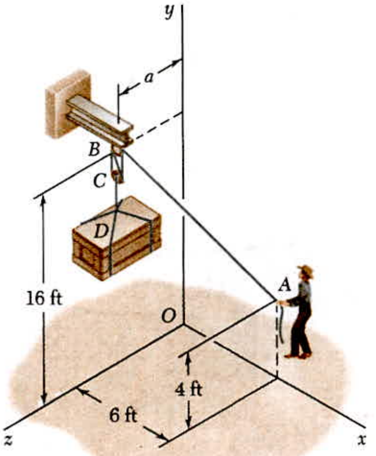
شکل م ۱۴۴.۳

۱۴۵.۳ تور والیبال نشان داده شده را در نظر بگیرید. مطلوب است زاویه تشکیل شده توسط سیم AC و AD.

۱۴۶.۳ برای بالا بردن یک صندوق سنگین، مردی با استفاده از طناب حلقه و تیر B این کار را انجام می‌دهد. می‌دانیم که گشتاورهای حول محورهای y و z توسط نیروی وارد شده در B توسط قسمت طناب AB به‌ترتیب برابر ۱۰۰ lb · ft و ۴۰۰ lb · ft است. مطلوب است فاصله a.

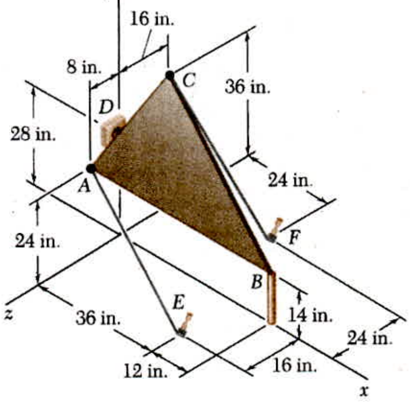


شکل م ۳.۱۴۵



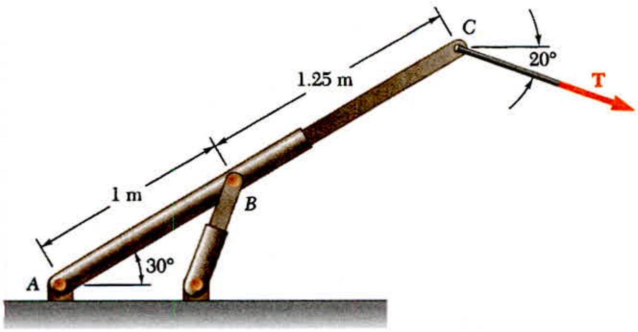
شکل م ۳.۱۴۶

۳.۱۴۷ صفحه مثلثی ABC توسط مفصل کاسه-ساچمه‌ای به نقاط B و D متصل شده است و مطابق شکل توسط کابلهای AE و CF نگهداری می‌شود. اگر نیروی وارد شده بر کابل CF در نقطه C برابر $132\ \text{lb}$ باشد، مطلوب است گشتاور آن نیرو را حول اتصال نقاط D و B.



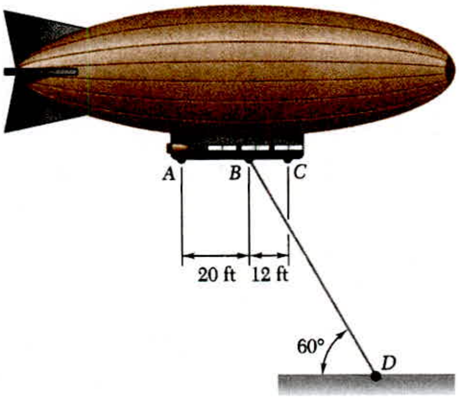
شکل م ۳.۱۴۷

۳.۱۴۸ کشش در کابل متصل به انتهای C از یک بازوی قابل تنظیم ABC برابر $1000\ \text{N}$ است. مطلوب است سیستم جایگزین شده نیرو-کوپل معادل با نیروی وارد شده در C در حالتهای: (الف) در A، (ب) در B.



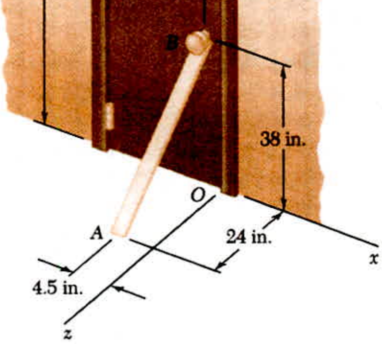
شکل م ۳.۱۴۸

۳.۱۴۹ کشتی هوایی، کابلی که در نقطه B به کابین آن متصل است مهار می‌شود. اگر کش در کابل $250\ \text{lb}$ باشد، نیروی وارد شده توسط کابل در نقطه B را با سیستم معادل تشک شده توسط دو نیروی موازی وارد بر A و C جایگزین کنید.



شکل م ۳.۱۴۹

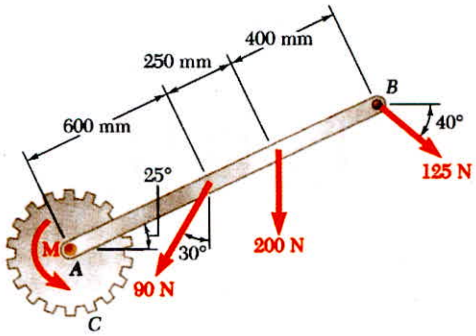
۳.۱۵۰ برای باز شدن یک در بین دستگیره آن و کف زمین یک قطعه چوب گذاشته‌اند. ا قطعه چوب نیرویی برابر $45\ \text{lb}$ وارد می‌کند. این نیرو را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در C جایگزین کنید.



شکل م ۳.۱۵۰

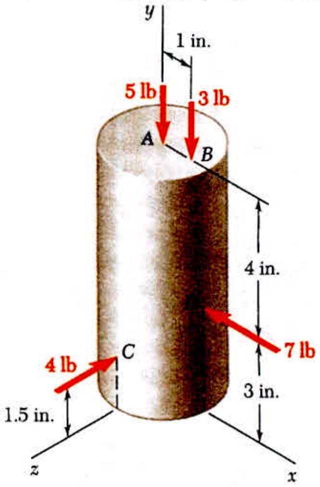
۳.۱۵۱ چرخدنده C به‌طور صلب به بازوی AB متصل است. اگر نیروها و کوپل نشان داده

۰ را بتوان به یک تک‌نیروی معادل در A تبدیل کرد، مطلوب است نیروی معادل و بزرگی
که با $\mathbf{M}$.



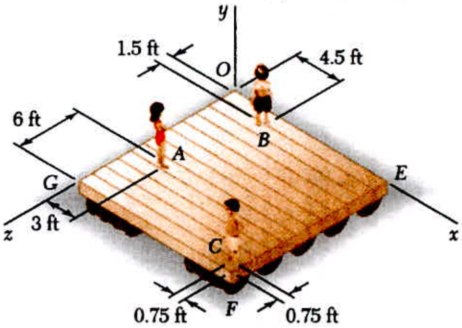
شکل م ۱۵۱.۳

۱۵۲.۳ وقتی بوش پلاستیکی داخل استوانه‌ای به قطر ۳ in می‌شود، ابزار داخل شده نیروهایی
مـبق شکل بر محیط محصور وارد می‌کنند. هر یک از نیروها با یکی از محورهای مختصات
ن است. این نیروها را با یک سیستم کوپل-نیروی معادل در C جایگزین کنید.



شکل م ۱۵۲.۳

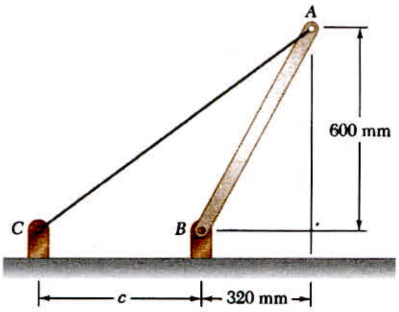
۱۵ سه بچه بر روی تخته‌ای به ابعاد 15×15 ft، ایستاده‌اند. وزن آنها در نقاط A، B،
به‌ترتیب برابر ۸۰ lb، ۶۰ lb، و ۹۰ lb است. اگر بچهٔ چهارم به وزن ۹۰ lb روی تخته
قرار گیرد مطلوب است جایی که او می‌تواند بایستد تا اینکه بچه‌های دیگر در وضعیت نشان
داده شده باقی بمانند و خط اثر برایند چهار وزن از مرکز تخته عبور کند.



شکل م ۱۵۳.۳

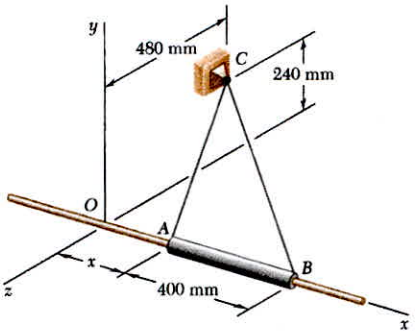
مسئله‌های کامپیوتری

ک.۱ میله AB توسط طناب AC، با کشش T، در جای خود نگهداری می‌شود. با استفاده
از نرم‌افزار محاسباتی گشتاور حول B نیروی وارد توسط طناب در نقطه A را برحسب کشش
T و فاصله C به‌دست آورید. گشتاور حول B را بازای $320 \text{ mm} \le c \le 960 \text{ mm}$،
وقتی (الف) $T = 50$ N، (ب) $T = 75$ N، (ج) $T = 100$ N باشد، رسم کنید.



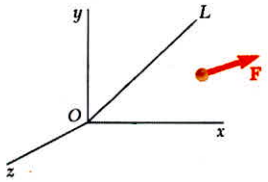
شکل م ۳.ک۱

۳.ک ۲ لوله AB به طول ۴۰۰ mm می‌تواند آزادانه در امتداد میله افقی بلغزد. دو انتهای A و B لوله به طنابهای کشسان متصل شده‌اند و انتهای آنها به نقطه C وصل شده است. (الف) زاویه θ بین طنابهای AC و BC به‌صورت تابعی از x را به‌دست آورید. (ب) زاویه θ بین طنابهای AC و BC را به‌صورت تابعی از x، به‌ازای $-400 \text{ mm} \le x \le 40 \text{ mm}$ رسم کنید.



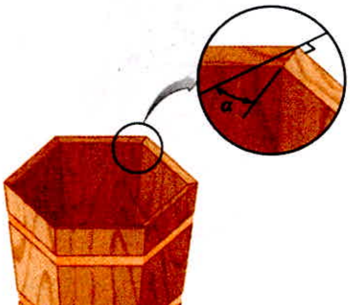
شکل م ۳.ک۲

۳.ک ۳ با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی فاصله عمودی بین خط اثر یک نیروی $\mathbf{F}$ و خط OL را به‌دست آورید. از این نرم‌افزار برای حل (الف) مسئله ۶۲.۳، (ب) مسئله ۶۳.۳ استفاده کنید.



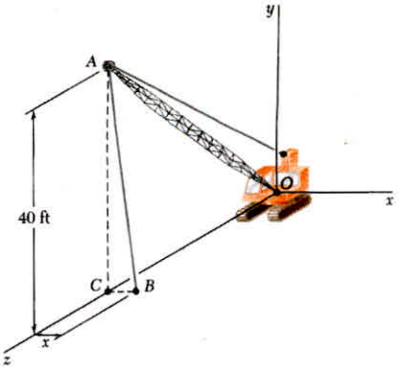
شکل م ۳.ک۳

۳.ک ۴ دوستی برای طراحی جعبه‌های کاشتن گل از شما کمک می‌گیرد. ابعاد جعبه‌ها ۴، ۵، ۶ یا ۸ و زاویه‌های تمایل به بیرون ۱۰°، ۲۰°، یا ۳۰° هستند. با استفاده از برنامه نرم‌افزار محاسباتی زاویه پخ α برای هر ۱۲ طرح گلدان را به‌دست آورید (راهنمایی: زاویه پخ α برابر با نصف زاویه‌ای است که عمودهای داخلی دو ضلع مجاور تشکیل می‌دهند.



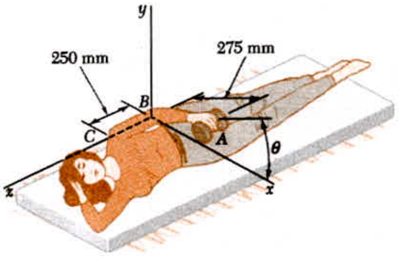
شکل م ۳.ک۴

۳.ک ۵ جراثقال در جهتی است که انتهای 50-ft تیر OA در صفحه yz مطابق شکل قرار دارد. کشش در کابل AB برابر $875\,\text{lb}$ است. معین کنید گشتاور حول هر محور مختصات نیروی وارد بر A توسط کابل AB، طوری که تابع x باشند. هر گشتاور را برحسب x به‌ازای $-15\,\text{ft} \leq x \leq 15\,\text{ft}$ رسم کنید.



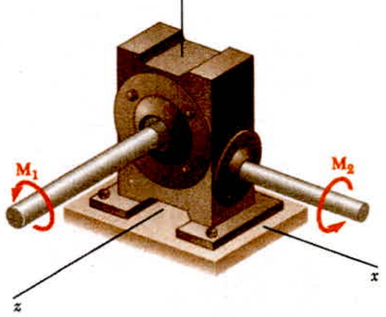
شکل م ۳.ک۵

۳.ک ۶ بیمار فیزیوتراپی روی سمت راست بدن دراز کشیده است. با نگهداری دمبل A برابر $1/5\,\text{kg}$ از دست چپ و به آهستگی آن را در مسیر دایره‌ای بلند می‌کند. می‌دانیم که مرکز مسیر در نقطه B و مسیر قرارگرفتن در صفحه xy است. مؤلفه‌های اسکالر گشتاور حول C مربوط به وزن دمبل را برحسب تابعی از θ به‌ازای $-70° \leq \theta \leq 40°$ رسم کنید.



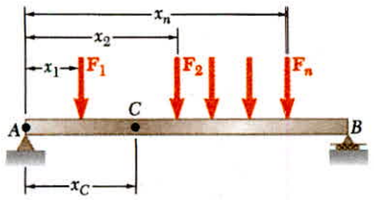
شکل م ۳.ک۶

۳.ک ۷ سرعت کاهش داده شده زاویهٔ قائم در حالت افقی مطابق شکل وزنهای $40\,\text{lb}$ و مرکز گرانی آن روی محور y است. اگر $M_1 = An^2$ و $M_2 = An^3$ باشد، معین کنید تک‌نیرویی که معادل با وزن این وسیله و دو کوپلی که بر آن وارد می‌شود، باشد. همچنین مختصات $(x, 0, z)$ که محل تلاقی خط اثر تک‌نیرو با زمین است را به‌دست آورید. x و z را به‌صورت تابعی از n به‌ازای $2 \leq n \leq 6$ برای موارد زیر رسم کنید: (الف) $A = 0/75\,\text{lb}\cdot\text{ft}$، (ب) $A = 1/5\,\text{lb}\cdot\text{ft}$، (ج) $A = 2\,\text{lb}\cdot\text{ft}$.



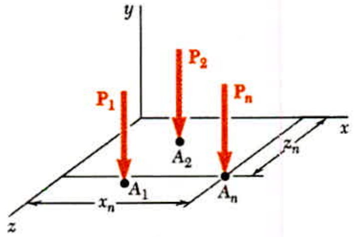
شکل م ۳.ک۷

۳.ک ۸ تیر AB تحت تأثیر چند نیروی عمودی، مطابق شکل، قرار گرفته است. با استفا... نرم‌افزار محاسباتی، مقدار برایند این نیروها و فاصله x_C تا نقطه C و نقطه تلاقی خط اثر برایند با محور AB را به‌دست آورید. از این نرم‌افزار برای حل مسئله ۳.۱۰ (الف) استفاده کنید.



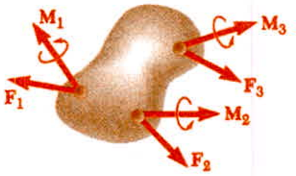
شکل م ۳.ک۸

۳.ک ۹ با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی بزرگی و نقطهٔ اثر برایند نیروهای عمودی $\mathbf{P}_1$، ...، $\mathbf{P}_n$ را که به نقاط $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{A}_2$، ...، $\mathbf{A}_n$ که در صفحه xy قرار دارد، تعیین کنید. با است... از این برنامه محاسباتی (الف) مسئله ۳.۱۲۳، (ب) مسئله ۳.۱۲۵ را حل کنید.



شکل م ۳.ک۹

۳.ک ۱۰ با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی، معین کنید آیا سیستم نیروها و کوپلها را می‌توا تک‌نیروی معادل تبدیل کرد یا نه. اگر می‌توان، معین کنید R و نقطه‌ای که خط اثر R صفحه yz را قطع می‌کند. با استفاده از این نرم‌افزار محاسباتی (الف) مسئله ۳.۱۳۶، (ب) مسئله ۳.۱۳۷ را حل کنید.



شکل م ۳.ک۱۰

فصل ۴

تعادل اجسام صلب

برای هر یک از توربینهای بادی نشان داده شده، مجموع گشتاورهای استاتیکی و دینامیکی بارگذاری‌های حول پایه تیرها (برجها باید برای کسب اطمینان از کوپل عکس‌العمل در پایه محاسبه شود تا باعث شکست و ناتوانی برج نشود.

تعادل اجسام صلب

۱.۴ مقدمه
۲.۴ نمودار جسم آزاد
تعادل در دوبعد
۳.۴ عکس‌العملها در تکیه‌گاهها و اتصالهای سازه‌های دوبعدی
۴.۴ تعادل یک جسم صلب در دوبعد
۵.۴ عکس‌العملهای از لحاظ استاتیکی نامعین. قیدهای ناقص
۶.۴ تعادل جسم دونیرویی
۷.۴ تعادل جسم سه‌نیرویی
تعادل در سه‌بعد
۸.۴ تعادل جسم صلب در سه‌بعد
۹.۴ عکس‌العملها در تکیه‌گاهها و اتصالهای سازه‌های سه‌بعدی

۱.۴ مقدمه

در فصل گذشته دیدیم که نیروهای خارجی وارد بر یک جسم صلب را می‌توانیم به یک سیستم کوپل ـ نیرو در نقطهٔ دلبخواه O تبدیل کنیم. وقتی این کوپل و نیرو هر دو برابر با صفر باشند، نیروهای خارجی یک سیستم معادل با صفر تشکیل می‌دهند و می‌گویند که جسم صلب در حال تعادل است.

بنابراین شرطهای لازم و کافی برای تعادل یک جسم صلب را می‌شود با مساوی صفر قرار دادن $\mathbf{R}$ و $\mathbf{M}_O^R$ در رابطه‌های (۵۲.۳) از بخش ۱۷.۳ به‌دست آورد:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = 0 \tag{۱.۴}$$

با تجزیهٔ تک‌تک نیروها و گشتاورها به مؤلفه‌های قائم می‌توانیم شرطهای لازم و کافی برای حالت تعادل جسم صلب را با شش معادلهٔ اسکالر زیر بیان کنیم:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{۲.۴}$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{۳.۴}$$

این معادله‌ها را می‌توانیم برای تعیین نیروهای مجهول وارد بر جسم صلب، یا عکس‌العملهایی که تکیه‌گاهها به آن اعمال می‌کنند به کار ببریم. می‌بینیم که معادله‌های (۲.۴) می‌گویند که مؤلفه‌های نیروهای خارجی در راستاهای x، y، و z همدیگر را خنثی می‌کنند؛ معادله‌های (۳.۴) هم می‌گویند که گشتاورهای نیروهای خارجی حول محورهای x، y، و z متوازن‌اند. بنابراین، در حالت تعادل سیستم نیروهای خارجی، به جسم صلب موردنظر نه حرکت انتقالی می‌دهد و نه حرکت دورانی.

برای نوشتن معادله‌های تعادل در مورد یک جسم صلب، اول باید همهٔ نیروهای وارد بر جسم را مشخص کنیم و بعد نمودار جسم آزاد را رسم کنیم. در این فصل ابتدا تعادل سازه‌های دوبعدی‌ای را بررسی می‌کنیم که تحت تأثیر نیروهای واقع در صفحهٔ خودشان قرار دارند و در ضمن رسم نمودار جسم آزاد آنها را هم یاد می‌گیریم. علاوه بر نیروهای وارد بر سازه، عکس‌العملهایی را هم که تکیه‌گاههای سازه به آن وارد می‌کنند در نظر می‌گیریم. خواهیم دید که به هر نوع تکیه‌گاه عکس‌العمل خاصی مربوط می‌ش[ود] و تعیین می‌کنیم که آیا سازه به‌طور مناسب نگهداری شده است یا نه، تا بتوانیم پیش از نوشتن معادله‌های تعادل ببینیم که آیا آنها به درد تعیین نیروها و عکس‌العملهای مجهول می‌خورند یا نه.

بعداً در ادامهٔ همین فصل به تعادل سازه‌های سه‌بعدی می‌پردازیم و برای آنها و تکیه‌گاههای آنها هم عیناً همین تحلیل را به کار می‌بریم.

۲.۴ نمودار جسم آزاد

در حل مسائل مربوط به تعادل جسم صلب، باید تمام نیروهایی را که به جسم وا[رد] می‌شوند در نظر بگیریم و نیروهایی را که مستقیماً بر جسم اثر نمی‌کنند کنار بگذار[یم]. حذف یک نیرو یا افزودن یک نیروی نامربوط تعادل را از بین می‌برد. بنابراین برای حل مسئله اول از همه باید ــ برای جسم مورد نظرمان ــ یک نمودار جسم آزاد بکشیم. نمودارهای جسم آزاد را قبلاً در فصل ۲ در موارد بسیاری به کار برده‌ایم. با این‌همه به خاطر اهمیتی که این نمودارها برای حل مسئله‌های تعادل دارند، در اینجا مراحل مختلف رسم نمودار جسم آزاد را به اختصار شرح می‌دهیم.

۱. اول جسم آزاد منتخب را به‌طور مشخص تعیین می‌کنیم. سپس این جسم از زمین، و از تمام اجسام دیگر جدا می‌کنیم و بعد طرح کلی این جسم منزوی شده رسم می‌کنیم.

۲. همهٔ نیروهای خارجی را روی نمودار جسم آزاد نشان می‌دهیم. این نیروها نمایندهٔ کنشهای ناشی از زمین و ناشی از اجسام دیگری هستند که از آن جدا شده‌اند، و آنها را باید به همان نقاط تماس جسم با زمین یا به نقاط اتصال آن به اجسام دی[گر] وارد کرد. وزن جسم آزاد را هم باید در میان نیروهای خارجی گنجانید، چون نمایند[هٔ] جاذبهٔ زمین بر روی ذره‌های تشکیل‌دهندهٔ جسم آزاد است. چنانکه در فصل ۵ خواه[یم] دید، وزن را باید به مرکز گرانی جسم وارد کرد. اگر جسم آزاد از چند بخش تشک[یل] شده باشد، نیروهایی را که بخشهای مختلف به هم وارد می‌کنند نباید جزء نیروهای خارجی به حساب آورد چون این نیروها، نیروهای داخلی‌اند و در نمودار جسم آزاد

نکس ۱.۴ همهٔ نیروهای خارجی مؤثر بر تراکتور در نمودار جسم آزاد تراکتور نشان داده شده‌اند. ’ن نیروها عبارت‌اند از: وزن تراکتور، وزن بار داخل جام و نیروهای وارد شده از زمین بر لاستیکها.

نکس ۲.۴ در فصل ۶ چگونگی تعیین نیروهای داخلی در یک سازه را که از قطعه‌های ختلف اتصال، مانند نیروهای نگهدارنده بیل تراکتور عکس ۱.۴، مورد مطالعه قرار می‌گیرد، نشان می‌دهد.

وارد نمی‌شوند.

۳. بزرگی و راستای نیروهای خارجی معلوم را باید به وضوح بر روی نمودار جسم زاد نشان داد. باید دقت کرد که جهت نیروهای وارد بر جسم آزاد نشان داده شود، نه جهت نیروهایی که جسم آزاد وارد می‌کند.

۴. نیروهای خارجی مجهول معمولاً عکس‌العملهایی هستند، که زمین و اجسام دیگر برای مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می‌دهند و بنابراین جسم را به باقی‌ماندن در همان مکان مقید می‌کنند و، به همین دلیل، گاهی آنها را نیروهای مقید ننده می‌نامند. عکس‌العملها در نقاطی وارد می‌شوند که جسم آزاد توسط اجسام یگر نگه داشته می‌شود یا به آنها متصل است. دربارهٔ آنها به تفصیل در بخشهای ۳.۴ و ۸.۴ بحث خواهیم کرد.

۵. در نمودار جسم آزاد باید ابعاد را هم وارد کرد چون برای محاسبهٔ گشتاور نیروها به آنها نیاز داریم. اما بقیهٔ جزئیات را باید حذف کرد.

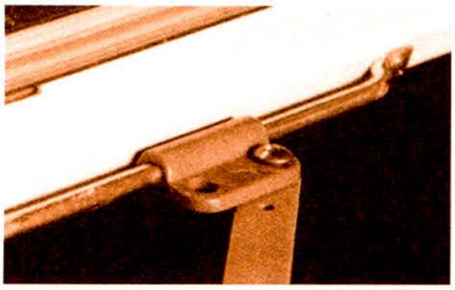
تعادل در دو بعد

۳.۱ عکس‌العملها در تکیه‌گاهها و اتصالهای سازه‌های دوبعدی

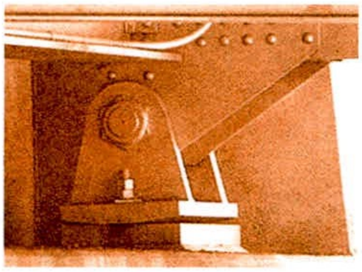
در قسمت اول این فصل تعادل سازه‌های دوبعدی را بررسی خواهیم کرد، یعنی فرض خواهیم کرد که سازهٔ مورد نظر ما و نیروهایی که به آن وارد می‌شوند هر دو در یک صفحهٔ واحد قرار دارند. بدیهی است که عکس‌العملهای لازم برای نگهداری سازه هم در همین صفحه خواهند بود.

عکس‌العملهای وارد بر یک سازهٔ دوبعدی را می‌توان نسبت به نوع تکیه‌گاهها یا اتصالهای نگهدارندهٔ سازه به سه دسته تقسیم کرد:

۱. عکس‌العملهای معادل با یک نیروی با خط اثر معلوم. تکیه‌گاهها و اتصالهایی که این نوع عکس‌العمل را ایجاد می‌کنند عبارت‌اند از غلتکها، گهواره‌ایها، سطوح بدون



عکس ۳.۴ زمانی که مکانیسم بازکردن پنجره حفاظ آن را باز می‌کند، نیرویی بر لغزنده اثر می‌کند که در وجه عمود بر میله وارد می‌شود و باعث بازشدن پنجره می‌شود.



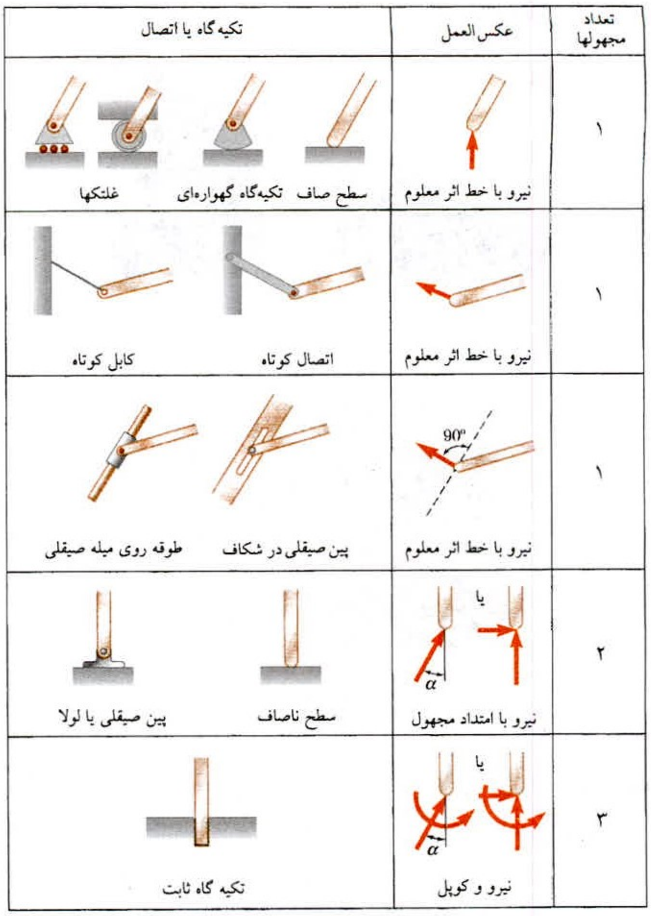
عکس ۴.۴ از تکیه‌گاه گهواره‌ای بغل‌بند، برای نگهداری پل هوایی استفاده شده است.

اصطکاک، اتصالها و کابلهای کوتاه، طوقه‌های روی میله‌های بدون اصطکاک و پینهای بدون اصطکاک واقع در شکافها. هریک از این تکیه‌گاهها و اتصالها می‌توانند جلوی حرکت را فقط در یک جهت بگیرند. این تکیه‌گاهها و عکس‌العملهای مربوط به آنها را در شکل ۱.۴ نشان داده‌ایم. این دسته از عکس‌العملها شامل فقط یک مجهول هستند که آن هم بزرگی عکس‌العمل است؛ این بزرگی را باید با یک حرف مناسب نشان داد. خط اثر این عکس‌العملها معلوم است و آن را باید به‌وضوح در نمودار جسم آزاد نمایش داد. جهت این عکس‌العملها را باید مطابق شکل ۱.۴ در مورد یک سطح بدون اصطکاک (به‌طرف جسم آزاد) یا در مورد یک کابل (به خارج از جسم آزاد) نشان داد. عکس‌العمل غلتکهای دومسیری، اتصالها، طوقه‌های روی میله، و پینهای واقع در شکاف را می‌توان به هر دو صورت نشان داد. غلتکهای یک مسیری و گهواره‌ایها به‌طورکلی برگشت‌پذیر فرض می‌شوند و بنابراین، عکس‌العملهای مربوط به آنها را هم می‌توان به هر دو صورت نشان داد.

۲. عکس‌العملهای معادل با یک نیروی با راستا و بزرگی مجهول. تکیه‌گاهها و اتصالهایی که این نوع عکس‌العمل را ایجاد می‌کنند عبارت‌اند از پینهای بدون اصطکاک در سوراخهای کیپ، و لولاها، و سطوح ناصاف. اینها می‌توانند مانع انتقال جسم در تمام امتدادها شوند، اما نمی‌توانند از دوران آن حول اتصال جلوگیری کنند. این دسته از عکس‌العملها دو مجهول دارند و معمولاً آنها را با مؤلفه‌هایشان در امتداد x و y نشان می‌دهند. در مورد سطح ناصاف، مؤلفهٔ عمود بر سطح را باید به‌طرف خارج سطح نشان داد.

۳. عکس‌العملهای معادل با یک نیرو و یک کوپل. این عکس‌العملها توسط تکیه‌گاههای ثابت ایجاد می‌شوند که با هر نوع حرکت جسم آزاد مخالفت می‌کنند و آن را کاملاً مقید نگه می‌دارند. تکیه‌گاههای ثابت عملاً نیروهایی بر تمام سطح تماس ایجاد می‌کنند، با این‌همه این نیروها را می‌شود به یک نیرو و یک کوپل خلاصه کرد. این دسته از عکس‌العملها سه مجهول دارند که معمولاً از دو مؤلفهٔ نیرو و گشتاور کوپل تشکیل می‌شوند.

وقتی جهت یک نیرو یا یک کوپل مجهول آشکار نیست، لزومی ندارد که برای تعیین آن زحمت بکشید. جهت نیرو یا کوپل را می‌شود دلبخواه فرض کرد، علامت



شکل ۱.۴ واکنش در تکیه‌گاهها و اتصالات.

جواب که به‌دست آمد معلوم می‌شود که این فرض صحیح بوده است یا نه.

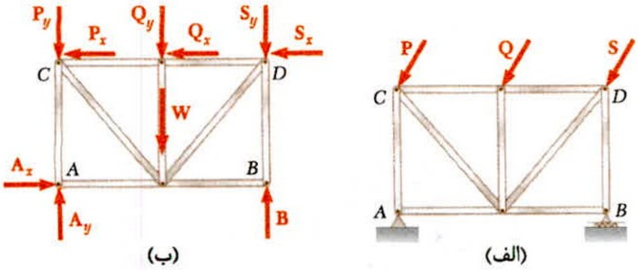
۴.۴ تعادل یک جسم صلب در دو بعد

شرطهایی که قبلاً در بخش ۱.۴ برای برقراری تعادل جسم صلب گفتیم، در مورد یک سازهٔ دوبعدی خیلی ساده‌تر می‌شوند. اگر محورهای x و y را در همان صفحهٔ سازه اختیارکنیم برای هر یک از نیروهای وارد بر سازه خواهیم داشت

$$F_z = ۰ \qquad M_x = M_y = ۰ \qquad M_z = M_O$$

بنابراین شش معادلهٔ تعادلی که در بخش ۱.۴ به‌دست آوردیم تبدیل می‌شوند به سه

عکس ۵.۴ در شکل تکیه‌گاه انبساطی گهواره‌ای بغل‌بند انبساطی یک تیر پل ورقی نشان داده شده است. سطح محدب تکیه‌گاه بغل‌بندی اجازه می‌دهد تکیه‌گاه تیر پل بتواند به‌صورت افقی حرکت کند.



شکل ۲.۴

معادلهٔ

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \qquad \Sigma M_O = ۰ \qquad (۴.۴)$$

و سه اتحاد بدیهی $۰ = ۰$. از آنجا که معادلهٔ $\Sigma M_O = ۰$ باید صرف نظر از انتخاب مبدأ (O) برقرار باشد می‌توانیم معادله‌های تعادل را برای یک سازهٔ دوبعدی به‌شکل کلی‌تر زیر بنویسیم

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \qquad \Sigma M_A = ۰ \qquad (۵.۴)$$

که A هر نقطهٔ دلبخواهی در صفحهٔ سازه می‌تواند باشد. سه معادلهٔ به‌دست‌آمده را فقط با سه مجهول می‌شود حل کرد.

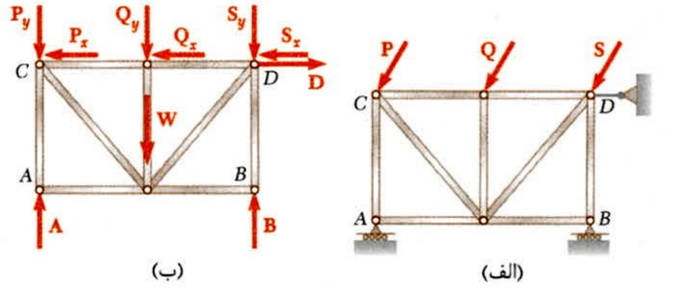
در بخش گذشته دیدیم که نیروهای مجهول معمولاً عکس‌العملها هستند و تعداد مجهولهای مربوط به یک عکس‌العمل معین به نوع تکیه‌گاه یا اتصالی بستگی دارد که سبب ایجاد آن عکس‌العمل شده است. با مراجعه به بخش ۳.۴، می‌بینیم که معادله‌های تعادل (۵.۴) می‌توان برای تعیین عکس‌العملهای دو غلتک و یک کابل، یک تکیه‌گاه ثابت، یا یک غلتک و یک پین در سوراخ کیپ، و غیره استفاده کرد.

شکل ۲.۴ (الف) را در نظر بگیرید که در آن خرپا مطابق شکل تحت تأثیر نیروهای **P**، **Q**، و **S** قرار گرفته است. خرپا به‌وسیلهٔ یک پین در A و یک غلتک در B در جای خود نگه داشته شده است. پین با وارد کردن نیرو به خرپا، از حرکت نقطهٔ A جلوگیری می‌کند، این نیرو را می‌توانیم به مؤلفه‌های $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ تجزیه کنیم. غلتک هم با وارد کردن نیروی عمودی **B**، جلو چرخش خرپا حول A را می‌گیرد. نمودار جسم آزاد خرپا را در شکل ۲.۴ (ب) نشان داده‌ایم. در این نمودار عکس‌العملهای $\mathbf{A}_x$، $\mathbf{A}_y$، و **B** و همین‌طور نیروهای **P**، **Q**، و **S** و وزن **W** خرپا مشخص شده‌اند. نظر به اینکه مجموع گشتاورهای همهٔ نیروهای نشان داده شده در شکل ۲.۴ (ب) حول نقطهٔ A صفر است، معادلهٔ $\Sigma M_A = ۰$ را می‌نویسیم، که از روی آن می‌شود بزرگی B را به‌دست آورد، چون A_x و A_y در آن وارد نمی‌شوند. سپس با توجه به صفر بود مجموع مؤلفه‌های x و y نیروها، معادله‌های $\Sigma F_x = ۰$ و $\Sigma F_y = ۰$ را می‌نویسیم و با حل این معادله‌ها مؤلفه‌های A_x و A_y را پیدا می‌کنیم.

از آنجا که مجموع گشتاورهای نیروهای خارجی حول سایر نقطه‌های غیر از A هم برابر با صفر است، می‌توانستیم یک معادلهٔ اضافی هم بنویسیم، مثلاً می‌توانستیم بنویسیم $\Sigma M_B = ۰$. اما از چنین عبارتی چیز تازه‌ای عاید نمی‌شود، زیرا قبلاً ثابت کرده‌ایم که سیستم نیروهای نشان داده شده در شکل ۲.۴ (ب) معادل با صفر است. این معادلهٔ اضافی مستقل نیست و از آن نمی‌شود برای تعیین مجهول چهارم استفاده کرد. اما می‌توانیم با آن جواب حاصل از سه معادلهٔ تعادل اولیه را امتحان کنیم.

اگرچه به سه معادلهٔ تعادل نمی‌توان معادلهٔ دیگری اضافه کرد، اما به‌جای هر یک از آنها می‌توان یک معادلهٔ دیگر قرار داد. بنابراین دستگاه معادله‌های تعادل می‌تواند به این صورت باشد

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma M_A = ۰ \qquad \Sigma M_B = ۰ \qquad (۶.۴)$$



شکل ۳.۴

ه‌شرطی که خط واصل A و B به موازات محور y نباشد [شکل ۲.۴ (ب)]. این معادله‌ها شرطهای کافی برای تعادل خرپا هستند. از دو معادلهٔ اول چنین برمی‌آید که نیروهای خارجی باید به یک تک‌نیروی عمودی در نقطهٔ A تبدیل شوند. چون معادلهٔ ـوم هم ایجاب می‌کند که گشتاور این نیرو حول نقطهٔ B ــ که در امتداد خط اثر نیرو یست ــ صفر باشد، پس این نیرو باید صفر باشد و جسم صلب در تعادل است.

سومین شکل ممکن معادله‌های تعادل را می‌توان به این صورت نوشت

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad (۷.۴)$$

ه نقطه‌های A، B، و C در امتداد یک خط راست نیستند [شکل ۲.۴ (ب)]. اولین معادله مستلزم این است که نیروهای خارجی به یک تک‌نیرو در نقطهٔ A خلاصه شوند و معادلهٔ دوم ایجاب می‌کند که این نیرو از نقطهٔ B بگذرد و معادلهٔ سوم هم ایجاب می‌کند که این نیرو از نقطهٔ C بگذرد. از آنجا که نقطه‌های A، B، و C همخط نیستند، یرو باید صفر باشد، و جسم صلب در تعادل است.

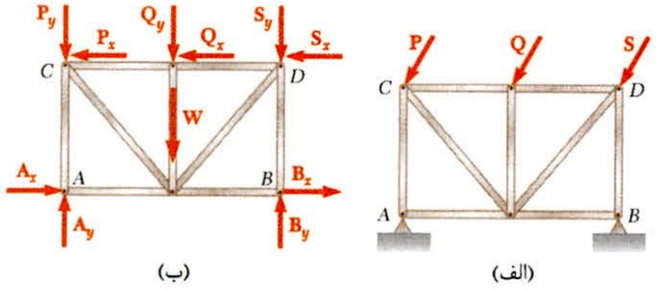
معادلهٔ $\Sigma M_A = 0$، که می‌گوید جمع گشتاورهای نیروها حول پین A صفر است، سبت به هر یک از دو معادلهٔ دیگر (۷.۴) معنای فیزیکی مشخصتری دارد. این دو معادله ابدهٔ مشابهی از توازن را نشان می‌دهند، البته نسبت به نقطه‌هایی که جسم صلب واقعاً به آنها لولا نشده است. با وجود این، آنها به اندازهٔ معادلهٔ اول مفیدند و انتخاب معادله‌های عادل نباید بی‌جهت تحت تأثیر معنای فیزیکی این معادله‌ها قرار بگیرد. درواقع، در عمل ـعقولتر این است که معادله‌های یک‌مجهولی را اختیار کنیم، چون به این ترتیب دیگر یازی به حل دستگاه معادلات نخواهد بود. معادله‌های یک‌مجهولی را می‌شود با جمع شتاورها حول محل تلاقی خط اثرهای دو نیروی مجهول، یا اگر این نیروها موازی باشند، ا جمع مؤلفه‌ها در راستای عمود بر راستای مشترک آنها به‌دست آورد. مثلاً در مورد خرپای شکل ۳.۴ که توسط غلتکهایی در A و B و یک میلهٔ کوتاه در D نگه داشته شده است، عکس‌العملهای A و B را می‌شود با جمع مؤلفه‌های x حذف کرد. عکس‌العملهای A و D را می‌توان با جمع گشتاورها حول نقطهٔ C و عکس‌العملهای B و D را با جمع گشتاورها حول D حذف کرد. به این ترتیب معادله‌های تعادل چنین خواهند بود

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad \Sigma M_D = 0$$

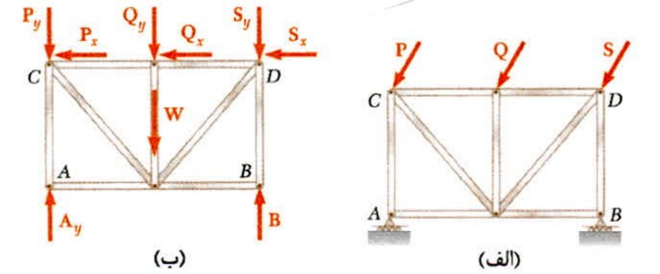
ه هرکدام فقط یک مجهول دارند.

۵.۴ عکس‌العملهای از لحاظ استاتیکی نامعین. قیدهای ناقص

ر دو مثال بخش گذشته (شکلهای ۲.۴ و ۳.۴) تکیه‌گاههای به‌کاررفته طوری بودند که جسم صلب نمی‌توانست تحت تأثیر بارهای داده شده یا تحت هر نوع بارگذاری یگری حرکت کند. در چنین مواردی اصطلاحاً می‌گویند که جسم کاملاً مقید شده است. همچنین یادآوری می‌کنیم که عکس‌العملهای مربوط به این تکیه‌گاهها شامل



شکل ۴.۴ عکس‌العملهای از لحاظ استاتیکی نامعین.



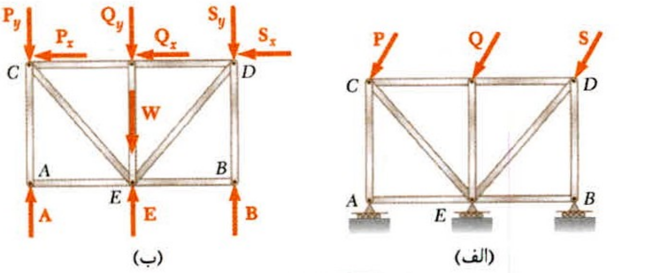
شکل ۵.۴ قیدهای ناقص.

سه مجهول بودند و می‌توانستیم با حل سه معادلهٔ تعادل آنها را تعیین کنیم. در صورت وجود چنین وضعیتی می‌گویند که عکس‌العملها از لحاظ استاتیکی معین‌اند.

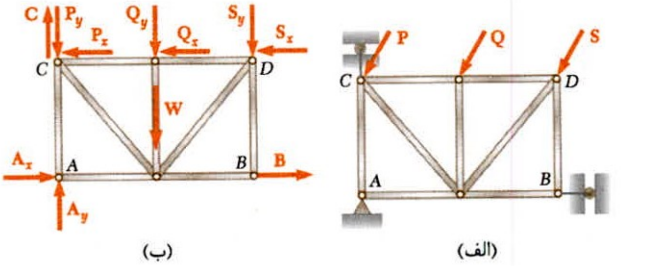
حالا خرپای نشان داده شده در شکل ۴.۴ (الف) را در نظر بگیرید که با پینهایی در نقطه‌های A و B نگهداری شده است. این تکیه‌گاهها قیدهایی بیش از آن که برای جلوگیری از حرکت خرپا تحت بارهای داده شده یا هر نوع بارگذاری دیگر لازم است فراهم می‌کنند. همچنین با توجه به نمودار جسم آزاد شکل ۴.۴ (ب) می‌بینیم که عکس‌العملهای مربوط شامل چهار مجهول‌اند. اما در بخش ۴.۴ نشان دادیم که تنها سه معادلهٔ مستقل تعادل وجود دارد یعنی تعداد مجهولها بیشتر از تعداد معادله‌هاست و همهٔ مجهولها را نمی‌شود تعیین کرد. اگرچه معادله‌های $\Sigma M_A = 0$ و $\Sigma M_B = 0$ به‌ترتیب مؤلفه‌های B_y و A_y را به‌دست می‌دهند اما از معادلهٔ $\Sigma F_x = 0$ فقط $(A_x + B_x)$ یعنی فقط مجموع مؤلفه‌های افقی عکس‌العملها در A و B را می‌شود به‌دست آورد. اصطلاحاً می‌گویند مؤلفه‌های A_x و B_x از لحاظ استاتیکی نامعین‌اند. این مؤلفه‌ها را می‌توانیم با در نظر گرفتن تغییر شکلهای ناشی از بارگذاری در خرپا تعیین کنیم. ولی این روش خارج از حیطهٔ درس استاتیک است و به درس مقاومت مصالح مربوط می‌شود.

تکیه‌گاههایی که برای نگهداشتن خرپای نشان داده شده در شکل ۵.۴ (الف) به‌کار گرفته شده‌اند غلتکهایی هستند که در A و B واقع شده‌اند. واضح است که قیدهایی که این تکیه‌گاهها ایجاد می‌کنند برای جلوگیری از حرکت خرپا کافی نیستند. این قیدها گرچه جلو هرگونه حرکت عمودی را می‌گیرند اما خرپا برای حرکت در امتداد افقی آزاد است. اصطلاحاً می‌گویند که خرپا به‌طور ناقص مقید شده است.[1] با توجه به شکل ۵.۴ (ب)، می‌بینیم که عکس‌العملها در نقطه‌های A و B فقط شامل دو مجهول هستند. چون باز هم سه معادلهٔ تعادل باید برقرار باشد، تعداد مجهولها از تعداد معادله‌ها کمتر است، و یکی از معادله‌های تعادل برقرار نخواهد شد. اگر چه $\Sigma M_A = 0$ و

۱. اجسام به‌طور ناقص مقید شده را غالباً اجسام ناپایدار می‌گویند. اما برای احتراز از اشتباه بین این نوع ناپایداری ناشی از کافی نبودن قیدها و ناپایداری مورد نظر در فصل ۱۰ که به رفتار جسم صلب در حالت عدم تعادل مربوط است استفاده از اصطلاحات پایدار و ناپایدار را به همانجا محدود خواهیم کرد.



شکل ۶.۴ قیدهای نامناسب.



شکل ۷.۴ قیدهای نامناسب.

$\Sigma M_B = 0$ را می‌شود با انتخاب مناسب عکس‌العملها در A و B برقرار کرد، اما معادلهٔ $\Sigma F_x = 0$ برقرار نخواهد شد مگر اینکه مجموع مؤلفه‌های افقی نیروهای **P**، **Q** و **S** مساوی صفر بشود. پس ملاحظه می‌کنیم که تعادل خرپای شکل ۵.۴ تحت شرایط بارگذاری عمومی نمی‌تواند برقرار بماند.

از بحث بالا این‌طور برمی‌آید که اگر قرار باشد جسم صلبی کاملاً مقید باشد و عکس‌العملهای تکیه‌گاههایش از لحاظ استاتیکی معین باشند، شرطش این است که تعداد مجهولها با تعداد معادله‌های تعادل برابر باشد. تا وقتی این شرط برقرار نشود می‌توانیم مطمئن باشیم که جسم صلب کاملاً مقید نیست، یا اینکه عکس‌العملهای تکیه‌گاههای آن از لحاظ استاتیکی نامعین‌اند، و یا هر دو حالت وجود دارد.

البته باید متوجه باشیم که شرط بالا، اگرچه لازم است، اما کافی نیست. به‌عبارت دیگر، در صورت برابر بودن تعداد مجهولها با تعداد معادله‌ها تضمینی وجود ندارد که جسم کاملاً مقید باشد یا اینکه عکس‌العملهای تکیه‌گاههایش از لحاظ استاتیکی معین باشند. مثلاً خرپای شکل ۶.۴(الف) را که توسط غلتکهایی در **A**، **B**، و **E** نگه‌داشته شده است در نظر بگیرید. اگرچه سه عکس‌العمل مجهول **A**، **B**، و **E** [شکل ۶.۴(ب)] وجود دارند، اما معادلهٔ $\Sigma F_x = 0$ برقرار نخواهد شد مگر اینکه مجموع مؤلفه‌های افقی نیروهای **P**، **Q** و **S** صفر بشود. با آنکه تعداد قیدها کافی است، اما آرایش آنها مناسب نیست و خرپا برای حرکت در امتداد افقی آزاد است. اصطلاحاً می‌گوییم که خرپا به‌طور نامناسب مقید شده است. چون تنها دو معادلهٔ تعادل برای تعیین سه مجهول باقی می‌ماند، عکس‌العملها از لحاظ استاتیکی نامعین خواهند بود. پس قیدهای نامناسب هم نامعینی استاتیکی ایجاد می‌کنند.

مثال دیگری از قیدهای نامناسب ــ و نامعینی استاتیکی ــ مربوط به یک خرپا را در شکل ۷.۴ نشان داده‌ایم. این خرپا توسط یک پین در A و غلتکهایی در B و C نگه داشته شده است که در مجموع شامل چهار مجهول‌اند. چون تنها سه معادلهٔ مستقل تعادل وجود دارد، عکس‌العملهای تکیه‌گاهها از لحاظ استاتیکی نامعین‌اند. از طرف دیگر، می‌بینیم که معادلهٔ $\Sigma M_A = 0$ نمی‌تواند تحت شرایط بارگذاری عمومی برقرار شود، چون خط اثرهای عکس‌العملهای **B** و **C** از نقطهٔ A عبور می‌کنند. نتیجه می‌گیریم که خرپا می‌تواند حول A دوران کند و به‌طور نامناسب مقید شده است.[1]

مثالهای شکلهای ۶.۴ و ۷.۴ ما را به این نتیجه می‌رساند که یک جسم صل وقتی به طور نامناسب مقید شده است که تکیه‌گاهها، ولو اینکه بتوانند عکس‌العملها کافی ایجاد کنند، طوری آرایش یافته باشند که عکس‌العملها یا همرس باشند یا موازی.[2]

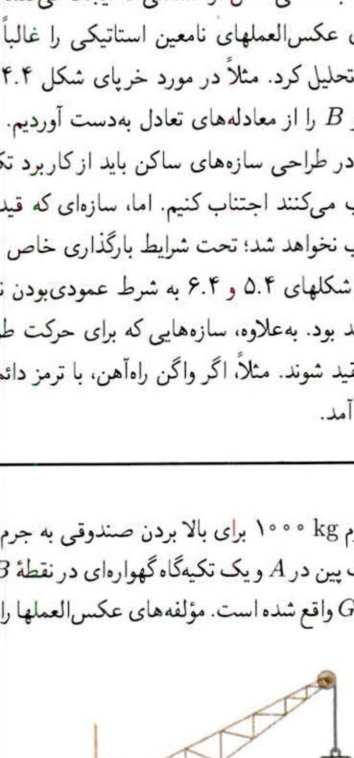
خلاصه اینکه، برای اطمینان از مقید بودن کامل یک جسم صلب دوبعدی معین بودن عکس‌العملهای تکیه‌گاههای آن از لحاظ استاتیکی باید تحقیق کنیم که عکس‌العملها، شامل سه ــ و فقط ــ مجهول‌اند، و اینکه تکیه‌گاهها طوری آرایش یافته‌اند که موجب همرس یا موازی‌بودن عکس‌العملها نیستند.

تکیه‌گاههای شامل عکس‌العملهای نامعین استاتیکی را می‌بایست در طراحی سازه‌ها با دقت، و تنها با آگاهی کامل از مسائلی که ایجاد می‌کنند به‌کار ببریم. از طر دیگر، سازه‌های دارای عکس‌العملهای نامعین استاتیکی را غالباً می‌شود تا حدود با روشهای استاتیک تحلیل کرد. مثلاً در مورد خرپای شکل ۴.۴، مؤلفه‌های عمود عکس‌العملها در A و B را از معادله‌های تعادل به‌دست آوردیم.

بدیهی است که، در طراحی سازه‌های ساکن باید از کاربرد تکیه‌گاههایی که ایجا قید ناقص یا نامناسب می‌کنند اجتناب کنیم. اما، سازه‌ای که قید ناقص یا نامناسب داشته باشد لزوماً خراب نخواهد شد؛ تحت شرایط بارگذاری خاص تعادل می‌تواند برقرار بماند. مثلاً، خرپاهای شکلهای ۵.۴ و ۶.۴ به شرط عمودی‌بودن نیروهای **P**، **Q** و در وضع تعادل خواهند بود. به‌علاوه، سازه‌هایی که برای حرکت طراحی می‌شوند، با صرفاً به‌طور ناقص مقید شوند. مثلاً، اگر واگن راه‌آهن، با ترمز دائمی کاملاً مقید شو چندان به کار نخواهد آمد.

مسئلهٔ نمونه ۱.۴

از جرثقیل ثابتی به جرم 1000 kg برای بالا بردن صندوقی به جرم 2400 kg استفاد می‌شود. جرثقیل را یک پین در A و یک تکیه‌گاه گهواره‌ای در نقطهٔ B نگه داشته‌اند. مر گرانی جرثقیل در نقطهٔ G واقع شده است. مؤلفه‌های عکس‌العملها را در A و B پیدا کنی



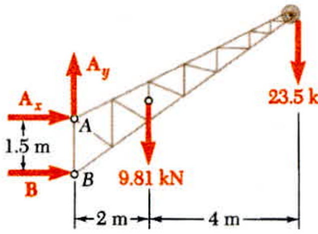
حل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد جرثقیل را رسم می‌کنیم. با ضرب کردن جرمهای جرثقیل و صندوق در $g = 9.81\ \text{m/s}^2$، وزنهای متناظر آنها را پیدا می‌کنیم که عبارت‌اند از 9810 N یا 9.81 kN، و 23500 N یا 23.5 kN. راستای عکس‌العمل در پین A را نمی‌دانیم، آن را برحسب مؤلفه‌هایش $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ نشان می‌دهیم. عکس‌العم

۱. دوران خرپا حول A مستلزم «بازی» در تکیه‌گاههای B و C است. در عمل این بازی همیشه وجود خواهد داشت. علاوه بر آن، می‌توان یادآوری کرد که اگر میزان بازی کوچک بماند، جابه‌جایی غلتکها B و C و در نتیجه فواصل A تا خط اثرهای عکس‌العملهای **B** و **C** نیز کوچک می‌مانند. معاد $\Sigma M_A = 0$ نیز مستلزم این است که **B** و **C** بسیار بزرگ باشند، وضعیتی که ممکن است سبب شکستن تکیه‌گاههای B و C شود.

۲. چون این وضعیت از آرایش یا وضع هندسی نامناسب تکیه‌گاهها ناشی می‌شود، اغلب آن را ناپایدار هندسی می‌نامند.

ر B به سطح تماس عمود است، پس افقی است. فرض می‌کنیم که راستاهای $\mathbf{A}_x$، $\mathbf{A}_y$ و $\mathbf{B}$ مطابق شکل باشد.



تعیین B. می‌گوییم که جمع گشتاورهای همهٔ نیروهای خارجی حول نقطهٔ A صفر است. معادله‌ای که به‌دست می‌آید نه شامل A_x است نه شامل A_y، چون گشتاورهای $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ حول A صفرند. با ضرب بزرگی هر نیرو در فاصلهٔ عمودی‌اش از A، می‌نویسیم

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰: \quad B(۱/۵\,\text{m}) - (۹/۸۱\,\text{kN})(۲\,\text{m}) - (۲۳/۵\,\text{kN})(۶\,\text{m}) = ۰$$

$$B = +۱۰۷/۱\,\text{kN} \qquad \mathbf{B} = ۱۰۷/۱\,\text{kN} \rightarrow \blacktriangleleft$$

چون نتیجه مثبت است، عکس‌العمل در همان جهتی است که فرض کردیم.

تعیین $\mathbf{A}_x$. بزرگی $\mathbf{A}_x$ به این طریق به‌دست می‌آید که می‌گوییم جمع مؤلفه‌های افقی تمام نیروهای خارجی صفر است.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ۰: \quad A_x + B = ۰$$

$$A_x + ۱۰۷/۱\,\text{kN} = ۰$$

$$A_x = -۱۰۷/۱\,\text{kN} \qquad \mathbf{A}_x = ۱۰۷/۱\,\text{kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

چون نتیجه منفی است، جهت $\mathbf{A}_x$ مخالف جهتی است که اول فرض کردیم.

تعیین $\mathbf{A}_y$. جمع مؤلفه‌های عمودی هم باید مساوی با صفر باشد.

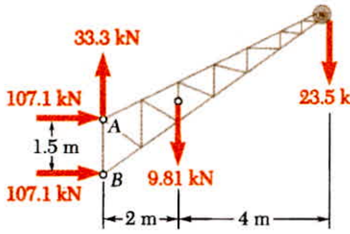
$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰: \quad A_y - ۹/۸۱\,\text{kN} - ۲۳/۵\,\text{kN} = ۰$$

$$A_y = +۳۳/۳\,\text{kN} \qquad \mathbf{A}_y = ۳۳/۳\,\text{kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

با جمع برداری مؤلفه‌های $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ پی می‌بریم که عکس‌العمل در A برابر است با $۱۱۲/۲\,\text{kN} \measuredangle ۱۷/۳^\circ$.

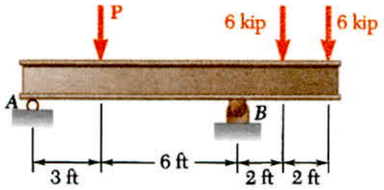
تحقیق. درستی مقادیر به‌دست آمده برای عکس‌العملها را می‌شود با توجه به اینکه جمع گشتاورهای همهٔ نیروهای خارجی حول هر نقطه باید صفر باشد امتحان کرد. برای مثال نقطه B را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -(۹/۸۱\,\text{kN})(۲\,\text{m}) - (۲۳/۵\,\text{kN})(۶\,\text{m}) + (۱۰۷/۱\,\text{kN})(۱/۵\,\text{m}) = ۰$$



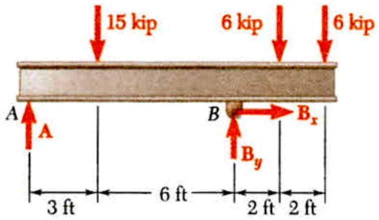
مسئلهٔ نمونه ۲.۴

به تیری مطابق شکل سه بار وارد شده است. تیر به غلتکی در A و پینی در B تکیه دارد. عکس‌العمل در نقطه‌های A و B را، برای $P = ۱۵\,\text{kip}$ پیدا کنید. از وزن تیر صرف‌نظر کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد تیر را رسم می‌کنیم. عکس‌العمل در A عمودی است و آن را با $\mathbf{A}$ نشان می‌دهیم. عکس‌العمل در B را با دو مؤلفهٔ $\mathbf{B}_x$ و $\mathbf{B}_y$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم مؤلفه‌ها در راستاهای نشان داده شده وارد می‌شوند.



معادله‌های تعادل. سه معادلهٔ تعادل زیر را می‌نویسیم و عکس‌العملهای نشان داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ۰: \qquad B_x = ۰ \qquad \mathbf{B}_x = ۰ \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰:$$

$$-(۱۵\,\text{kip})(۳\,\text{ft}) + B_y(۹\,\text{ft}) - (۶\,\text{kip})(۱۱\,\text{ft}) - (۶\,\text{kip})(۱۳\,\text{ft}) = ۰$$

$$B_y = +۲۱/۰\,\text{kip} \qquad \mathbf{B}_y = ۲۱/۰\,\text{kip} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = ۰:$$

$$-A(۹\,\text{ft}) + (۱۵\,\text{kip})(۶\,\text{ft}) - (۶\,\text{kip})(۲\,\text{ft}) - (۶\,\text{kip})(۴\,\text{ft}) = ۰$$

$$A = +۶/۰۰\,\text{kip} \qquad \mathbf{A} = ۶/۰۰\,\text{kip} \uparrow \blacktriangleleft$$

تحقیق. نتایج به‌دست آمده را با جمع بستن مؤلفه‌های عمودی همه نیروهای خارجی امتحان می‌کنیم:

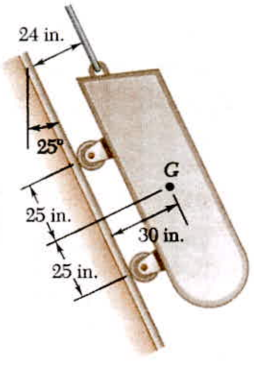
$$+\uparrow \Sigma F_y = +۶/۰۰\,\text{kip} - ۱۵\,\text{kip} + ۲۱/۰\,\text{kip} - ۶\,\text{kip} - ۶\,\text{kip} = ۰$$

تذکر. در این مسئله عکس‌العملهای A و B هر دو عمودی‌اند، اما دلایل مختلفی برای عمودی بودن این عکس‌العملها وجود دارد. در A، تیر توسط یک غلتک نگه داشته شده است، بنابراین عکس‌العمل نمی‌تواند مؤلفهٔ افقی داشته باشد. در B، مؤلفهٔ افقی عکس‌العمل صفر است، چون باید در معادلهٔ تعادل $\sum F_x = ۰$ صدق کند و هیچ یک از نیروهای وارد بر تیر مؤلفهٔ افقی ندارند.

با یک نگاه می‌توانستیم متوجه شویم که عکس‌العمل در B عمودی است و از مؤلفهٔ افقی $\mathbf{B}_x$ چشم بپوشیم. اما این کار شایسته‌ای نیست. به این ترتیب، ممکن است مؤلفهٔ $\mathbf{B}_x$، در وقتی که شرایط بارگذاری مستلزم وجود چنان مؤلفه‌ای است (یعنی وقتی بار افقی داریم) فراموش شود. همچنین مؤلفهٔ $\mathbf{B}_x$ با کاربرد و حل معادلهٔ تعادل $\sum F_x = ۰$، مساوی صفر به‌دست آمد. اگر $\mathbf{B}_x$ را فوراً مساوی صفر قرار می‌دادیم ممکن بود نفهمیم که عملاً از این معادله استفاده کرده‌ایم و بنابراین ممکن بود دربارهٔ تعداد معادله‌های موجود برای حل مسئله اشتباه کنیم.

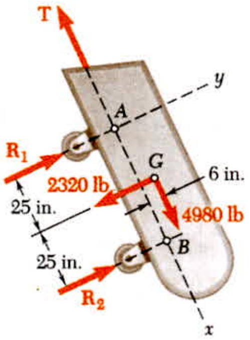
مسئلهٔ نمونه ۳.۴

یک واگن باربری بر روی ریلی که با امتداد قائم زاویهٔ ۲۵° می‌سازد در حال سکون است. وزن واگن و بار آن ۵۵۰۰ lb است و نقطه اثر آن به فاصلهٔ ۳۰ in از وسط خط واصل بین محور چرخها قرار دارد. واگن توسط کابلی به فاصله ۲۴ in در بالای ریل، نگه داشته شده است. کشش در کابل و عکس‌العمل در هر جفت از چرخها را حساب کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد واگن را رسم می‌کنیم. عکس‌العمل در هر چرخ بر سطح ریل عمود و نیروی کشش $\mathbf{T}$ با سطح ریل موازی است. برای سهولت، محور x را موازی با ریل و محور y را عمود بر آن انتخاب می‌کنیم. با تجزیهٔ وزن به مؤلفه‌های x و y، داریم



$$W_x = +(۵۵۰۰ \text{ lb})\cos ۲۵° = +۴۹۸۰ \text{ lb}$$
$$W_y = -(۵۵۰۰ \text{ lb})\sin ۲۵° = -۲۳۲۰ \text{ lb}$$

معادله‌های تعادل. گشتاورها را حول A می‌گیریم تا $\mathbf{T}$ و $\mathbf{R}_۱$ را از محاسبه حذف کنیم

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰: \quad -(۲۳۲۰ \text{ lb})(۲۵ \text{ in}) - (۴۹۸۰ \text{ lb})(۶ \text{ in}) + R_۲(۵۰ \text{ in}) = ۰$$
$$R_۲ = +۱۷۵۸ \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_۲ = ۱۷۵۸ \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

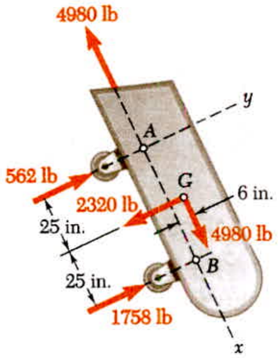
حالا با محاسبهٔ گشتاورها حول B، برای حذف $\mathbf{T}$ و $\mathbf{R}_۲$ می‌نویسیم

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = ۰: \quad -(۲۳۲۰ \text{ lb})(۲۵ \text{ in}) - (۴۹۸۰ \text{ lb})(۶ \text{ in}) - R_۱(۵۰ \text{ in}) = ۰$$
$$R_۱ = +۵۶۲ \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_۱ = ۵۶۲ \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

برای به‌دست آوردن مقدار T می‌نویسیم:

$$\searrow +\Sigma F_x = ۰: \quad +۴۹۸۰ \text{ lb} - T = ۰$$
$$T = +۴۹۸۰ \text{ lb} \qquad \mathbf{T} = ۴۹۸۰ \text{ lb} \nwarrow \blacktriangleleft$$

مقادیر محاسبه شدهٔ عکس‌العملها در شکل زیر نشان داده شده است.



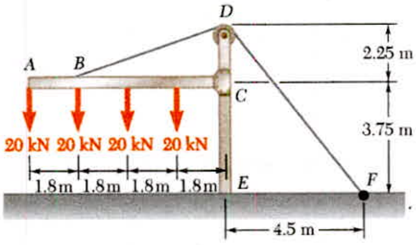
تحقیق. درستی محاسبات را با نوشتن معادلهٔ زیر امتحان می‌کنیم:

$$\nearrow +\Sigma F_y = +۵۶۲ \text{ lb} + ۱۷۵۸ \text{ lb} - ۲۳۲۰ \text{ lb} = ۰$$

درستی جوابها را با محاسبهٔ گشتاورها حول هر نقطه‌ای غیر از A یا B هم می‌توانستیم امتحان کنیم.

مسئلهٔ نمونه ۴.۴

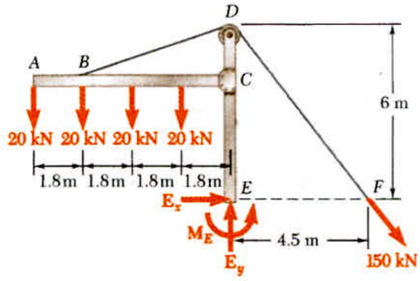
قاب نشان داده شده قسمتی از سقف یک ساختمان کوچک را نگه می‌دارد. کشش در کابل ۱۵۰ kN است، عکس‌العمل در انتهای ثابت E را پیدا کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد قاب و کابل BDF را رسم می‌کنیم. عکس‌العمل در E را با مؤلفه‌های $\mathbf{E}_x$ و $\mathbf{E}_y$ و کوپل $\mathbf{M}_E$ نشان می‌دهیم. نیروهای دیگر وارد بر جسم آزاد عبارت‌اند از چهار بار ۲۰-kN و نیروی ۱۵۰-kN وارد بر سر F کابل.

معادله‌های تعادل. با توجه به اینکه



$$DF = \sqrt{(۴٫۵\ \mathrm{m})^۲ + (۶\ \mathrm{m})^۲} = ۷٫۵\ \mathrm{m}$$

ت، می‌نویسیم

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ۰: \qquad E_x + \frac{۴٫۵}{۷٫۵}(۱۵۰\ \mathrm{kN}) = ۰$$

$$E_x = -۹۰٫۰\ \mathrm{kN} \qquad \mathbf{E}_x = ۹۰٫۰\ \mathrm{kN} \leftarrow$$ ◄

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰: \qquad E_y - ۴(۲۰\ \mathrm{kN}) - \frac{۶}{۷٫۵}(۱۵۰\ \mathrm{kN}) = ۰$$

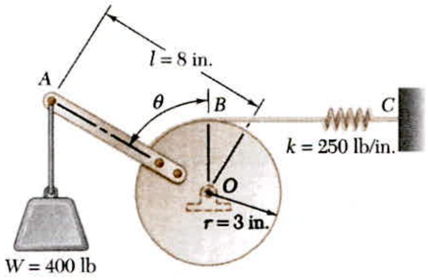
$$E_y = +۲۰۰\ \mathrm{kN} \qquad \mathbf{E}_y = ۲۰۰\ \mathrm{kN} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = ۰: \qquad (۲۰\ \mathrm{kN})(۷٫۲\ \mathrm{m}) + (۲۰\ \mathrm{kN})(۵٫۴\ \mathrm{m}) + (۲۰\ \mathrm{kN})(۳٫۶\ \mathrm{m}) + (۲۰\ \mathrm{kN})(۱٫۸\ \mathrm{m}) - \frac{۶}{۷٫۵}(۱۵۰\ \mathrm{kN})(۴٫۵\ \mathrm{m}) + M_E = ۰$$

$$M_E = +۱۸۰٫۰\ \mathrm{kN\cdot m} \qquad M_E = ۱۸۰٫۰\ \mathrm{kN\cdot m} \circlearrowleft$$

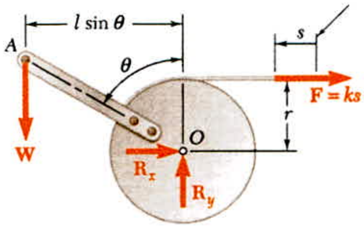
مسئلهٔ نمونه ۵.۴

قطعه‌ای به وزن $۴۰۰\ \mathrm{lb}$ مطابق شکل به اهرم A بسته شده است. ثابت فنر BC برابر با $۲۵۰\ \mathrm{lb/in}$ و فنر در وضعیت $\theta = ۰$ در حالت آزاد است. وضعیت تعادل را تعیین کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. اگر طول طبیعی فنر را با s نشان بدهیم، و توجه کنیم که $s = r\theta$ است، خواهیم داشت $F = ks = kr\theta$.



معادلهٔ تعادل. با جمع گشتاورهای نیروی $\mathbf{W}$ و $\mathbf{F}$ حول O، داریم

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = ۰: \quad Wl\sin\theta - r(kr\theta) = ۰ \qquad \sin\theta = \frac{kr^۲}{Wl}\theta$$

با قرار دادن داده‌ها در این رابطه، به‌دست می‌آوریم

$$\sin\theta = \frac{(۲۵۰\ \mathrm{lb/in})(۳\ \mathrm{in})^۲}{(۴۰۰\ \mathrm{lb})(۸\ \mathrm{in})}\theta \ ; \ \sin\theta = ۰٫۷۰۳\theta$$

با استفاده از روش آزمون و خطا، نتیجه می‌شود

$$\theta = ۰ \qquad \theta = ۰\theta = ۸۰٫۳°$$ ◄

چگونه مسئله حل کنیم

دیدید که نیروهای خارجی وارد بر یک جسم صلب در حال تعادل تشکیل یک سیستم معادل با صفر می‌دهند. برای حل یک مسئلهٔ تعادل اولین کاری که باید بکنید این است که یک نمودار جسم آزاد تروتمیز و در حد معقول بزرگ بکشید و روی آن تمام نیروهای خارجی اعم از معلوم و مجهول را نشان بدهید.

برای یک جسم صلب دوبعدی، عکس‌العملهای تکیه‌گاهها می‌توانند ــ بسته به نوع تکیه‌گاه ــ یک، یا دو و یا سه مجهولی باشند (شکل ۱.۴). برای موفق شدن در حل مسئله، یک نمودار جسم آزاد صحیح نیاز دارید. هرگز تا وقتی که مطمئن از حضور همهٔ بارها، همهٔ عکس‌العملها و وزن جسم (در صورت لزوم) در نمودار جسم آزاد نشده‌اید مبادرت به حل مسئله نکنید.

وقتی نمودار جسم آزاد را رسم کردید، لازم است که جهتهای عکس‌العملهای مجهول را مشخص کنید. پیشنهاد کردیم پیوسته فرض کنید که این نیروها در جهت مثبت وارد می‌شوند، به‌طوری که جوابهای مثبت پیوسته اثر نیروهای وارد را در جهت مثبت نشان می‌دهد و در غیر این صورت جواب منفی به‌دست می‌آید، که اثر نیروهای وارد را در جهت منفی نشان می‌دهد. به طور مشابه توصیه می‌شود که پیوسته فرض کنید نیروی مجهول در یک میله یا کابل کششی است، به‌طوری که عکس‌العمل پیوسته به این خاطر کششی و مثبت است. در صورت عکس‌العمل جامع ممکن است، یک جواب منفی برای میله یا یک کابل غیرممکن باشد و بنابراین کاربرد آن یک اشتباه در حل مسئله است.

۱. **می‌توانید سه معادلهٔ تعادل بنویسید** و آنها را برای سه مجهول حل کنید. این سه معادله می‌توانند اینها باشند

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma F_y = ۰ \qquad \Sigma M_O = ۰$$

اما معمولاً چندجور دستگاه معادله وجود دارد، مثل

$$\Sigma F_x = ۰ \qquad \Sigma M_A = ۰ \qquad \Sigma M_B = ۰$$

که نقطهٔ B در آن طوری انتخاب می‌شود که خط AB موازی با محور y نباشد، یا می‌توانید معادله‌های زیر را بنویسید

$$\Sigma M_A = ۰ \qquad \Sigma M_B = ۰ \qquad \Sigma M_C = ۰$$

که نقطه‌های A، B، و C روی یک خط راست نباشند.

۲. برای ساده کردن حل مسئله، استفاده از یکی از روشهای زیر در صورت امکان، ممکن است به شما کمک کند.

الف. با جمع بستن گشتاورها حول محل تلاقی خط اثرهای دو نیروی مجهول، معادله‌ای به‌دست خواهید آورد که یک‌مجهولی است.

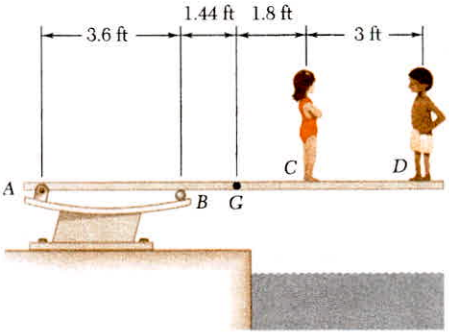
ب. با جمع بستن مؤلفه‌ها در یک راستای عمود بر دو نیروی مجهول و موازی، معادله‌ای به‌دست خواهید آورد که یک‌مجهولی است.

در بعضی از مسئله‌ها از شما خواسته می‌شود، حدود مقادیر مجاز بار وارد شده را برای یک سازه مفروض تعیین کنید، مانند عکس‌العمل در یک تکیه‌گاه، ماکزیمم نیرو در یک یا چند کابل، یا چند میله. برای مسئله‌هایی از این نوع، ابتدا حالت بارگذاری ماکزیمم را فرض کنید (برای مثال، ماکزیمم نیروی مجاز در یک میله) و سپس با کاربرد معادلات تعادل، عکس‌العملهای مجهول را با‌استفاده بار معلوم کنید. اگر عکس‌العملها در قیدها صد کند آنگاه بار واردشده حداکثر یا حداقل مقدار مجاز است. بنابراین، اگر جواب بیشتر از یک قید باشد (برای مثال نیرو در یک کابل فشاری است) فرض اولیه اشتباه است و بارگذاری در شرایط دیگر باید فرض شود (مانند مثال گذشته، باید فرض کنید نیرو در کابل صفر است عکس‌العمل مجاز حداقل). این فرایند حل برای امکان بارگذاری حداکثر دیگر تکرار می‌شو و برای تعیین حدود مجاز مقدار بار وارد شده تکرار می‌شود.

مانند فصل ۲ قویاً توصیه می‌کنیم پیوسته معادلات تعادل را به شکل یکسان مانند مسئله‌های نمونه به‌کار ببرید، یعنی، مقدارهای معلوم و مجهول در سمت چپ معادله، و جمع آنها را مساوی صفر قرار دهید.

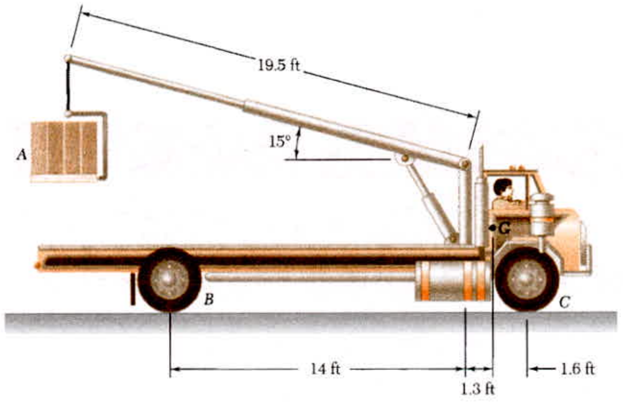
مسئله‌ها

۱.۴ دو بچه روی یک تخته شیرجه به وزن ۱۴۶ lb ایستاده‌اند. اگر وزن بچه‌ها در C و D به‌ترتیب ۶۳ lb و ۹۰ lb باشد مطلوب است (الف) واکنش در A، (ب) واکنش در B.



شکل م ۱.۴

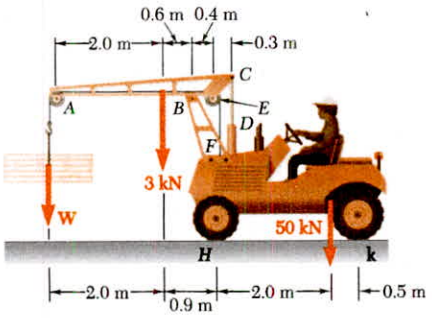
۲.۴ تیر روی کامیون ۹۵۰۰-lb برای تخلیه یک بار به وزن ۳۵۰۰ lb به‌کار می‌رود. مطلوب است واکنش در هر یک از دو حالت (الف) چرخهای عقب نقطهٔ B، (ب) چرخهای جلو نقطهٔ C.



شکل م ۲.۴

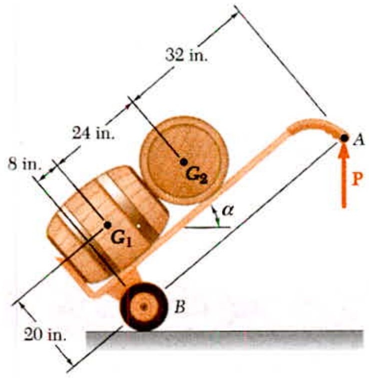
۳.۴ باری از چوب به وزن $\mathbf{W} = ۲۵\ \text{kN}$ توسط بازوی متحرک بالا کشیده می‌شود. وزن بازوی ABC و وزن کامیون و راننده در شکل نشان داده شده است. معین کنید عکس‌العمل در هر یک از دو چرخ (الف) چرخهای جلو H، (ب) چرخهای عقب K.

۴.۴ باری از چوب به وزن $\mathbf{W} = ۲۵\ \text{kN}$ مطابق شکل با یک بازوی متحرک بالا کشیده می‌شود. می‌دانیم که کشش در قسمتهای کابل AEF برابر ۲۵ kN است و وزن بازوی ABC برابر ۳ kN است. معین کنید (الف) کشش در میله CD، (ب) واکنش در پین B.



شکل م ۳.۴ و م ۴.۴

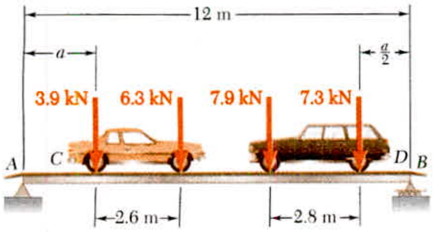
۵.۴ چرخ دستی برای حمل دو بشکه هر یک به وزن ۸۰ lb به‌کار می‌رود. از وزن چرخ دستی چشم‌پوشی می‌شود. معین کنید. (الف) نیروی عمودی **P** وارد بر دسته چرخ، به‌منظور حفظ تعادل اگر $\alpha = ۳۵°$ باشد، (ب) عکس‌العمل متناظر در هر یک از دو چرخ.



شکل م ۵.۴

۶.۴ مسئله ۵.۴ را وقتی $\alpha = ۴۰°$ باشد، حل کنید.

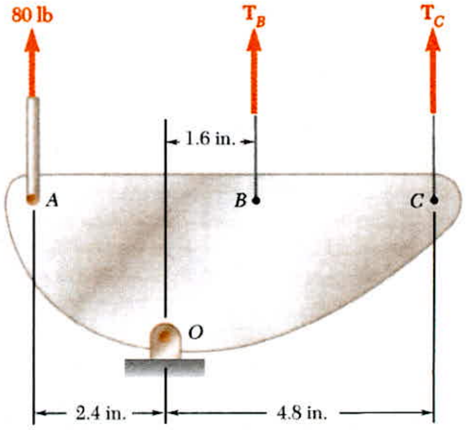
۷.۴ وقتی اتومبیل‌های C و D در دو سمت یک پل توقف می‌کنند، نیروهای وارد شد تایرها روی پل در شکل نشان داده شده است. مطلوب است عکس‌العمل‌های کلی در A و B را وقتی (الف) $a = ۲/۹\ \text{m}$، (ب) $a = ۸/۱\ \text{m}$ باشد.



شکل م ۷.۴ و ۸.۴

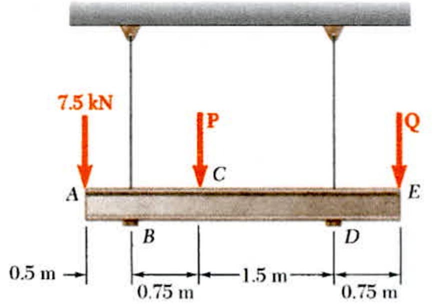
۸. وقتی اتومبیلهای C و D در دو سمت یک پل توقف می‌کنند، نیروهای وارد شده از تایرها
ی پل در شکل نشان داده شده است. اگر عکس‌العمل کلی در A ماکزیمم باشد. مطلوب
ست (الف) مقدار a را برای اینکه عکس‌العمل کلی در A ماکزیمم باشد، (ب) عکس‌العمل
ی متناظر در A و B.

۹.۴ میلهٔ کنترلی در A و طنابهایی در نقاط B و C به لنگی متصل است. برای نیروی وارد
بر میله، گستره مقادیر کشش در طناب نقطه C را به‌دست آورید، اگر طنابها کشیده بمانند و
ماکزیمم کشش مجاز در یک طناب ۳۶ lb باشد.



شکل م ۹.۴

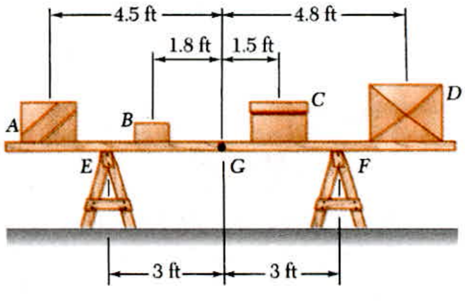
۱۰.۴ سه بار مطابق شکل روی تیر سبکی توسط کابلهای متصل در نقاط B و D نگهداری
می‌شوند. از وزن تیر چشم‌پوشی می‌شود. مطلوب است گستره مقادیر Q را به‌ازای وقتی که
$P =$ است کابل سست و شل نشود.



شکل م ۱۰.۴ و م ۱۱.۴

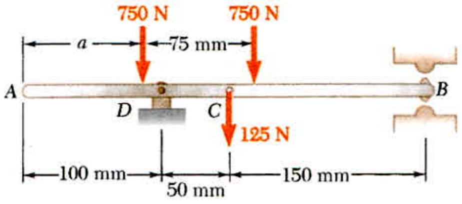
۱۱. سه بار مطابق شکل روی تیر سبکی توسط کابلهای متصل در نقاط B و D نگهداری
شوند. می‌دانیم که ماکزیمم کشش مجاز در هر کابل ۱۲ kN است و از وزن تیر چشم‌پوشی
شود. مطلوب است گستره مقادیر Q برای بارگذاری بدون خطر، وقتی $P = ۵\ kN$ باشد.

۱۲.۴ چهار جعبه روی یک تیرچوبی یکنواخت ۲۵-lb که روی دو خرک ساکن است، قرار
گرفته است. می‌دانیم وزن جعبه‌های B و D برابر ۹ lb و ۹۰ lb است. مطلوب است گستره
مقادیر وزن جعبه A را طوری که با برداشتن جعبه C تعادل برقرار باشد.



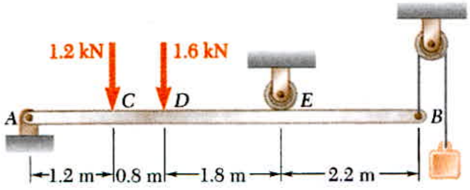
شکل م ۱۲.۴

۱۳.۴ برای تیر و بارگذاری نشان داده شده مطلوب است گستره مقادیر فاصله a را برای اینکه
عکس‌العمل در B از ۲۵۰ N به سمت پایین یا ۵۰۰ N به سمت بالا تجاوز نکند.



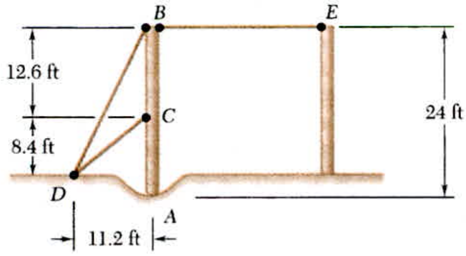
شکل م ۱۳.۴

۱۴.۴ برای بارهای وارد بر تیر AB، مطلوب است گستره مقادیر جرم تیر را برای اینکه سیستم
در حال تعادل باشد. می‌دانیم که ماکزیمم مقدار مجاز عکس‌العمل در هر تکیه‌گاه ۲٫۵ kN
است و عکس‌العمل در E باید به سمت پایین باشد.



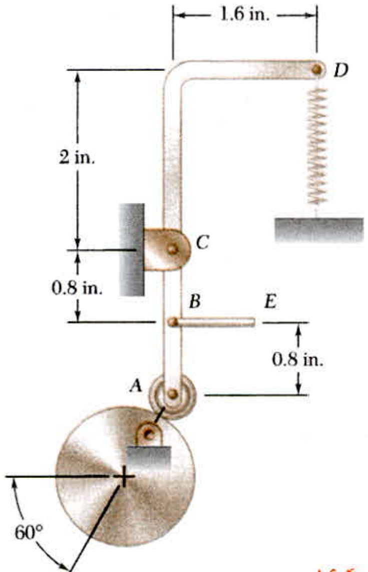
شکل م ۱۴.۴

۱۵.۴ ستون AB به طول ۲۴ ft در یک سوراخ جای داده شده است و توسط سه کابل مهار
می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل BD و BE به‌ترتیب برابر ۲۲۱ lb و ۱۶۱ lb است.
مطلوب است (الف) کشش در کابل CD، (ب) عکس‌العمل در A.



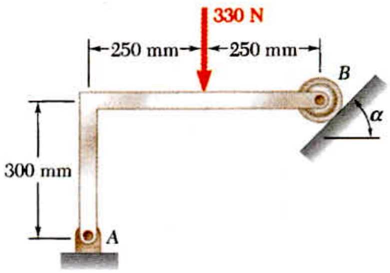
شکل م ۱۵.۴

۱۶.۴ اهرم $ABCD$ توسط فنر کشیده به بادامک دایروی فشرده شده است. نیروی فنر در
وضعیت نشان داده شده ۶ lb است. می‌دانیم کشش در میله BE برابر ۴ lb و در میله BE
برابر ۴ lb است. معین کنید (الف) نیروی وارد بر غلتک A، (ب) واکنش در تکیه‌گاه C.



شکل م ۱۶.۴

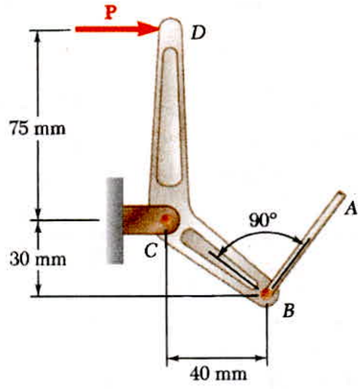
۱۷.۴ واکنش در A و B را وقتی (الف) $\alpha = 0$، (ب) $\alpha = 90°$، (ج) $\alpha = 30°$ است تعیین کنید.



شکل م ۱۷.۴

۱۸.۴ مسئله ۱۷.۴ را با فرض اینکه نیروی ۳۳۰ N را با کوپل ۸۲٫۵ N·m ساعتگرد عوض کنیم حل کنید.

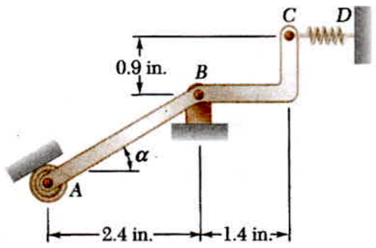
۱۹.۴ بازوی BCD در نقطه C لولا شده و در B به میله کنترل متصل است، اگر $P = 200$ باشد، معین کنید (الف) کشش در میله AB، (ب) واکنش در C.



شکل م ۱۹.۴ و م ۲۰.۴

۲۰.۴ بازوی BCD در نقطه C لولا شده و در B به میله کنترل متصل است اگر حداکثر مقدار مجاز عکس‌العمل در نقطهٔ C برابر ۵۰۰ N باشد، حداکثر نیروی P را که می‌توان با اطمینان در نقطه D وارد کرد به‌دست آورید.

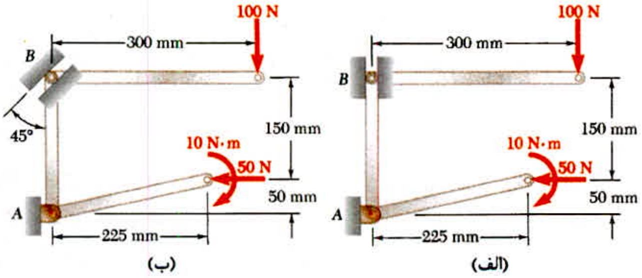
۲۱.۴ نیروی لازم برای وارد کردن در OA توسط بازوی ABC برابر ۳ lb است. می‌دانیم که $\alpha = 30°$ و اینکه فنر به اندازه ۱٫۲ in متراکم شده است. معین کنید (الف) ثابت k فنر، (ب) واکنش در B.



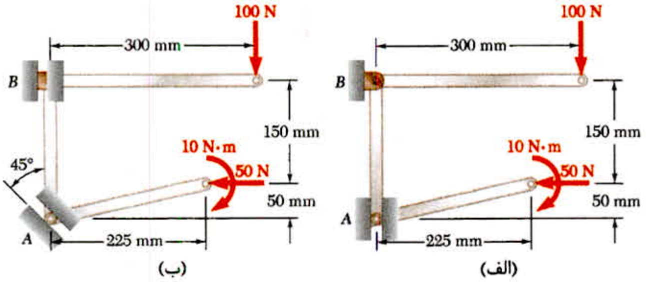
شکل م ۲۱.۴ و م ۲۲.۴

۲۲.۴ نیروی لازم برای وارد کردن در A توسط بازوی ABC برابر ۳٫۶ lb است. می‌دانیم که در نقطهٔ C فنر نیروی ۱۲ lb وارد می‌شود. معین کنید (الف) اندازه α، (ب) واکنش در B.

۲۳.۴ و ۲۴.۴ میله فولادی را خم کرده‌ایم تا به شکل دستک درآید. برای هر دستک نصب شده و بارگذاری نشان داده شده عکس‌العمل در A و B را به‌دست آورید.

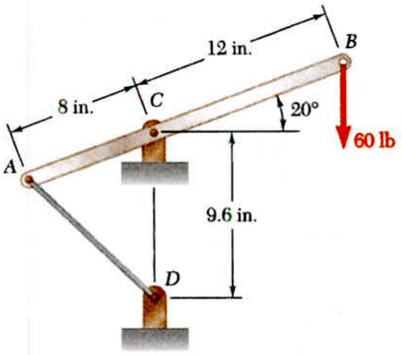


شکل م ۲۳.۴



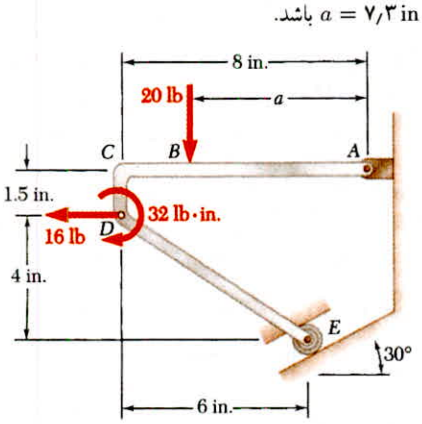
شکل م ۲۴.۴

۲۵.۴ بازوی AB در نقطهٔ C آویزان و در A به کابل کنترل متصل است. اگر بازو در B تحت تأثیر نیروی عمودی ۶۰ lb قرار گیرد، معین کنید (الف) کشش در کابل، (ب) واکنش در C.



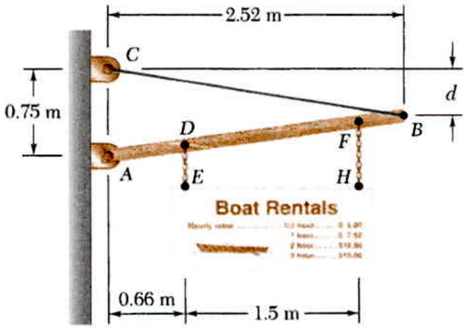
شکل م ۲۵.۴

۲۶.۴ برای قاب و بارگذاری نشان داده شده معین کنید واکنش در A و E را اگر (الف) $a = 2$ in، (ب) $a = 7.3$ in باشد.



شکل م ۲۶.۴

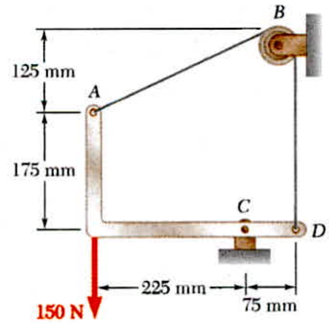
۲۷.۴ تابلوی آگهی را با دو زنجیر از دکل AB آویزان کرده‌ایم. دکل با تکیه‌گاه مفصلی A و کابل BC نگهداری می‌شود. می‌دانیم کشش دو زنجیرهای DE و FH به‌ترتیب برابر ۵۰ N و ۱۲۵ N و $d = 0.39$ mm است. معین کنید (الف) کشش در کابل BC، (ب) واک در A.



شکل م ۲۷.۴ و م ۲۸.۴

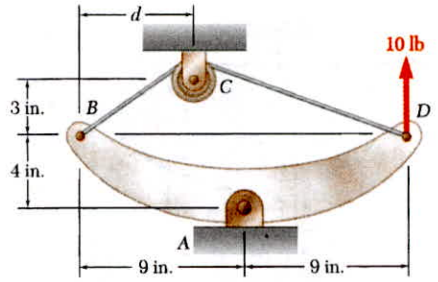
۲۸. تابلوی آگهی را با دو زنجیر از دکل AB آویزان کرده‌ایم. دکل با تکیه‌گاه مفصلی A و ل BC نگهداری می‌شود. اگر کشش در زنجیرهای DE و FH به‌ترتیب برابر ۱۳۵ N و ۹۰ N و $d = ۰٫۴۶۲$ mm باشد، معین کنید (الف) کشش در کابل BC، (ب) واکنش در A.

۲۹.۴ کشش در کابل ABC و واکنش در تکیه‌گاه C را تعیین کنید.



شکل م ۲۹.۴

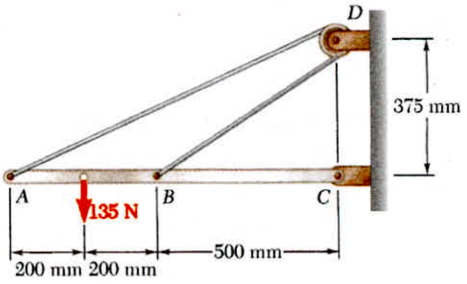
۳۰ با چشمپوشی از اصطکاک و شعاع قرقره، معین کنید کشش در کابل BCD، و واکنش تکیه‌گاه A را، اگر $d = ۴$ in باشد.



شکل م ۳۰.۴ و م ۳۱.۴

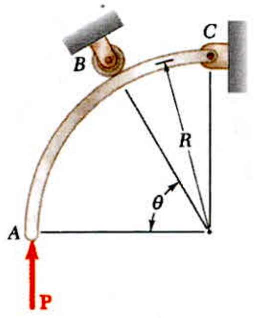
۳۱ با چشمپوشی از اصطکاک و شعاع قرقره، معین کنید کشش در کابل BCD و واکنش تکیه‌گاه A را، اگر $d = ۷٫۲$ in باشد.

۳۲.۴ از اصطکاک و شعاع قرقره چشمپوشی کنید و (الف) کشش در کابل ADB، (ب) واکنش در C را محاسبه کنید.



شکل م ۳۲.۴

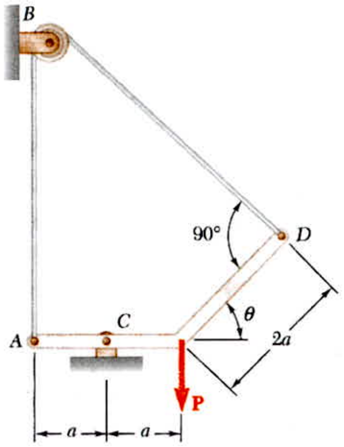
۳۳.۴ میلهٔ ABC به شکل قوس دایره به شعاع R خم شده است. معین کنید (الف) مقدار θ را برای اینکه بزرگی واکنش در B و C برابر باشند، (ب) واکنش متناظر در B و C.



شکل م ۳۳.۴ و م ۳۴.۴

۳۴.۴ میلهٔ ABC به شکل کمان دایره به شعاع R خم شده است. معین کنید (الف) مقدار θ را اگر مقدار واکنش در C حداقل باشد، (ب) واکنش متناظر در B و C.

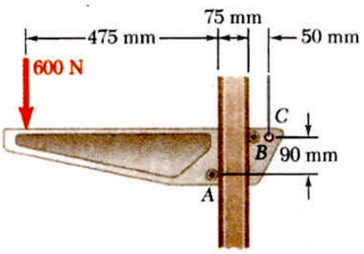
۳۵.۴ از اصطکاک چشمپوشی کنید و کشش در کابل ABD و واکنش در C را وقتی $\theta = ۴۰^\circ$ است به‌دست آورید.



شکل م ۳۵.۴ و م ۳۶.۴

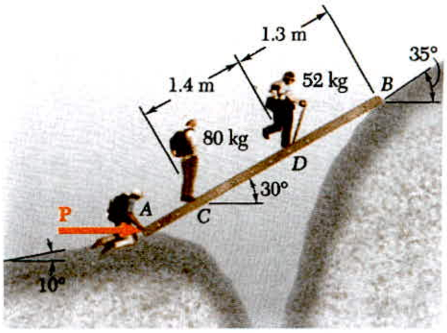
۳۶.۴ از اصطکاک چشمپوشی کنید و (الف) مقدار θ را وقتی کشش در کابل ABD برابر $۳P/۴$، (ب) واکنش متناظر در C باشد، به‌دست آورید.

۳۷.۴ دیوارکوب متحرک در حال سکون توسط یک کابل متصل به نقطه C و توسط غلتکهایی در A و B قرار گرفته است. برای بارگذاری نشان داده شده مطلوب است (الف) کشش در کابل، (ب) واکنشها در A و B.



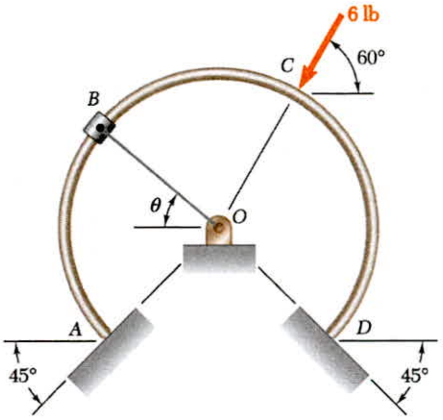
شکل م ۳۷.۴

۳۸.۴ برای بالا رفتن سه کوهنورد مطابق شکل نردبانی به طول ۳٫۵ m قرار می‌دهند. از اصطکاک نقاط A و B صرف‌نظر کنید. و می‌دانیم که کوهنورد A یک نیروی افقی **P** در انتهای نردبان وارد می‌کند. معین کنید (الف) واکنشها در A و B، (ب) نیروی **P** را.



شکل م ۳۸.۴

۳۹.۴ میله $ABCD$ را به شکل کمان دایره به شعاع ۴ in خم کرده‌اند و در برابر سطوح بدون اصطکاک در A و B ساکن قرار داده‌اند. می‌دانیم که طوقه در B می‌تواند آزادانه روی میله حرکت کند و $\theta = 45°$ است. معین کنید (الف) کشش در طناب B، (ب) واکنش در A و D.



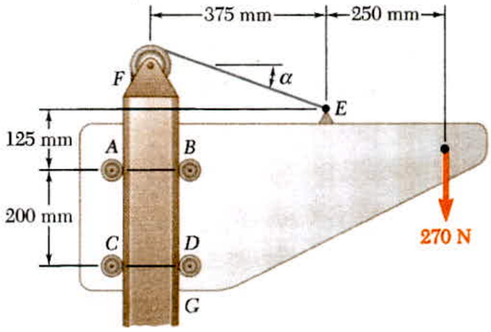
شکل م ۳۹.۴ و م ۴۰.۴

۴۰.۴ میلهٔ $ABCD$ را به شکل کمان دایره به شعاع ۴ in خم کرده‌اند و در برابر سطوح بدون اصطکاک در A و D قرار داده‌اند. می‌دانیم که طوقه در B می‌تواند آزادانه روی میله حرکت کند. معین کنید (الف) مقدار θ را در حالتی که کشش در طناب DB تا حد امکان کوچک باشد. (ب) مقدار متناظر کشش، (ج) واکنشهای در A و D.

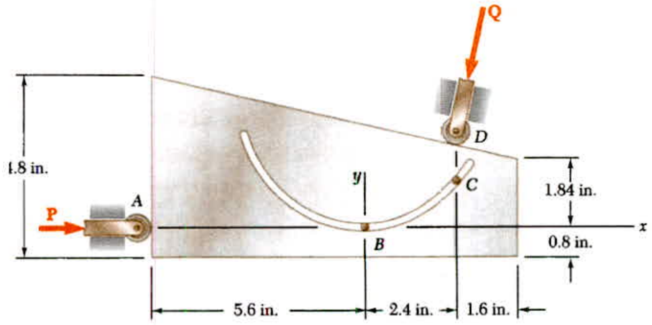
۴۱.۴ دیوارکوب متحرک توسط یک کابل در E و غلتکهای بدون اصطکاک ساکن است. می‌دانیم که عرض ستون FG کمی کمتر از فاصلهٔ بین غلتکها است. معین کنید نیروی وارد بر تیر توسط هر غلتک را وقتی $\alpha = 20°$ باشد.

۴۲.۴ مسئله ۴۱.۴ را وقتی $\alpha = 30°$ است حل کنید.

۴۳.۴ شکافی به‌صورت سهمی در صفحه AD بریده‌اند، و صفحه را طوری قرار داده‌اند که دو پین ثابت و بدون اصطکاک B و C در شکاف قرار دارند. معادله شکاف $y = x^2/4$ که در آن x و y برحسب اینچ است. اگر نیروی ورودی $P = 1\ \text{lb}$ باشد، مطلوب است (الف) نیرویی که هر پین بر صفحه وارد می‌کند، (ب) نیروی خروجی $\mathbf{Q}$.



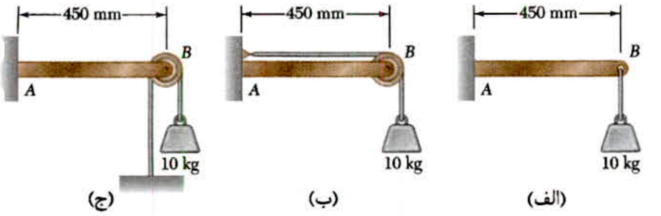
شکل م ۴۱.۴



شکل م ۴۳.۴ و م ۴۴.۴

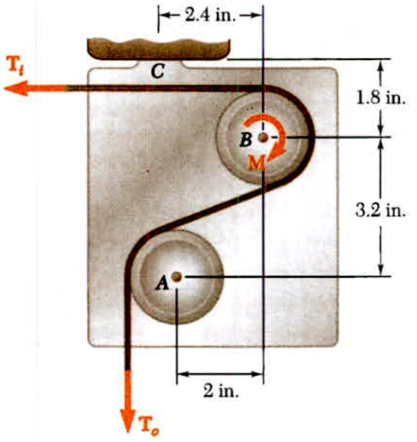
۴۴.۴ شکاف به‌صورت سهمی در صفحه AD بریده شده و صفحه را طوری قرار داده‌اند دو پین ثابت و بدون اصطکاک است. معادله شکاف $y = x^2/4$ که در آن x و y برحسب اینچ‌اند. اگر حداکثر نیروی مجاز وارد بر غلتک D برابر ۲ lb باشد، معین کنید (الف) مقا متناظر نیروی ورودی $\mathbf{P}$، (ب) نیروی وارد شده از هر پین بر ورق.

۴۵.۴ وزنه ۱۰-kg را می‌توان به شیوه گوناگون نشان داده شده نگهداری کرد. اگر شعاع قرقره‌ها ۱۰۰ mm باشد، معین کنید واکنش در A در هر حالت.



شکل م ۴۵.۴

۴۶.۴ تسمه‌ای از روی دو قرقره به قطر ۲ in که روی گیره‌ای، مطابق شکل، نصب شده است، می‌گذرد. می‌دانیم که $M = 0$ و $T_i = T_o = 12\ \text{lb}$ است. معین کنید واکنش در C.



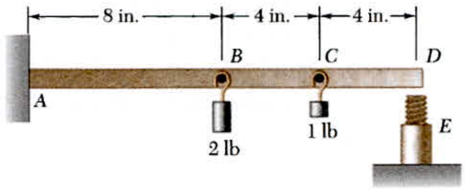
شکل م ۴۶.۴ و م ۴۷.۴

۴۷.۴ تسمه‌ای روی دو قرقره به قطر ۲ in که روی گیره‌ای، مطابق شکل، نصب شده ا می‌گذرد. اگر $M = 8\ \text{lb}\cdot\text{in}$ و T_i و T_o به‌ترتیب برابر ۱۶ lb و ۸ lb باشد، معین ک واکنش در نقطه C.

۴۸.۴ در آزمایشگاه تجربی دانشجویان وزنه نشان داده شده را از یک تیر که وزن آن ناچیز است آویزان کرده‌اند. (الف) معین کنید واکنش در تکیه‌گاه ثابت A، اگر انتهای D تیر نگهدار E تماس پیدا نکند، (ب) واکنش در تکیه‌گاه ثابت A را تعیین کنید، با دانستن اینکه تک E نیرویی به سمت بالا برابر ۱٫۲ lb بر تیر وارد می‌کند.

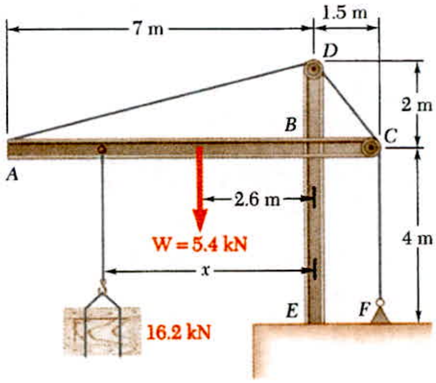
۴۹.۴ در آزمایشگاه تجربی دانشجویان وزنه نشان داده شده را از یک تیر که از وزن صرفنظر شده آویزان کرده‌اند. معین کنید گستره مقادیر نیروی وارد بر تیر توسط تکیه‌گاه قا

ظیم و تبدیل در نقطه E، برای اینکه مقدار کوپل در A از ۲۰ lb · in تجاوز نکند.



شکل م ۴۸.۴ و م ۴۹.۴

۵۰.۴ دستگاه نشان داده شده شامل عضو افقی ABC برابر ۵٫۴ kN و عضو قائم DBE ست و در B جوش داده شده است. از دستگاه برای بالا آوردن صندوق ۱۶٫۲-kN در صله $x = ۴٫۸$ m استفاده می‌شود. معین کنید عکس‌العمل در E، با فرض اینکه کابل الف) در F، مطابق شکل، لنگر انداخته (ب) متصل با عضو عمودی در نقطه‌ای ۰٫۴ m بالای E واقع باشد.

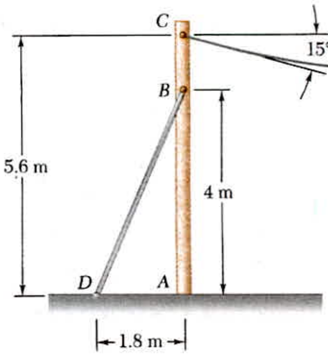


شکل م ۵۰.۴ و م ۵۱.۴

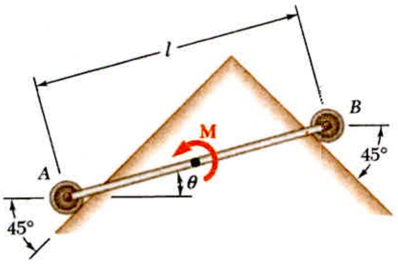
۵۱. دستگاه نشان داده شده شامل عضو افقی ABC برابر ۵٫۴ kN و عضو عمودی DB است که در B به هم جوش داده شده‌اند و برای بلند کردن صندوق ۱۶٫۲ kN به‌کار می‌رود. معین کنید (الف) کشش لازم در کابل $ADCF$، اگر ماکزیمم مقدار کوپل در E تا حد ممکن کوچک باشد، وقتی x از ۰٫۶ m تا ۰٫۷ m تغییر کند. (ب) مقدار ماکزیمم متناظر پل.

۵۲. ستون سودمند ۱۶۰-kg برای نگهداری در C، انتهای یک سیم برق به‌کار می‌رود. شش در سیم ۵۴۰ N است و سیم با افق در نقطه C زاویه ۱۵° تشکیل می‌دهد. معین کنید بیشترین و کمترین کشش مجاز در کابل مهار BD را اگر مقدار کوپل در نقطه A نتواند ر ۵۶۰ N · m تجاوز کند.

۵۳. میله یکنواخت AB به طول l و جرم m در صفحه‌ای قائم قرار دارد و بر آن کوپل **M** رد می‌شود. دو سر میله متصل به غلتکهایی است که در مقابل اصطکاک سطح ساکن‌اند. لف) زاویهٔ θ را متناظر تعادل برحسب M، m، g، و l بیان کنید. (ب) مقدار θ متناظر حالت تعادل را تعیین کنید، اگر $M = ۲٫۷$ N.m، $m = ۲$ kg، $l = ۰٫۸$ m باشد.

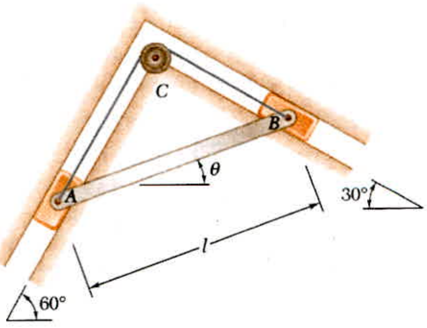


شکل م ۵۲.۴



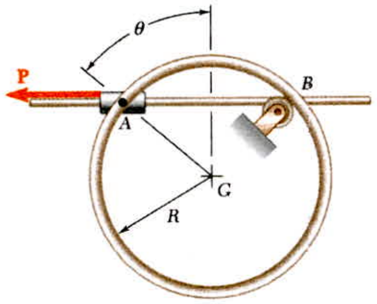
شکل م ۵۳.۴

۵۴.۴ میلهٔ AB به طول l و وزن ناچیز در صفحه قائم قرار دارد که با قطعات A و B پیچ شده‌اند. وزن هر قطعه W است، و قطعات توسط طناب کشسان از روی قرقره‌ای در نقطه C عبور می‌کنند. از اصطکاک بین قطعات و مسیر آنها صرف‌نظر می‌شود. معین کنید مقدار θ را برای اینکه کشش در طناب برابر با (الف) صفر، (ب) W باشد.



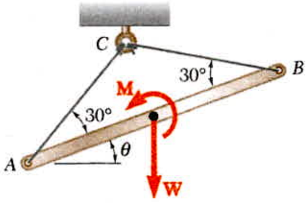
شکل م ۵۴.۴

۵۵.۴ حلقه نازک و یکنواخت به جرم m و شعاع R با پین بدون اصطکاک به طوقه AD متصل و روی غلتک کوچکی در نقطه B ساکن است. حلقه در صفحه قائم قرار دارد و طوقه می‌تواند آزادانه و بی‌اصطکاک روی میله افقی حرکت کند و تحت تأثیر نیروی افقی **P** قرار گیرد. (الف) زاویه θ متناظر با تعادل را برحسب m، g و P بیان کنید، (ب) مقدار θ متناظر با تعادل را وقتی $m = ۷۰۰$ g و $P = ۳$ N باشد، به‌دست آورید.



شکل م ۵۵.۴

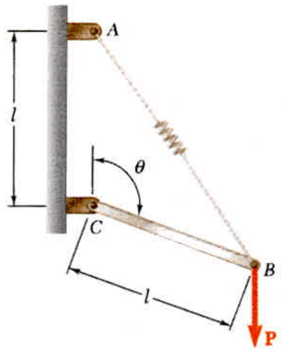
۵۶.۴ میله‌ای یکنواخت به طول ۱ m و جرم ۲ kg با دو طناب AC و BC آویزان شده است. معین کنید زاویه θ متناظر با وضعیت تعادل را، اگر کوپل **M** به بزرگی ۳ N · m بر میله وارد شود.



شکل م ۵۶.۴

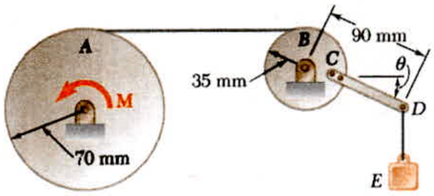
۵۷.۴ بار قائم **P** در انتهای B از میله BC وارد می‌شود. k ثابت فنر و فنر در حالت آزاد است،

وقتی $\theta = ۹۰°$. (الف) از وزن میله صرف‌نظر کنید، زاویهٔ θی متناظر را برای تعادل برحسب P، k، و l بیان کنید. (ب) مقدار θ متناظر با تعادل را وقتی $P = \frac{۱}{۴}kl$ است تعیین کنید.



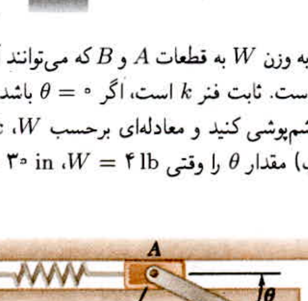
شکل م ۵۷.۴

۵۸.۴ کابل AB دور دو استوانه، مطابق شکل، پیچیده شده است. به استوانه A فنر پیچشی برای ایجاد $M = k\phi$ متصل کرده‌اند، در حالی که $k = ۵۸\,\text{N·m/rad}$ و ϕ زاویه چرخش برحسب رادیان است. می‌دانیم که جرم قطعه E برابر $۱۰\,\text{kg}$ و پیچش فنر آزاد است، وقتی $a = ۰$. معین کنید مقدار θی متناظر با تعادل.



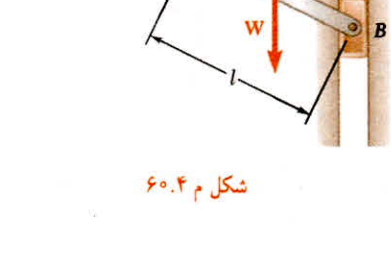
شکل م ۵۸.۴

۵۹.۴ بار قائم $\mathbf{P}$ در انتهای B از میله BC وارد می‌شود. k ثابت فنر است و وقتی $\theta = ۰$ فنر بدون تراکم است. (الف) از وزن میله صرف‌نظر کنید، زاویه θی متناظر با حالت تعادل را برحسب P، k، و l بیان کنید. (ب) مطلوب است مقدار θ متناظر با تعادل اگر $P = ۲kl$ باشد.



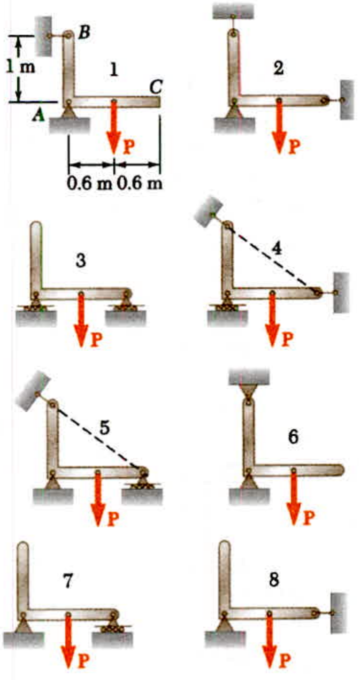
شکل م ۵۹.۴

۶۰.۴ میلهٔ باریک AB به وزن W به قطعات A و B که می‌توانند آزادانه در مسیر نشان داده شده حرکت کنند متصل است. ثابت فنر k است، اگر $\theta = ۰$ باشد فنر در حالت آزاد است. (الف) از وزن قطعات چشم‌پوشی کنید و معادله‌ای برحسب W، k، l و بنویسید که با میله در حالت تعادل باشد. (ب) مقدار θ را وقتی $W = ۴\,\text{lb}$، $l = ۳۰\,\text{in}$، و $k = ۱/۸\,\text{lb/ft}$ باشد، به‌دست آورید.



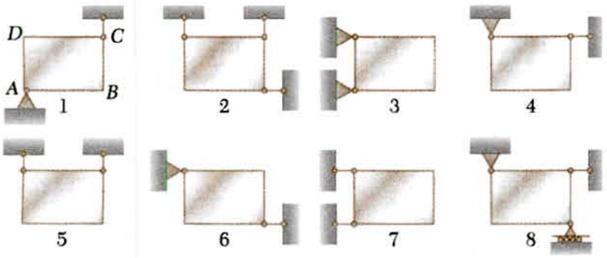
شکل م ۶۰.۴

۶۱.۴ گیره ABC را می‌توان به هشت شکل مختلف نگه داشت. تمام اتصالها از پینها بدون اصطکاک، غلتکها، یا رابطهای کوتاه تشکیل شده‌اند. معین کنید آیا (الف) صفحه به‌ط کامل مقید است، مقید ناقص است یا مقید نامناسب است. (ب) واکنش از نظر استاتیکی معین یا نامعین است، (ج) تعادل صفحه در وضع نشان داده شده برقرار است. اگر بزرگی نیر $\mathbf{P}$ برابر $۱۰۰\,\text{N}$ باشد عکس‌العملها را محاسبه کنید.



شکل م ۶۱.۴

۶۲.۴ هشت ورق مستطیلی به ابعاد $۳۰ \times ۲۰\,\text{in}$ هر یک به وزن $۵۰\,\text{lb}$ در صفحه قائم، مطابق شکل، نگهداری می‌شوند. تمام اتصالها از پینها، غلتکها، یا رابطهای کوتاه بدون اصطکا تشکیل شده است. برای هر حالت پرسشهای مسئلهٔ ۶۱.۴ را جواب دهید و هرجا که مم بود عکس‌العملها را حساب کنید.

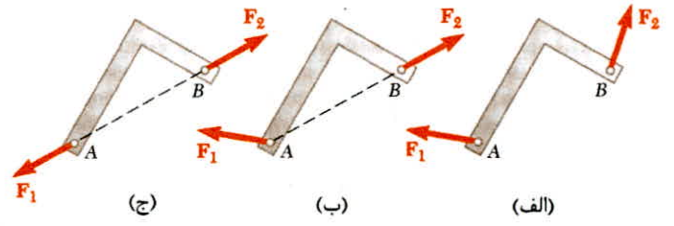


شکل م ۶۲.۴

۶.۴ تعادل جسم دونیرویی

یکی از موارد خاص و شایان ذکر تعادل اجسام، مورد جسم صلب تحت تأثیر دو ن است. چنین جسمی را معمولاً جسم دونیرویی می‌نامند. حالا نشان خواهیم داد که ا یک جسم دو نیرویی در حال تعادل باشد، دو نیرو باید بزرگی‌شان برابر، خط اثرهاشان یکسان، و جهتهاشان خلاف هم باشد.

ورقی مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت تأثیر دو نیروی $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ ق دارد که به‌ترتیب به نقطه‌های A و B وارد می‌شوند [شکل ۸.۴ (الف)]. اگر و در وضع تعادل باشد، جمع گشتاورهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ باید حول هر محور دلبخواه ص باشد. ابتدا جمع گشتاورها را حول A پیدا می‌کنیم. چون گشتاور نیروی $\mathbf{F}_۱$ قطعاً ص است، گشتاور نیروی $\mathbf{F}_۲$ هم باید صفر باشد و خط اثر $\mathbf{F}_۲$ باید از A بگذرد [شک



شکل ۸.۴

.۸ (ب)]. به همین ترتیب با جمع‌بستن گشتاورهای نیروها حول B ثابت می‌کنیم که
ط اثر $\mathbf{F}_۱$ باید از نقطهٔ B بگذرد [شکل ۸.۴ (ج)]. پس خط اثر دو نیرو یکسان است
خط AB). از معادلهٔ $\Sigma F_x = ۰$ یا $\Sigma F_y = ۰$ نتیجه می‌شود که بزرگی این نیروها
اید برابر و جهتهای آنها باید در خلاف هم باشد.

اگر به نقطه‌های A و B چندتا نیرو وارد بشود، به‌جای نیروهای وارد بر A می‌شود
برایندشان $\mathbf{F}_۱$، و به‌جای نیروهای وارد بر B برایندشان $\mathbf{F}_۲$ را قرار داد. پس در تعریف
ی‌تر جسم دونیرویی می‌توانیم بگوییم که جسم صلبی است که فقط به دو نقطهٔ آن
رو وارد بشود. بنابراین برایندهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ باید خط اثرهای یکسان، بزرگیهای برابر و
هتهای مخالف داشته باشند.

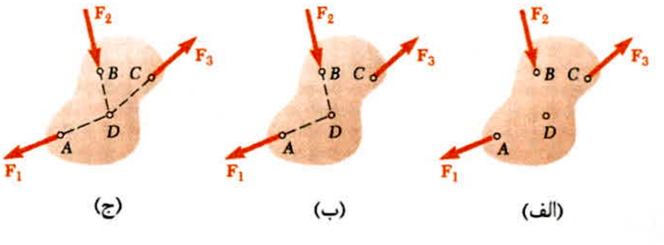
در مطالعهٔ سازه‌ها، قابها و ماشینها، خواهیم دید که تشخیص اجسام دونیرویی
حل بعضی از مسئله‌ها را آسان می‌کند.

۷.۱ تعادل جسم سه‌نیرویی

مورد دیگری از تعادل که بسیار مورد توجه قرار دارد تعادل جسم سه‌نیرویی است، یعنی
سم صلبی که تحت تأثیر سه نیرو قرار داشته باشد یا کلی‌تر بگوییم جسم صلبی
تنها به سه نقطهٔ آن نیرو وارد بشود. جسم صلبی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر
سیستم نیروهایی قرار دارد که بشود آنها را به سه نیروی $\mathbf{F}_۱$، $\mathbf{F}_۲$، و $\mathbf{F}_۳$ که به‌ترتیب به
A، B، و C وارد می‌شوند ساده کرد [شکل ۹.۴ (الف)]. می‌خواهیم نشان بدهیم که
اگر جسم در وضع تعادل باشد، خط اثرهای این سه نیرو باید همرس یا موازی باشند.

چون جسم صلب در حال تعادل است، جمع گشتاورهای $\mathbf{F}_۱$، $\mathbf{F}_۲$، و $\mathbf{F}_۳$ حول هر
حوری باید صفر باشد. فرض می‌کنیم که خط اثرهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ متقاطع‌اند، و نقطهٔ
اطعشان را D می‌نامیم، گشتاورهای آنها را حول D جمع می‌بندیم [شکل ۹.۴ (ب)].
ون گشتاورهای نیروهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ حول D صفرند، گشتاور $\mathbf{F}_۳$ هم حول نقطهٔ D
ید صفر باشد و خط اثر $\mathbf{F}_۳$ باید از نقطهٔ D بگذرد [شکل ۹.۴ (ج)]. بنابراین خط
اثرهای سه نیرو متقاطع‌اند، مگر اینکه اصلاً همدیگر را قطع نکنند، یعنی موازی باشند.

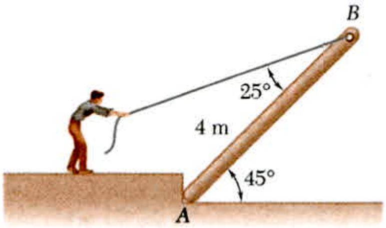
اگرچه مسئله‌های مربوط به اجسام سه نیرویی را می‌شود با روشهای عمومی یاد
سده در بخشهای ۳.۴ تا ۵.۴ حل کرد، اما خصوصیتی را هم که در اینجا بیان کردیم
ی‌توانیم برای حل آنها، به طریق ترسیمی یا به روش ریاضی، بااستفاده از روابط سادهٔ
ثلثاتی یا هندسی به کار ببریم.



شکل ۹.۴

مسئلهٔ نمونه ۶.۴

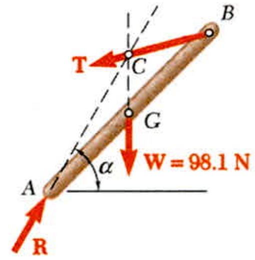
شخصی تیرچه ۱۰ کیلوگرمی به طول ۴ m را با کشیدن طناب، از روی زمین بلند می‌کند. کشش T در طناب و عکس‌العمل نقطهٔ A را پیدا کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. تیرچه جسمی سه‌نیرویی است، یعنی بر آن سه‌نیروی وزن $\mathbf{W}$، نیروی $\mathbf{T}$ از طرف طناب، وعکس‌العمل $\mathbf{R}$ زمین در A وارد می‌شود. می‌دانیم که

$$W = mg = (۱۰\ \text{kg})(۹{,}۸۱\ \text{m}/\text{s}^۲) = ۹۸{,}۱\ \text{N}$$



جسم سه‌نیرویی. چون تیرچه جسم سه‌نیرویی است، نیروهای وارد بر آن باید همرس باشند، بنابراین عکس‌العمل $\mathbf{R}$، از نقطهٔ C، یعنی محل تلاقی خط اثرهای وزن $\mathbf{W}$ و نیروی کشش $\mathbf{T}$ می‌گذرد. از این نکته می‌توان در تعیین زاویهٔ α که $\mathbf{R}$ با امتداد افق تشکیل می‌دهد استفاده کرد.

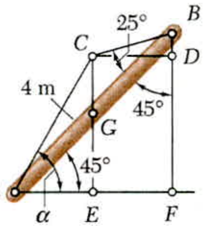
با رسم خط عمود BF از B و خط افقی CD از C، ملاحظه می‌کنیم که

$$AF = BF = (AB)\cos ۴۵° = (۴\ \text{m})\cos ۴۵° = ۲{,}۸۲۸\ \text{m}$$

$$CD = EF = AE = \frac{۱}{۲}(AF) = ۱{,}۴۱۴\ \text{m}$$

$$BD = (CD)\cot(۴۵° + ۲۵°) = (۱{,}۴۱۴\ \text{m})\tan ۲۰° = ۰{,}۵۱۵\ \text{m}$$

$$CE = DF = BF - BD = ۲{,}۸۲۸\ \text{m} - ۰{,}۵۱۵\ \text{m} = ۲{,}۳۱۳\ \text{m}$$



می‌نویسیم

$$\tan\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{۲{,}۳۱۳\ \text{m}}{۱{,}۴۱۴\ \text{m}} = ۱{,}۶۳۶$$

$$\alpha = ۵۸{,}۶° \quad ◀$$

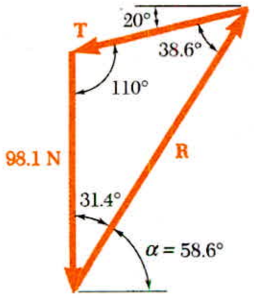
حالا راستای همهٔ نیروهای وارد بر تیرچه را می‌دانیم.

مثلث نیرو. مثلث نیرو مطابق شکل رسم می‌شود، و زاویه‌های داخلی آن با توجه به راستاهای معلوم نیروها به‌دست می‌آیند. با استفاده از قانون سینوسها، می‌نویسیم

$$\frac{T}{\sin ۳۱/۴^\circ} = \frac{R}{\sin ۱۱۰^\circ} = \frac{۹۸/۱\ \mathrm{N}}{\sin ۳۸/۶^\circ}$$

◄ $T = ۸۱/۹\ \mathrm{N}$

◄ $\mathbf{R} = ۱۴۷/۸\ \mathrm{N} \measuredangle ۵۸/۶^\circ$



چگونه مسئله حل کنیم

در بخشهای گذشته از دو مورد خاص تعادل جسم صلب صحبت کردیم.

۱. جسم دو نیرویی، جسمی است که فقط به دو نقطه‌اش نیرو وارد می‌شود. برایندهای نیروهایی که به هر یک از این نقاط وارد می‌شوند باید دارای بزرگی برابر، خط اثر یکسان و جهت مخالف هم باشند. این خاصیت به شما امکان می‌دهد که در بعضی از مسئله‌ها دو مؤلفهٔ مجهول یک عکس‌العمل را به یک تک‌نیروی با بزرگی مجهول و با راستای معلوم تبدیل کنید.

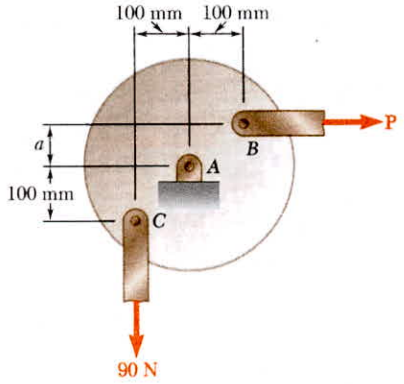
۲. جسم سه نیرویی، جسمی است که فقط به سه نقطه‌اش نیرو وارد می‌شود. برایندهای نیروهایی که به هر یک از این نقاط وارد می‌شوند باید همرس یا موازی باشند

برای حل مسئله شامل جسم سه نیرویی با نیروهای همرس، با رسم نمودار جسم آزاد، نشان بدهید که این سه نیرو از یک نقطه می‌گذرند. در این صورت ممکن است بتوانید با استفاده از روابط هندسی ساده، حل مسئله را به کمک مثلث نیروها کامل کنید.

اگرچه اصلی که در بالا برای حل مسئله‌های مربوط به اجسام سه نیرویی بیان کردیم به راحتی فهمیده می‌شود، اما ممکن است رسم شکل هندسی لازم مشکل باشد. اگر به مشکل برخوردید، ابتدا یک نمودار جسم آزاد در حد معقول بزرگ بکشید و بعد رابطه‌ای میان طولهای معلوم یا طولهایی را که به راحتی می‌شود به‌دست آورد و یک بعد مجهول پیدا کنید. در مسئله نمونهٔ ۶.۴ همین کار را کردیم: AE و CE را به راحتی محاسبه کردیم و با استفاده از آنها زاویهٔ α را به‌دست آوردیم.

مسئله‌ها

۶۳.۴ اتصالهای عمودی و افقی مطابق شکل، به یک چرخ متصل شده است و نیروهایی بر آنها وارد می‌شود. اگر $a = ۷۵\ \mathrm{mm}$ باشد بزرگی P و واکنش در A را به‌دست آورید.



شکل م ۶۳.۴ و م۶۴.۴

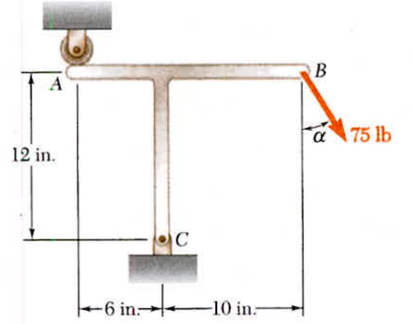
۶۴.۴ اتصالهای عمودی و افقی، مطابق شکل، به یک چرخ متصل شده است و نیروهایی بر آنها وارد می‌شود. معین کنید گستره مقادیر فاصله a را برای اینکه مقدار واکنش در A از $۱۸۰\ \mathrm{N}$ تجاوز نکند.

۶۵.۴ با استفاده از روش بخش ۷.۴ مسئله ۲۱.۴ را حل کنید.

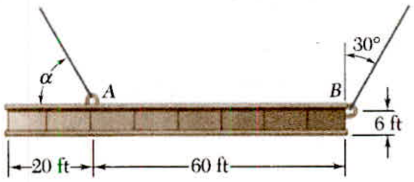
۶۶.۴ با استفاده از روش بخش ۷.۴ مسئله ۳۳.۴ را حل کنید.

۶۷.۴ شکل T بار ۷۵-lb را مطابق شکل نگه می‌دارد. معین کنید واکنشهای در A و C را وقتی (الف) $\alpha = ۹۰^\circ$، (ب) $\alpha = ۴۵^\circ$.

۶۸.۴ صفحه یکنواخت تیر حمال به وزن $۶۰۰۰\ \mathrm{lb}$ در وضع افقی توسط دو کابل مطابق شکل نگهداری می‌شود. معین کنید زاویه α و کشش در هر کابل را.



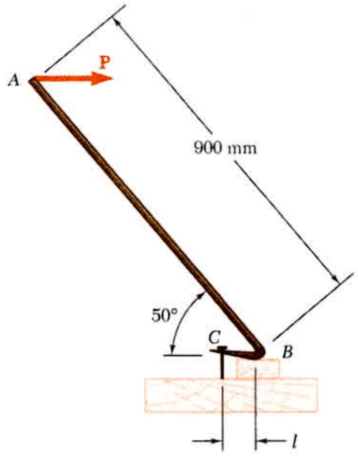
شکل م ۶۷.۴



شکل م ۶۸.۴

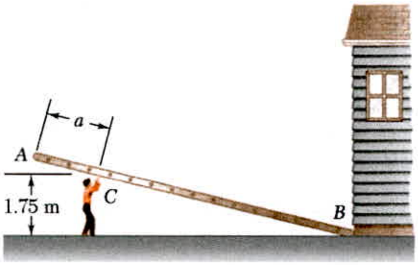
۶۹.۴ برای بیرون آوردن یک میخ، قطعه چوبی کوچکی را در زیر دیلمی قرار می‌دهیم و نیروی افقی $\mathbf{P}$ را مطابق شکل بر میخ وارد می‌کنیم. اگر $l = ۸۸\ \mathrm{mm}$ و $P = ۱۳۰\ \mathrm{N}$، معین کنید نیروی قائم وارد بر میخ و عکس‌العمل در B.

۷۰.۴ برای بیرون آوردن یک میخ، قطعه چوبی کوچکی را در زیر یک دیلمی قرار می‌دهیم و نیروی افقی $\mathbf{P}$ را مطابق شکل بر میخ وارد می‌کنیم. می‌دانیم که حداکثر نیروی قائم مورد نیاز وارد بر میخ $۲۶۰۰\ \mathrm{N}$ و نیروی افقی $\mathbf{P}$ نباید از $۲۹۰\ \mathrm{N}$ تجاوز کند. مطلوب است بیشترین مقدار قابل قبول فاصله l.



شکل م ۶۹.۴ و ۷۰.۴

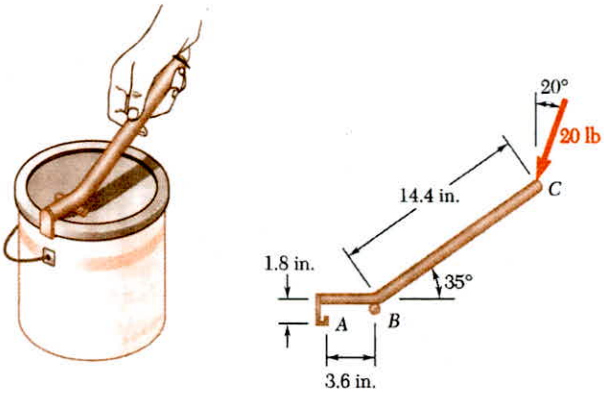
۷۱.۴ کارگری، مطابق شکل، در حال بالا بردن نردبانی به طول ۹٫۲ m و جرم ۵۳ kg است. می‌دانیم که $a = ۱٫۸$ m و نیروی وارد توسط کارگر عمود بر نردبان است. معین کنید (الف) نیروی وارد از طرف کارگر، (ب) واکنش در نقطه B.



شکل م ۷۱.۴ و م ۷۲.۴

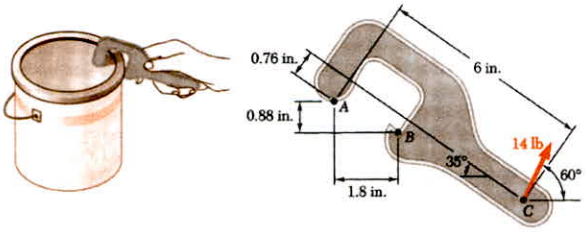
۷۲.۴ کارگری، مطابق شکل، در حال بالا بردن نردبانی به طول ۹٫۲ m و جرم ۵۳ kg است. می‌دانیم که نیروی وارد توسط کارگر عمود بر نردبان است. معین کنید (الف) کمترین مقدار a را برای اینکه مؤلفه قائم عکس‌العمل در B صفر باشد. (ب) نیروی متناظر وارد توسط کارگر.

۷۳.۴ برای برداشتن سرپوش از یک سطل ۵ گالنی از وسیله نشان داده شده استفاده می‌کنند و نیرویی رو به بالا و شعاعی رو به خارج بر لبه داخلی سطل وارد می‌کنند. اگر لبه در نقطه A به این وسیله تکیه داده و مطابق شکل نیروی ۲۰ -lb بر دسته وارد شود، نیروی وارد بر لبه را به‌دست آورید.



شکل م ۷۳.۴

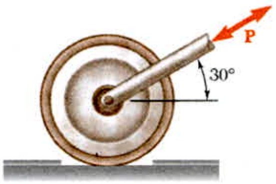
۷۴.۴ برای برداشتن سرپوش از یک سطل ۵ گالنی از ابزار نشان داده شده با به‌کار بردن نیرویی رو به بالا و نیروی شعاعی رو به خارج بر لبه داخلی در سطل استفاده شده است. با فرض اینکه قسمت بالایی و لبه در شکل، به‌ترتیب در نقاط A و B به این وسیله تکیه داده باشند و مطابق شکل نیروی ۱۴-lb بر دسته وارد کنند، نیروی وارد بر لبه را به‌دست آورید.



شکل م ۷۴.۴

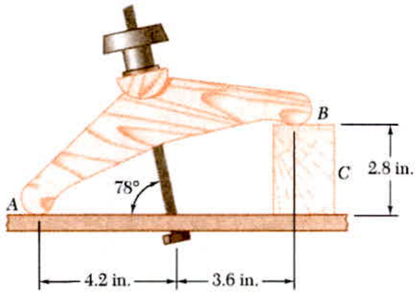
۷۵.۴ غلتک ۲۰-kg به قطر ۲۰۰ mm برای کف کاشی استفاده می‌شود و مطابق شکل به‌طور مستقیم روی زیرسازی قرار گرفته است. اگر ضخامت هر کاشی ۸ mm باشد، نیروی **P** لازم برای کشیدن غلتک روی کاشی را به‌دست آورید. غلتک به سمت چپ کشیده می‌شود.

۷۶.۴ غلتک ۲۰ kg بر قطر ۲۰۰ mm برای کف کاشی استفاده می‌شود و مطابق شکل به‌طور مستقیم روی زیرسازی قرار گرفته است. اگر ضخامت هر کاشی ۸ mm باشد، نیروی **P** لازم برای کشیدن غلتک روی کاشی را تعیین کنید. غلتک به سمت راست کشیده می‌شود.



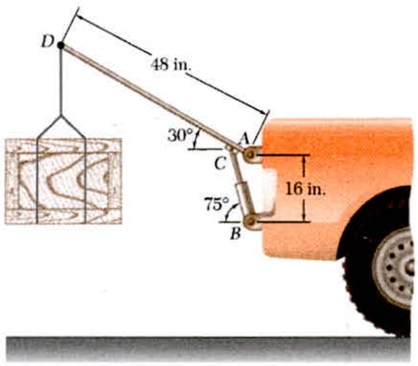
شکل م ۷۵.۴ و م ۷۶.۴

۷۷.۴ گیره نشان داده شده برای نگهداری قطعه ناصاف C به‌کار می‌رود. می‌دانیم که ماکزیمم نیروی فشار مجاز بر قطعه برابر ۴۰ lb است و از اثر اصطکاک صرف‌نظر می‌شود. معین کنید واکنش متناظر در B، (ب) واکنش در A، (ج) کشش در پیچ و مهره.



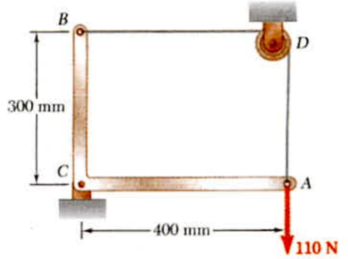
شکل م ۷۷.۴

۷۸.۴ بالابر کوچکی بر پشت یک کامیون نصب شده است و صندوق ۲۶۰ -lb را بالا می‌برد. مطلوب است نیروی وارد بر بالابر توسط سیلندر هیدرولیکی BC، (ب) واکنش در A.



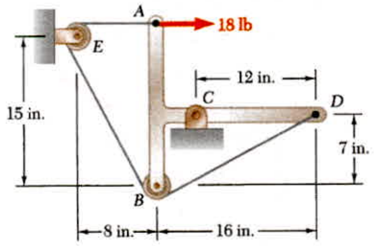
شکل م ۷۸.۴

۷۹.۴ عضو ACB به شکل L با یک پین و دیوارکوب در نقطه C نگهداری می‌شود و توسط طناب غیرقابل کشش متصل به نقاط A و B از روی قرقره بدون اصطکاک در D می‌گذرد. معین کنید کشش در طناب و واکنش در C را.



شکل م ۷۹.۴

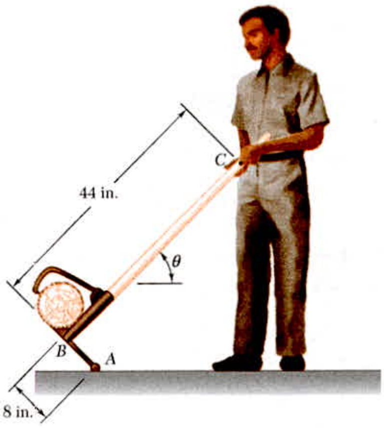
۸۰.۴ عضو $ABCD$ توسط پین و دیوارکوب در نقطه C نگهداری می‌شود و به وسیله طناب غیرقابل کشش متصل به نقاط A و D از روی قرقره بدون اصطکاک در نقاط B و E می‌گذرد. از اندازه قرقره‌ها چشم‌پوشی کنید. مطلوب است کشش در طناب و واکنش در C.



شکل م ۸۰.۴

۸۱.۴ برای بالا بردن تنه درختی به قطر ۸ in و وزن ۸۰ lb از اهرمی استفاده می‌شود. اگر $\theta = ۴۵^\circ$ و نیروی وارد بر C توسط کارگر بر بازوی اهرم عمود باشد، مطلوب است (الف) نیروی وارد بر C، (ب) واکنش در A.

۸۲.۴* برای بالا بردن تنه درختی به قطر ۸ in و وزن ۸۰ lb از اهرمی استفاده می‌شود. اگر $\theta = ۶۰^\circ$ و نیروی وارد بر نقطه C توسط کارگر بر بازوی اهرم عمود باشد، مطلوب است (الف) نیروی وارد بر C، (ب) واکنش در A.



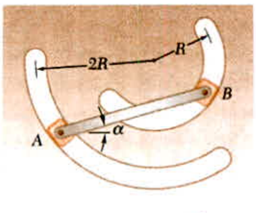
شکل م ۸۱.۴ و م ۸۲.۴

۸۳.۴ با استفاده از روش بخش ۷.۴ مسئله ۱۷.۴ (ج) را حل کنید.

۸۴.۴ با استفاده از روش بخش ۷.۴ مسئله ۲۵.۴ را حل کنید.

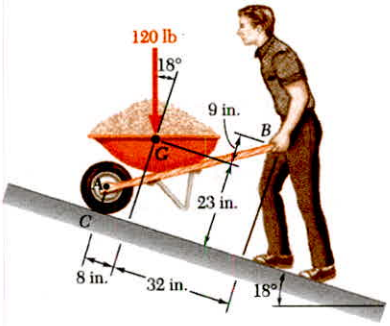
۸۵.۴ میله یکنواخت AB به جرم m و طول L به دو قطعه‌ای متصل است که می‌تواند آزادانه در شکافهای دایره‌ای، مطابق شکل، بلغزد. اگر میله در حالت تعادل و $L = ۲R$ باشد، مطلوب است (الف) زاویهٔ α را که میله با افق تشکیل می‌دهد. (ب) واکنش در A و B

۸۶.۴* میلهٔ یکنواخت AB به جرم m و طول L به دو قطعه‌ای متصل است که می‌تواند آزادانه در شکافهای دایره‌ای، مطابق شکل، بلغزد. اگر $\alpha = ۴۵^\circ$ باشد، مطلوب است (الف) بیشترین مقدار L را برای اینکه میله در تعادل باشد. (ب) واکنش متناظر در A و B.



شکل م ۸۵.۴ و م ۸۶.۴

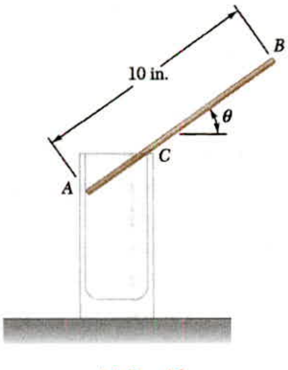
۸۷.۴ وزن کل یک چرخ‌دستی پر از بار ۱۲۰ lb است. اگر چرخ با زاویه مایل ۱۸° در وضع نشان داده شده نگهداری شود، مطلوب است بزرگی و راستای (الف) نیروی وارد توسط کارگر بر هر دسته چرخ، (ب) واکنش در C. (راهنمایی: چرخ یک جسم دو نیرویی است)



شکل م ۸۷.۴

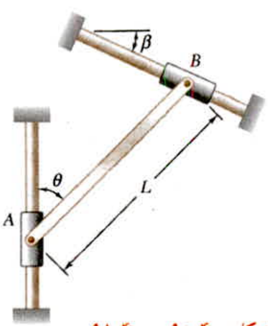
۸۸.۴ مسئله ۸۷.۴ را بافرض اینکه شیب زاویه چرخ ۱۸° به سمت پایین باشد حل کنید.

۸۹.۴ میله باریک یکنواختی به طول ۱۰ in، و وزن ۰٫۰۱ lb روی لیوانی، به قطر داخلی ۲٫۸ in به حالت تراز است. از اصطکاک صرف‌نظر می‌شود. معین کنید زاویه θ متناظر تعادل را.



شکل م ۸۹.۴

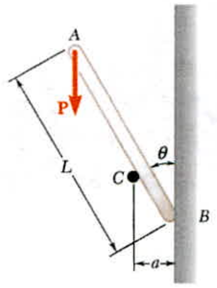
۹۰.۴ میله باریکی به طول L و وزن W به طوقه‌هایی متصل است که می‌تواند در امتداد نشان داده شده هدایت شود. می‌دانیم که میله در حالت تعادل است، رابطه بیان کننده‌ای برای زاویه θ برحسب زاویه β به‌دست آورید.



شکل م ۹۰.۴ و م ۹۱.۴

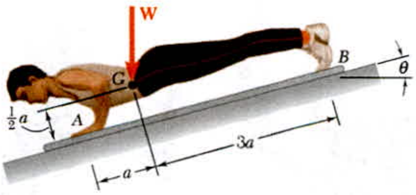
۹۱.۴ میله باریک ۱۰ -kg به طول L به طوقه‌هایی متصل است که می‌تواند آزادانه در امتداد نشان داده شده هدایت شود. می‌دانیم که میله در وضع تعادل و $\beta = ۲۵^\circ$ است، مطلوب است (الف) زاویه θ که میله با قطعه عمود تشکیل می‌دهد. (ب) واکنش در A و B.

۹۲.۴ میله باریکی به طول L بین گل‌میخ C و دیوار قائم است، و بار $\mathbf{P}$ را در انتهای A نگه می‌دارد. از اصطکاک و وزن میله صرف‌نظر می‌شود. مطلوب است زاویه θ متناظر تعادل.



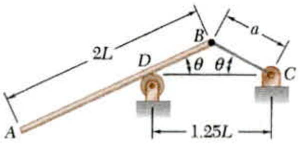
شکل م ۹۲.۴

۹۳.۴ ورزش‌کاری مطابق شکل روی تخته شیب‌داری، پایین و بالا می‌رود. از اصطکاک بین کفشها و تخته صرف‌نظر می‌شود. مطلوب است مقدار θ را اگر بخواهد مقدار کل نیروی وارد بر دستهایش ۸۰ درصد وزنش شود.



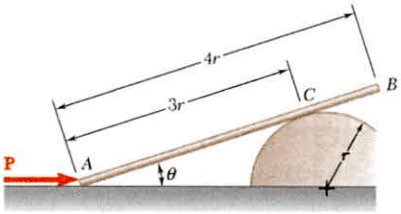
شکل م ۹۳.۴

۹۴.۴ میله باریکی به طول $2L$ و وزن W روی یک چرخک در D ساکن و در وضع تعادل نشان داده شده، توسط یک طناب به طول a قرارگرفته است. می‌دانیم که $L = 8\text{ in}$، مطلوب است (الف) زاویه θ، (ب) طول a.



شکل م ۹۴.۴

۹۵.۴ میله باریکی به جرم m و طول $4r$ روی سطح نشان داده شده ساکن است و توسط نیروی $\mathbf{P}$ در وضع تعادل قرار دارد. از اثر اصطکاک در A و C صرف‌نظر شود. (الف) معین کنید زاویه θ، (ب) رابطه‌ای برای P برحسب m و g به‌دست آورید.



شکل م ۹۵.۴

تعادل در سه بعد

۸.۴ تعادل جسم صلب در سه بعد

در بخش ۱.۴ دیدیم که برای بیان شرایط تعادل جسم صلب در حالت کلی سه‌بعدی به شش معادلهٔ اسکالر نیاز داریم

$$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{۲.۴}$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{۳.۴}$$

این معادله‌ها را برای بیش از شش مجهول نمی‌شود حل کرد، که عموماً نمایندهٔ عکس‌العملها در تکیه‌گاهها یا اتصالها هستند.

در بیشتر مسئله‌ها، معادله‌های اسکالر (۲.۴) و (۳.۴) با سهولت بیشتری به‌دست می‌آیند، اگر ابتدا شرایط تعادل جسم صلب مورد نظر را به شکل برداری بیان کنیم، می‌نویسیم

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = 0 \tag{۱.۴}$$

و نیروهای $\mathbf{F}$ و بردار مکانهای $\mathbf{r}$ را برحسب مؤلفه‌های اسکالر و بردارهای یکه بیان می‌کنیم. سپس همهٔ ضربهای برداری را به روش مستقیم یا با استفاده از دترمینان محاسبه می‌کنیم (نگاه کنید به بخش ۸.۳). مشاهده می‌کنیم که هر سه مؤلفهٔ مجهول عکس‌العملها را می‌توان با انتخاب مناسب نقطهٔ O از محاسبات حذف کرد. با مساوی صفر قراردادن ضریبهای بردارهای یکه در هر دو رابطهٔ (۱.۴) معادله‌های اسکالر مطلوب را به‌دست می‌آوریم.[۱]

۹.۴ عکس‌العملها در تکیه‌گاهها و اتصالهای سازه‌های سه‌بعدی

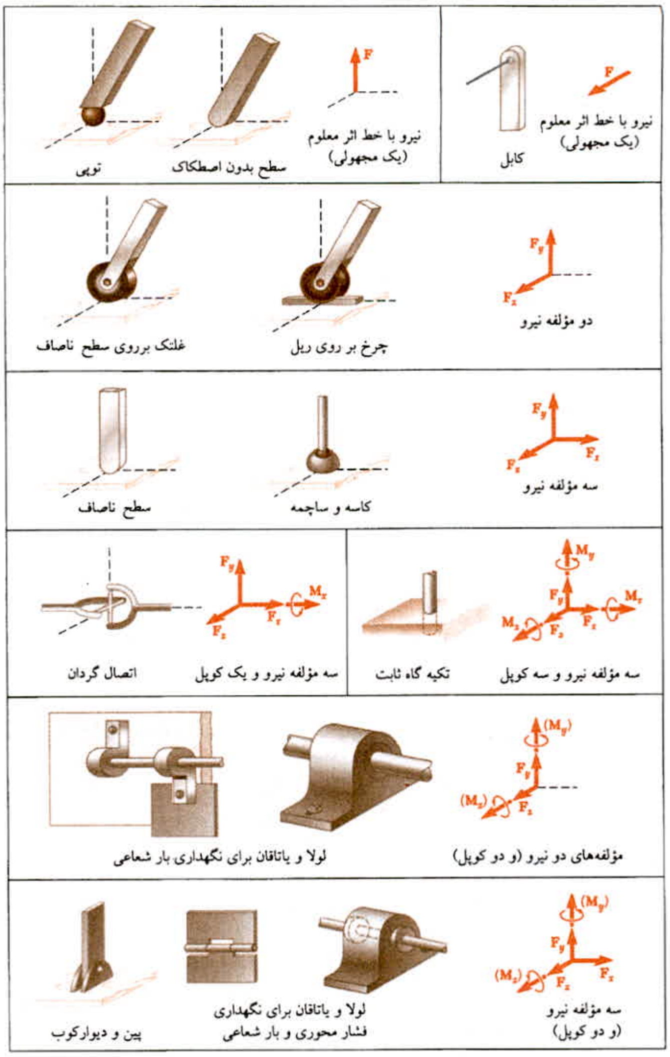
در سازه‌های سه‌بعدی عکس‌العملها متفاوت‌اند، از یک تک‌نیروی با راستای معلوم وارد از یک سطح بدون اصطکاک گرفته تا سیستم کوپل-نیروی وارد از یک تکیه‌گاه ثابت. در نتیجه، در مسئله‌های مربوط به تعادل سازه‌های سه‌بعدی تعداد مجهولها بسته به عکس‌العمل هر تکیه‌گاه یا اتصال ممکن است از یک تا شش مجهول تغییر کند. انواع مختلف تکیه‌گاهها واتصالها، و عکس‌العملهای متناظر آنها در شکل ۱۰.۴ نشان داده شده است. یک راه ساده برای تعیین نوع عکس‌العمل متناظر با یک تکیه‌گاه یا اتصال معین و تعداد مجهولها، این است که ببینیم از شش حرکت اصلی (انتقال در امتدادهای x، y، و z و دوران حول محورهای x، y، و z) کدامها مجازند و ازکدام حرکتها جلوگیری می‌شود.

مثلاً تکیه‌گاههای توپی، سطوح بدون اصطکاک و کابلها تنها در یک امتداد از انتقال جلوگیری می‌کنند و بنابراین، تک‌نیرویی با خط اثر معلوم وارد می‌کنند؛ هریک از این تکیه‌گاهها شامل یک مجهول‌اند، که همان بزرگی عکس‌العمل است. غلتکهای واقع بر روی سطوح ناصاف و چرخهای واقع بر روی ریلها، از انتقال در دو امتداد جلوگیری می‌کنند، عکس‌العملهای متناظر آنها شامل دو مؤلفهٔ نیروی مجهول‌اند. سطوح ناصافِ در تماسِ مستقیم و مفصلهای توپی از انتقال در سه امتداد جلوگیری می‌کنند، این تکیه‌گاهها شامل سه مؤلفهٔ نیروی مجهول‌اند.

بعضی تکیه‌گاهها و اتصالها می‌توانند علاوه بر انتقال، از دوران هم جلوگیری کنند؛ عکس‌العملهای متناظر این قبیل تکیه‌گاهها و اتصالها شامل کوپلها و نیروها هستند. مثلاً عکس‌العمل در تکیه‌گاه ثابت، که از هر حرکتی (اعم از دوران و انتقال) جلوگیری می‌کند، شامل سه نیرو و سه کوپل مجهول است. اتصال گاردان، که طوری طراحی شده که دوران در امتداد دو محور را ممکن کند، عکس‌العملی ایجاد می‌کند که شامل سه مؤلفهٔ نیروی مجهول و یک کوپل مجهول است.

سایر تکیه‌گاهها و اتصالها اصولاً به‌منظور جلوگیری از انتقال طراحی می‌شوند، ولی البته جلو بعضی دورانها را هم می‌گیرند. عکس‌العملهای متناظر آنها الزاماً شامل مؤلفه‌های نیرو هستند، اما ممکن است شامل کوپل هم باشند. یک دسته از این نوع تکیه‌گاهها، شامل لولاها و یاتاقانهایی هستند که تنها برای تحمل بارهای شعاعی طراحی شده‌اند (مثلاً یاتاقانهای محوری و یاتاقانهای فشنگی). عکس‌العملهای متناظر شامل دو مؤلفهٔ نیرو هستند و البته ممکن است شامل دو کوپل هم باشند. دستهٔ

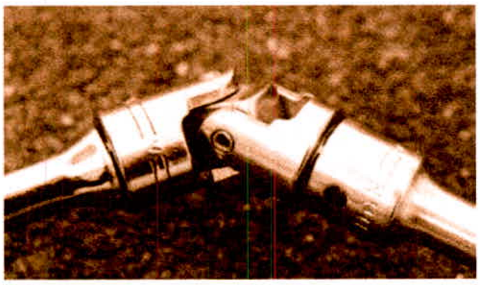
۱. در بعضی مسئله‌ها، حذف عکس‌العملها در دو نقطهٔ A و B آسانتر خواهد شد، اگر معادلهٔ تعادل $\Sigma M_{AB} = 0$ را، که شامل تعیین گشتاور نیروها حول محور AB (که نقاط A و B را به‌هم وصل می‌کند) است، نوشته و حل کنید (نگاه کنید به مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰.۴).



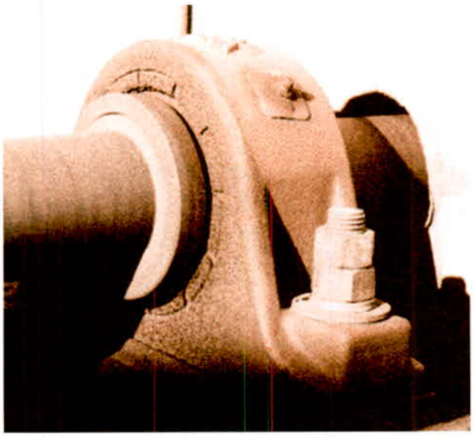
شکل ۱۰.۴ عکس‌العمل در تکیه‌گاهها و اتصالها.

دیگر شامل تکیه‌گاههای پین و پایه، لولاها و یاتاقانهایی هستند که برای تحمل نیروی محوری و نیز بار شعاعی (مثلاً بلبرینگها) طراحی شده‌اند. عکس‌العملهای متناظر آنها شامل سه مؤلفهٔ نیرو هستند، اما ممکن است شامل دو کوپل هم باشند. اما، این تکیه‌گاهها در شرایط کاربرد عادی کوپل قابل ملاحظه‌ای وارد نخواهند کرد. بنابراین تنها مؤلفه‌های نیرو را باید در تحلیل منظور کرد، مگر اینکه معلوم شود که کوپلها برای برقراری تعادل جسم صلب ضروری‌اند، یا معلوم شود که تکیه‌گاه مخصوصاً برای واردکردن یک کوپل طراحی شده است (نگاه کنید به مسئله‌های ۱۲۸.۴ تا ۱۳۱.۴).

اگر عکس‌العملها بیش از شش مجهول داشته باشند، تعداد مجهولها از تعداد معادله‌ها بیشتر است، و بعضی از عکس‌العملها از لحاظ استاتیکی نامعین‌اند. اگر عکس‌العملها کمتر از شش مجهول داشته باشند، تعداد مجهولها کمتر از تعداد معادله‌هاست و بعضی از معادله‌های تعادل در شرایط کلی بارگذاری برقرار نمی‌شوند؛ جسم صلب فقط به‌طور ناقص مقید شده است. اما در شرایط بارگذاری عمومی مربوط به یک مسئله معین، معادله‌های اضافی اغلب به اتحادهایی مانند $0 = 0$ خلاصه می‌شوند و می‌شود از آنها چشمپوشی کرد؛ جسم صلب اگرچه به‌طور ناقص مقید شده است، اما متعادل باقی می‌ماند (نگاه کنید به مسئله‌های نمونهٔ ۷.۴ و ۸.۴). حتی با شش مجهول یا



عکس ۶.۴ قفل گاردان که روی محورهای گردان یا در چرخهای عقب کامیونها به‌کار می‌رود، باعث انتقال حرکت چرخشی بین دو محور غیرهم‌خط می‌شود.

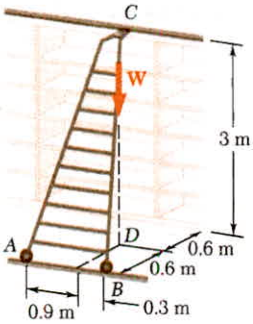


عکس ۷.۴ در یک کارخانهٔ ریخته‌گری از یاتاقان بلبرینگ نشان داده شده برای نگهداری محور بادبزن تهویه استفاده شده است.

بیشتر هم ممکن است که در بعضی از معادله‌های تعادل برقرار نشود. این حالت وقتی می‌تواند اتفاق بیفتد که عکس‌العملهای وابسته به تکیه‌گاهها یا موازی باشند یا یک خط را قطع کنند. در این صورت جسم صلب به‌طور نامناسب مقید شده است.

مسئلهٔ نمونه ۷.۴

برای رسیدن به قفسه‌های بالای یک انبار از یک نردبان ۲۰ کیلوگرمی استفاده می‌شود. نردبان توسط دو چرخ لبه‌دار A و B که بر روی ریل حرکت می‌کنند و یک چرخ بدون لبهٔ C که بر روی ریل ثابتی روی دیوار قرارگرفته، نگهداری می‌شود. مردی ۸۰ کیلوگرمی روی نردبان و متمایل به‌طرف راست ایستاده است. خط اثر مجموع نیروی وزن مرد و وزن نردبان، یعنی $\mathbf{W}$، سطح زمین را در نقطهٔ D قطع می‌کند. مؤلفه‌های عکس‌العمل را در A، B، و C تعیین کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد نردبان را رسم می‌کنیم. نیروها عبارت‌اند از وزن شخص و نردبان

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(۸۰\ \text{kg}+۲۰\ \text{kg})(۹/۸۱\ \text{m/s}^۲)\mathbf{j} = -(۹۸۱\ \text{N})\mathbf{j}$$

و پنج مؤلفهٔ مجهول عکس‌العمل، دوتا در هریک از چرخهای لبه‌دار و یکی در چرخ بدون لبه. بنابراین نردبان به‌طور ناقص مقید شده است؛ یعنی می‌تواند آزادانه در امتداد ریلها حرکت کند. با وجود این نردبان تحت این بارگذاری در حال تعادل است، چون معادلهٔ $\Sigma F_x = ۰$ برقرار است.

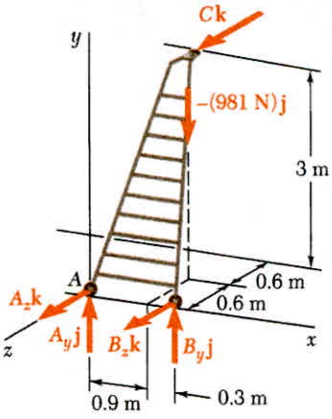
معادله‌های تعادل. می‌گوییم که نیروهای وارد بر نردبان سیستمی معادل با صفر تشکیل می‌دهند:

$$\Sigma\mathbf{F} = ۰: \quad A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} - (۹۸۱\ \text{N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = ۰$$

$$(A_y + B_y - ۹۸۱\ \text{N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = ۰ \qquad (۱)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = ۰: \quad ۱/۲\mathbf{i}\times(B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) + (۰/۹\mathbf{i} - ۰/۶\mathbf{k})$$

$$\times(-۹۸۱\mathbf{j}) + (۰/۶\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۱/۲\mathbf{k})\times C\mathbf{k} = ۰$$



با محاسبهٔ ضربهای برداری داریم[1]

$$۱/۲B_y\mathbf{k} - ۱/۲B_z\mathbf{j} - ۸۸۲/۹\mathbf{k} - ۵۸۸/۶\mathbf{i} - ۰/۶C\mathbf{j} + ۳C\mathbf{i} = ۰$$

$$(۳C - ۵۸۸/۶)\mathbf{i} - (۱/۲B_z + ۰/۶C)\mathbf{j} + (۱/۲B_y - ۸۸۲/۹)\mathbf{k} = ۰ \qquad (۲)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریبهای **i**، **j**، و **k** در معادلهٔ (۲)، سه معادلهٔ اسکالر زیر را به‌دست می‌آوریم، که می‌گویند که جمع گشتاورها حول هریک از محورهای مختصات باید صفر باشد:

$$۳C - ۵۸۸/۶ = ۰ \qquad C = +۱۹۶/۲\ \text{N}$$

$$۱/۲B_z + ۰/۶C = ۰ \qquad B_z = -۹۸/۱\ \text{N}$$

$$۱/۲B_y - ۸۸۲/۹ = ۰ \qquad B_y = +۷۳۶\ \text{N}$$

۱. گشتاورها را در این مسئله و در مسئله‌های نمونهٔ ۸.۴ و ۹.۴ به‌صورت دترمینان هم می‌شود نوشت (نگاه کنید به مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰.۳).

بنابراین عکس‌العملها در B و C چنین‌اند

◄ $\mathbf{B} = +(۷۳۶\ \text{N})\mathbf{j} - (۹۸/۱\ \text{N})\mathbf{k} \qquad \mathbf{C} = +(۱۹۶/۲\ \text{N})\mathbf{k}$

با مساوی صفر قراردادن ضریبهای **j** و **k** در معادلهٔ (۱)، دو معادلهٔ اسکالر به‌دست می‌آوریم که می‌گویند مجموع مؤلفه‌ها در راستاهای y و z صفر است. اگر به‌جای B_y، B_z، و C مقادیر بالا را قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$A_y + B_y - ۹۸۱ = ۰ \quad A_y + ۷۳۶ - ۹۸۱ = ۰ \quad A_y = +۲۴۵\ \text{N}$$

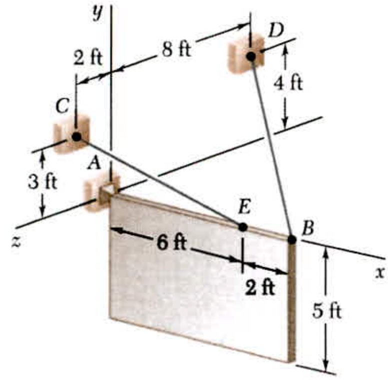
$$A_z + B_z + C = ۰ \quad A_z - ۹۸/۱ + ۱۹۶/۲ = ۰ \quad A_z = -۹۸/۱\ \text{N}$$

نتیجه می‌گیریم که عکس‌العمل در A برابر است با

◄ $\mathbf{A} = +(۲۴۵\ \text{N})\mathbf{j} - (۹۸/۱\ \text{N})\mathbf{k}$

مسئلهٔ نمونه ۸.۴

یک تابلوی ۲۷۰ lb به ابعاد ۸ ft × ۵ و چگالی یکنواخت توسط یک مفصل توپی در A و دو تا کابل نگه داشته شده است. کشش در هر کابل و عکس‌العمل در A را محاسبه کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد تابلو را رسم می‌کنیم. نیروهای وارد بر جسم آزاد عبارت‌اند از $\mathbf{W} = -(۲۷۰\ \text{lb})\mathbf{j}$ و عکس‌العملها در A، B، و E. عکس‌العمل در A نیرویی است با راستای مجهول که با سه مؤلفهٔ مجهول نشان داده می‌شود. چون راستای نیروهای ناشی از کابلها معلوم است، هریک از این نیروها فقط یک مجهول دارند، که همان مقادیر T_{BD} و T_{EC} است. چون فقط پنج تا مجهول داریم، تابلو به‌طور ناقص مقید شده است. یعنی می‌تواند آزادانه حول محور x بچرخد؛ با وجود این تحت بارگذاری مفروض در حال تعادل است، چون معادلهٔ $\Sigma M_x = ۰$ برقرار است.

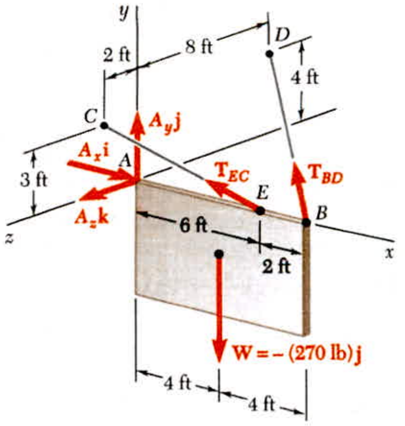
مؤلفه‌های نیروهای $\mathbf{T}_{BD}$ و $\mathbf{T}_{EC}$ را می‌توانیم با نوشتن عبارتهای زیر برحسب مجهولهای T_{BD} و T_{EC} بیان کنیم:

$$\overrightarrow{BD} = -(۸\ \text{ft})\mathbf{i} + (۴\ \text{ft})\mathbf{j} - (۸\ \text{ft})\mathbf{k} \qquad BD = ۱۲\ \text{ft}$$

$$\overrightarrow{EC} = -(۶\ \text{ft})\mathbf{i} + (۳\ \text{ft})\mathbf{j} + (۲\ \text{ft})\mathbf{k} \qquad EC = ۷\ \text{ft}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}\left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD}\right) = T_{BD}\left(-\frac{۲}{۳}\mathbf{i} + \frac{۱}{۳}\mathbf{j} - \frac{۲}{۳}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC}\left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC}\right) = T_{EC}\left(-\frac{۶}{۷}\mathbf{i} + \frac{۳}{۷}\mathbf{j} + \frac{۲}{۷}\mathbf{k}\right)$$



معادله‌های تعادل. می‌گوییم که نیروهای وارد بر تابلو سیستمی معادل با صفر تشکیل می‌دهند.

$$\Sigma \mathbf{F} = ۰: \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (۲۷۰\ \text{lb})\mathbf{j} = ۰$$

$$(A_x - \frac{۲}{۳}T_{BD} - \frac{۶}{۷}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \frac{۱}{۳}T_{BD} + \frac{۳}{۷}T_{EC} - ۲۷۰\ \text{lb})\mathbf{j} + (A_z - \frac{۲}{۳}T_{BD} + \frac{۲}{۷}T_{EC})\mathbf{k} = ۰ \quad (۱)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = ۰: (۸\ \text{ft})\mathbf{i}\times T_{BD}(-\frac{۲}{۳}\mathbf{i} + \frac{۱}{۳}\mathbf{j} - \frac{۲}{۳}\mathbf{k})$$

$$+ (۶\ \text{ft})\mathbf{i}\times T_{EC}(-\frac{۶}{۷}\mathbf{i} + \frac{۳}{۷}\mathbf{j} + \frac{۲}{۷}\mathbf{k}) + (۴\ \text{ft})\mathbf{i}\times(-۲۷۰\ \text{lb})\mathbf{j} = ۰$$

$$(۲٫۶۶۷T_{BD} + ۲٫۵۷۱T_{EC} - ۱۰۸۰\ \text{lb})\mathbf{k} + (۵٫۳۳۳T_{BD} - ۱٫۷۱۴T_{EC})\mathbf{j} = ۰ \quad (۲)$$

با مساوی صفر قراردادن ضریبهای **j** و **k** در معادلهٔ (۲)، دو معادلهٔ اسکالر به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم آنها را برای T_{BD} و T_{EC} حل کنیم:

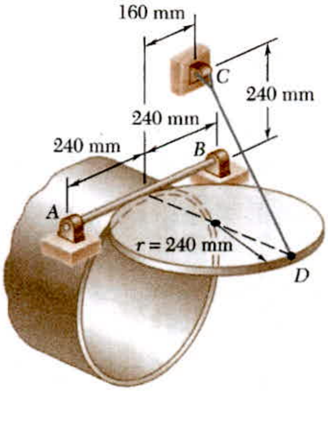
◄ $T_{BD} = ۱۰۱٫۳\ \text{lb} \qquad T_{EC} = ۳۱۵\ \text{lb}$

با مساوی صفر قراردادن ضریبهای **i**، **j**، و **k** در معادلهٔ (۱)، سه معادلهٔ دیگر به‌دست می‌آید که مؤلفه‌های **A** را به‌دست می‌دهند. داریم

◄ $\mathbf{A} = +(۳۳۸\ \text{lb})\mathbf{i} + (۱۰۱٫۲\ \text{lb})\mathbf{j} - (۲۲٫۵\ \text{lb})\mathbf{k}$

مسئلهٔ نمونه ۴.۹

دریوش یکنواخت لوله‌ای به شعاع $r = ۲۴۰$ mm و جرم ۳۰ kg توسط کابل CD در وضعیت افقی نگه داشته شده است. با فرض اینکه یاتاقان B هیچ‌گونه نیروی محوری وارد نکند، کشش در کابل و عکس‌العملها را در A و B تعیین کنید.



حل:

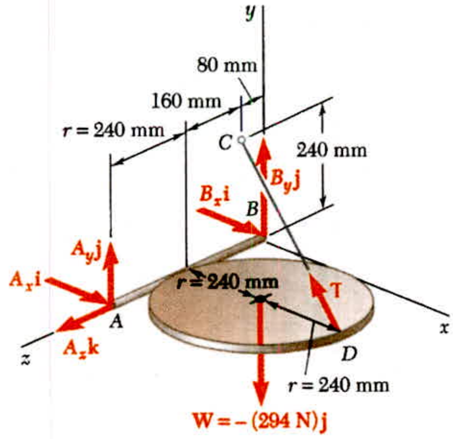
نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد را با محورهای مختصات نشان داده شده رسم می‌کنیم. نیروهای وارد بر جسم آزاد عبارت‌اند از وزن درپوش،

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(۳۰\ \text{kg})(۹٫۸۱\ \text{m/s}^۲)\mathbf{j} = -(۲۹۴\ \text{N})\mathbf{j}$$

و عکس‌العملها که شامل شش مجهول‌اند، یعنی بزرگی نیروی **T**، که کابل وارد می‌کند، سه مؤلفهٔ نیرو در لولای A، و دو مؤلفه در لولای B. مؤلفه‌های **T** را با تجزیهٔ بردار $\overrightarrow{DC}$ به مؤلفه‌های قائم آن، برحسب بزرگی مجهول T می‌نویسیم

$$\overrightarrow{DC} = -(۴۸۰\ \text{mm})\mathbf{i} + (۲۴۰\ \text{mm})\mathbf{j} - (۱۶۰\ \text{mm})\mathbf{k}$$

$$DC = ۵۶۰\ \text{mm} \qquad \mathbf{T} = T\frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\frac{۶}{۷}T\mathbf{i} + \frac{۳}{۷}T\mathbf{j} - \frac{۲}{۷}T\mathbf{k}$$



معادله‌های تعادل. می‌گوییم که نیروهای وارد بر درپوش لوله سیستمی معادل صفر تشکیل می‌دهند:

$$\Sigma \mathbf{F} = ۰: \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (۲۹۴\ \text{N})\mathbf{j} = ۰$$

$$(A_x + B_x - \frac{۶}{۷}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \frac{۳}{۷}T - ۲۹۴\ \text{N})\mathbf{j} + (A_z - \frac{۲}{۷}T)\mathbf{k} = ۰ \quad (۱)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_B = \Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = ۰:$$

$$۲r\mathbf{k}\times(A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (۲r\mathbf{i} + r\mathbf{k})\times(-\frac{۶}{۷}T\mathbf{i} + \frac{۳}{۷}T\mathbf{j} - \frac{۲}{۷}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k})\times(-۲۹۴\ \text{N})\mathbf{j} = ۰$$

$$(-۲A_y - \frac{۳}{۷}T + ۲۹۴\ \text{N})r\mathbf{i} + (۲A_x - \frac{۲}{۷}T)r\mathbf{j} + (\frac{۶}{۷}T - ۲۹۴\ \text{N})r\mathbf{k} = ۰ \quad (۲)$$

با مساوی صفر قراردادن ضرایب بردارهای یکه در معادلهٔ (۲) سه معادلهٔ اسکالر می‌نویسیم، که از آنها نتیجه می‌شود

$A_x = +۴۹٫۰\ \text{N} \qquad A_y = +۷۳٫۵\ \text{N} \qquad T = ۳۴۳\ \text{N}$ ◄

با مساوی صفر قراردادن ضرایب بردارهای یکه در معادلهٔ (۱) سه معادلهٔ اسکالر دیگر به‌دست می‌آوریم. اگر مقادیر T، A_x، و A_y را در این معادله‌ها بگذاریم خواهیم

ـت

$A_z = +۹۸/۰\ \mathrm{N} \qquad B_x = +۲۴۵\ \mathrm{N} \qquad B_y = +۷۳/۵\ \mathrm{N}$

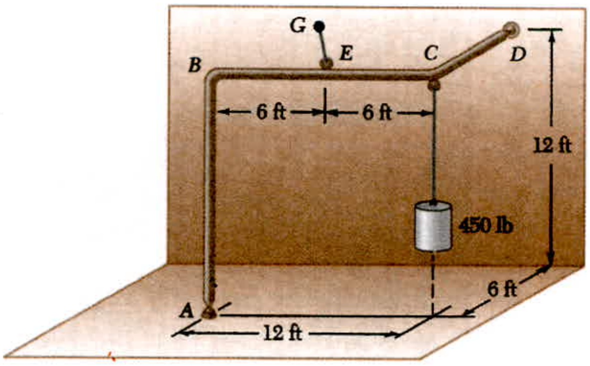
ـ عکس‌العملها در A و B عبارت‌اند از

$$\mathbf{A} = +(۴۹/۰\ \mathrm{N})\mathbf{i} + (۷۳/۵\ \mathrm{N})\mathbf{j} + (۹۸/۰\ \mathrm{N})\mathbf{k}$$

◀ $$\mathbf{B} = +(۲۴۵\ \mathrm{N})\mathbf{i} + (۷۳/۵\ \mathrm{N})\mathbf{j}$$

سئلهٔ نمونه ۱۰.۴

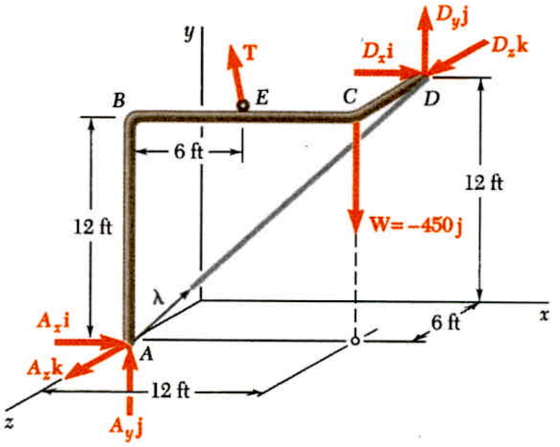
ـ وزنهٔ ۴۵۰ lb- از یک تکه لولهٔ صلب $ABCD$ که مطابق شکل خم شده است یزان است. لوله توسط مفصلهای توپی A و D به‌ترتیب به زمین و به دیوار عمودی صل شده، و توسط کابل متصل به نقاط E و G در وسط BC و بر روی دیوار، نگه شته شده است. (الف) محل G را طوری تعیین کنید که کشش کابل حداقل باشد، ب) مقدار حداقل کشش را حساب کنید.



ل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد لوله، شامل بار $\mathbf{W} = (-۴۵۰\ \mathrm{lb})\mathbf{j}$، کس‌العملها در A و D، و نیروی $\mathbf{T}$ وارد از طرف کابل است. برای حذف عکس‌العملهای ـ و D در محاسبات، می‌گوییم که مجموع گشتاورهای نیروها حول AD صفر است. دار یکهٔ در امتداد AD را با $\boldsymbol{\lambda}$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\Sigma M_{AD} = ۰: \qquad \boldsymbol{\lambda}\cdot(\overrightarrow{AE}\times\mathbf{T}) + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\mathbf{W}) = ۰ \qquad (۱)$$



جملهٔ دوم معادلهٔ (۱) را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\overrightarrow{AC}\times\mathbf{W} = (۱۲\mathbf{i} + ۱۲\mathbf{j})\times(-۴۵۰\mathbf{j}) = -۵۴۰۰\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{۱۲\mathbf{i} + ۱۲\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}}{۱۸} = \frac{۲}{۳}\mathbf{i} + \frac{۲}{۳}\mathbf{j} - \frac{۱}{۳}\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\mathbf{W}) = (\frac{۲}{۳}\mathbf{i} + \frac{۲}{۳}\mathbf{j} - \frac{۱}{۳}\mathbf{k})\cdot(-۵۴۰۰\mathbf{k})$$
$$= +۱۸۰۰$$

اگر این مقدار را در معادلهٔ (۱) قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\overrightarrow{AE}\times\mathbf{T}) = -۱۸۰۰\ \mathrm{lb\cdot ft} \qquad (۲)$$

مقدار حداقل کشش. با توجه به خاصیت تعویض‌پذیری ضرب مختلط سه‌گانه، معادلهٔ (۲) را مجدداً به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{T}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\times\overrightarrow{AE}) = -۱۸۰۰\ \mathrm{lb\cdot ft} \qquad (۳)$$

که نشان می‌دهد که تصویر $\mathbf{T}$ بر روی بردار $\boldsymbol{\lambda}\times\overrightarrow{AE}$ مقداری است ثابت. نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{T}$ وقتی حداقل می‌شود که با بردار زیر موازی باشد:

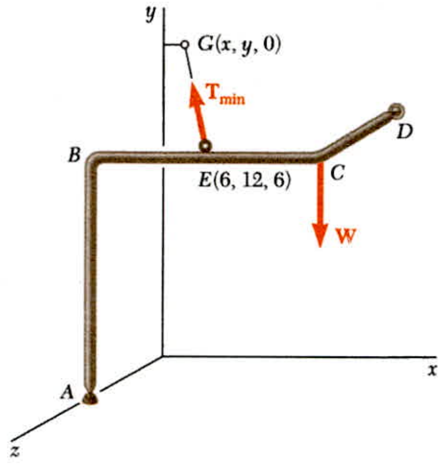
$$\boldsymbol{\lambda}\times\overrightarrow{AE} = (\frac{۲}{۳}\mathbf{i} + \frac{۲}{۳}\mathbf{j} - \frac{۱}{۳}\mathbf{k})\times(۶\mathbf{i} + ۱۲\mathbf{j})$$
$$= ۴\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

چون بردار یکهٔ متناظر $(۲/۳)\mathbf{i} - (۱/۳)\mathbf{j} + (۲/۳)\mathbf{k}$ است، می‌نویسیم

$$\mathbf{T}_{\min} = T(\frac{۲}{۳}\mathbf{i} - \frac{۱}{۳}\mathbf{j} + \frac{۲}{۳}\mathbf{k}) \qquad (۴)$$

اگر به جای $\mathbf{T}$ و $\boldsymbol{\lambda}\times\overrightarrow{AE}$ در معادلهٔ (۳) عبارتهای بالا را قرار بدهیم و ضرب نقطه‌ای را محاسبه کنیم نتیجه می‌شود که $۶T = -۱۸۰۰$ است و بنابراین $T = -۳۰۰$ می‌شود. این مقدار را در رابطهٔ (۴) که ببریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{T}_{\min} = -۲۰۰\mathbf{i} + ۱۰۰\mathbf{j} - ۲۰۰\mathbf{k} \qquad ◀\ T_{\min} = ۳۰۰\ \mathrm{lb}$$



تعیین محل نقطهٔ G. چون راستاهای بردار $\overrightarrow{EG}$ و نیروی $\mathbf{T}_{\min}$ یکسان است، مؤلفه‌های آنها باید متناسب باشند. با نشان‌دادن مختصات نقطهٔ G، با x، y، و ۰ می‌نویسیم

$$\frac{x-۶}{-۲۰۰} = \frac{y-۱۲}{+۱۰۰} = \frac{۰-۶}{-۲۰۰} \qquad ◀\ x = ۰\ ,\ y = ۱۵\ \mathrm{ft}$$

چگونه مسئله حل کنیم

در بخشهای گذشته تعادل یک جسم سه‌بعدی را در نظر گرفتیم. در این مورد هم بسیار مهم است که در نخستین قدم حل مسئله یک نمودار جسم آزاد کامل رسم کنید.

۱. وقتی دارید نمودار جسم آزاد را می‌کشید، به عکس‌العملهای تکیه‌گاهها دقیقاً توجه کنید. تعداد مجهولها در یک تکیه‌گاه می‌تواند (۱) تا (۶) تا باشد (شکل ۱۰.۴). اگر می‌خواهید ببینید که آیا یک عکس‌العمل مجهول یا یک مؤلفهٔ عکس‌العمل در تکیه‌گاه وجود دارد، از خودتان بپرسید که آیا تکیه‌گاه از حرکت جسم در یک امتداد معین یا حول یک محور معین جلوگیری می‌کند یا نه.

الف. اگر از حرکت جسم در راستای معینی ممانعت می‌شود، در نمودار جسم آزاد خود در همان راستا یک عکس‌العمل مجهول یا یک مؤلفهٔ عکس‌العمل رسم کنید.

ب. اگر تکیه‌گاه جلو چرخش جسم حول یک محور معین را می‌گیرد، در نمودار جسم آزاد خود کوپلی با بزرگی مجهول که حول همان محور عمل می‌کند وارد کنید.

۲. نیروهای خارجی وارد بر یک جسم سه‌بعدی یک سیستم معادل با صفر را تشکیل می‌دهند. با نوشتن $\Sigma F = 0$ و $\Sigma M_A = 0$ حول نقطهٔ مناسب A، و مساوی صفرقراردادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ در دو معادلهٔ تعادل، شش معادلهٔ اسکالر به‌دست خواهید آورد. به‌طورکلی، این معادلات شامل شش مجهول‌اند و ممکن است بشود این شش مجهول را به‌دست آورد.

۳. پس از تکمیل نمودار جسم آزاد، ممکن است بخواهید معادله‌هایی پیدا کنید که شامل مجهولهای کمتری باشند، راهکارهای زیر ممکن است به شما کمک کنند.

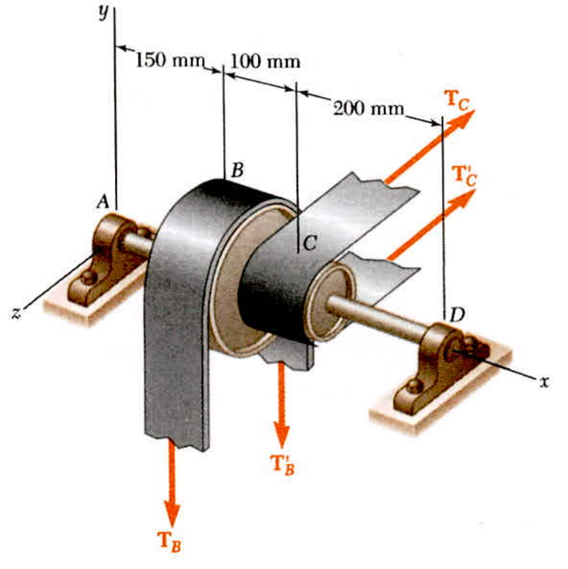
الف. با جمع گشتاورها حول یک مفصل توپی یا یک لولا می‌توانید معادلاتی پیدا کنید که سه مؤلفهٔ عکس‌العمل مجهول از آنها حذف شده باشد [مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۴ و ۹.۴].

ب. اگر بتوانید محوری از نقطه اثرهای تمام عکس‌العملهای مجهول بجز یکی از آنها بگذرانید از جمع گشتاورها حول آن محور یک معادلهٔ یک‌مجهولی به‌دست می‌آورید [مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰.۴].

۴. پس از رسم نمودار جسم آزاد، ممکن است با یکی از موارد زیر مواجه شوید. بهتر است که تعداد معادله‌های تعادل اسکالر که بدیهی نیستند مقایسه شود. با این‌کار معلوم می‌شود که جسم مقید کامل یا مقید ناقص است، و مسئله از نظر استاتیکی معین است یا نامعین. علاوه بر این موقع بررسی مسائل مشکلتر در فصلهای بعد، مقایسه تعداد مجهولها و معادله‌ها در به‌دست‌آوردن نتایج درست کمک می‌کنند.

مسئله‌ها

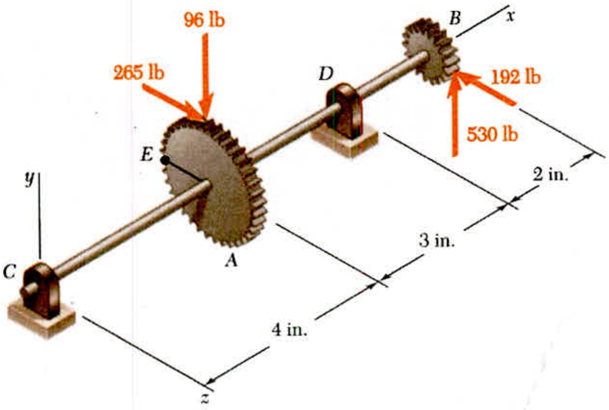
۹۶.۴ دو تسمه انتقال از روی یک قرقره مضاعف عبور کرده، قرقره متصل به محور نگهدارنده توسط یاتاقانها در A و D است. شعاع قرقره مضاعف داخلی $125\ \text{mm}$ و شعاع قرقره مضاعف خارجی $250\ \text{mm}$ است. می‌دانیم که وقتی سیستم ساکن است، کشش $90\ \text{N}$ در دو قسمت تسمه B و $150\ \text{N}$ در دو قسمت تسمه C است. واکنشها در A و D را با فرض اینکه یاتاقان در D هیچ‌گونه فشار محوری وارد نکند، به‌دست آورید.



شکل م ۹۶.۴

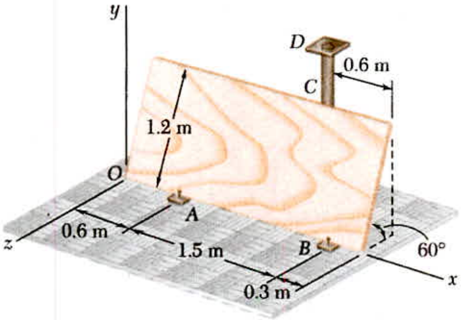
۹۷.۴ چرخدنده‌های A و B به یک محور با یاتاقانهایی در نقاط C و D نگهداری می‌شود. قطر چرخدنده A و B به‌ترتیب $6\ \text{in}$ و $3\ \text{in}$ است و نیروهای مماسی و شعاعی، مطابق شکل، بر چرخدنده‌ها وارد می‌شوند. می‌دانیم که سیستم با آهنگ ثابت می‌چرخد. واکنش در C و D، را با فرض اینکه یاتاقان در C هیچ‌گونه نیروی محوری وارد نکند به‌دست آورید. از وزن چرخدنده‌ها و محور چشم‌پوشی کنید.

۹۸.۴ مسئله ۹۷.۴ را با فرض اینکه در چرخدنده A نیروهای مماسی و شعاعی در E به‌صورت $\mathbf{F}_A = (265\ \text{lb})\mathbf{j} + (96\ \text{lb})\mathbf{k}$ باشد، حل کنید.



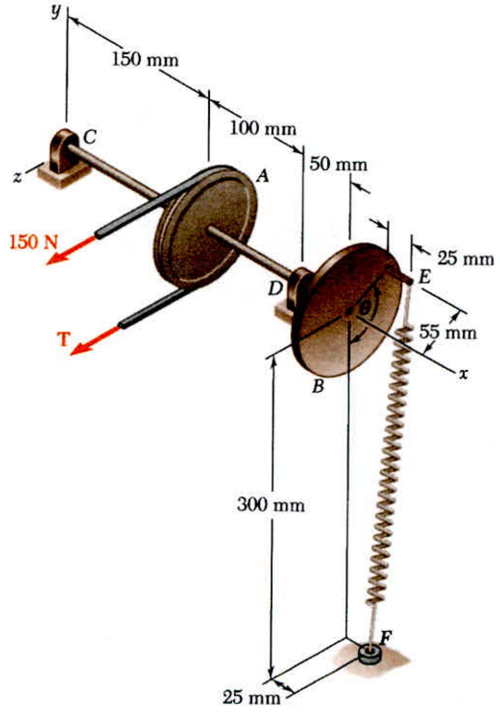
شکل م ۹۷.۴

۹۹.۴ تخته چندلایی به ابعاد $2.4 \times 1.2\ \text{m}$ و به جرم $18\ \text{kg}$ موقتاً در برابر ستون D به‌صورت پشتیبان قرار گرفته است. از اصطکاک در تمامی سطوح تماس صرف‌نظر کن واکنشها در نقاط A، B، و C را به‌دست آورید.



شکل م ۹۹.۴

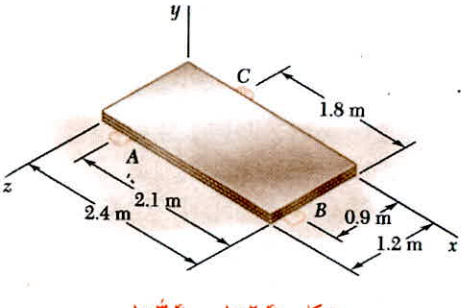
۱۰۰.۴ برای قسمتی از ساختار نشان داده شده قرقره A به قطر $100\ \text{mm}$ و چرخ B محوری ثابت توسط یاتاقان در C نگهداری می‌شود و یاتاقان در C هیچ‌گونه نیروی محوری وارد نمی‌کند. ثابت فنر $366\ \text{N/m}$ و در حالت $\theta = 0$ فنر به حالت آزاد است. می‌دانیم $\theta = 180°$ و ساختار در حالت سکون و در تعادل است. مطلوب است (الف) کشش (ب) واکنشها در C و D. از جرم محور، قرقره‌ها و چرخ صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۰۰.۴

۱۰۱.۴ مسئله ۱۰۰.۴ را با فرض $\theta = 90°$ حل کنید.

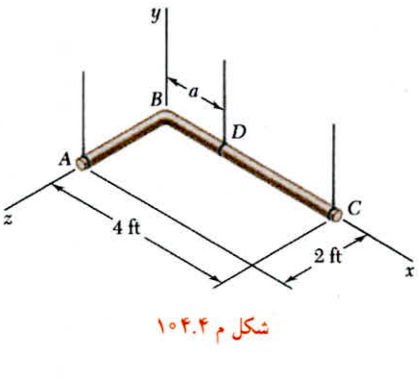
۱۰۲.۴ مجموعه‌ای از چندین ورق خشک‌کن به جرم ۱۷۰ kg روی سه قطعه چوبی زیر لبه‌های و مجموعه قرار داده شده است. مطلوب است نیروهای وارد بر هر سه قطعه مساوی.



شکل م ۱۰۲.۴ و م ۱۰۳.۴

۱۰۲ یک مجموعه از چندین ورق خشک‌کن به جرم ۱۷۰ kg روی سه قطعه چوبی لبه‌های ورق جای داده شده است. مطلوب است جرم و محل سبکترین سطل سنگ را در حالتی که بالای ورقه خشک‌کن قرار گرفته باشد. نیروهای وارد بر سه قطعه برابر باشند.

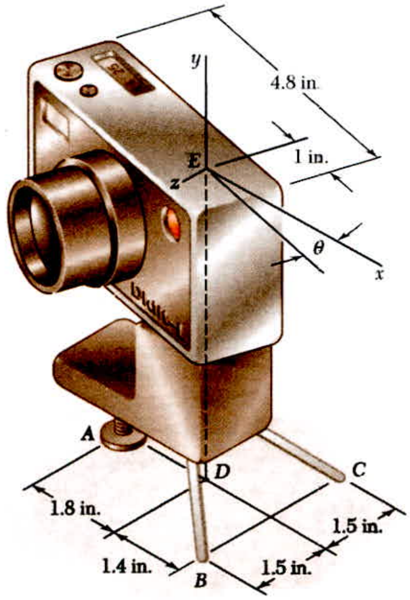
۱۰۴.۴ دو لوله فولادی AB و BC هر یک به وزن ۵ lb/ft بر واحد طول با هم در B جوش داده شده است و توسط سه سیم نگهداری می‌شوند. می‌دانیم که $a = ۱٫۲۵$ ft، مطلوب است کشش در هر سیم.



شکل م ۱۰۴.۴

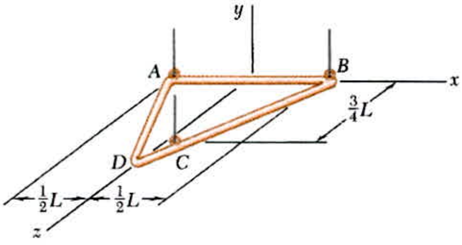
۱۰۵.۴ در مجموعه لوله مسئله ۱۰۴.۴ مطلوب است (الف) بیشترین مقدار مجاز a، اگر مجموعه در بالا قرار نگیرد، (ب) کشش متناظر در هر سیم.

۱۰۶.۴ دوربینی به وزن ۰٫۵۳ lb روی یک سه پایه به وزن ۰٫۴۴ lb نصف شده است. اگر وزن دوربین یکنواخت توزیع شده باشد و خط اثر وزن سه پایه از نقطهٔ D عبور کند، مطلوب است (الف) مؤلفه عمودی واکنش در نقطه A و B، و C، اگر $\theta = ۰$، (ب) ماکزیمم مقدار θ اگر سه پایه از بالا واژگون شود.



شکل م ۱۰۶.۴

۱۰۷.۴ میله برنجی یکنواختی به وزن W و طول $۳L$ را به‌صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع خم کرده و سپس مطابق شکل با سه سیم آویزان کرده‌اند. مطلوب است کشش در هر سیم.

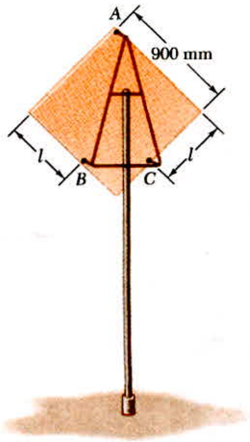


شکل م ۱۰۷.۴ و م ۱۰۸.۴

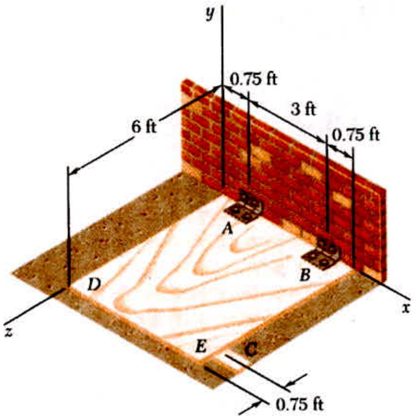
۱۰۸.۴ میله برنجی یکنواختی به وزن W و طول ۳L را به‌صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع خم کرده و سپس مطابق شکل با سه سیم آویزان کرده‌اند. یک طوقه کوچک به وزن W روی ضلع BD از مثلث قرار داده و وضعیت آن طوری است که کشش‌ها در سیمهای A و B مساوی‌اند. معین کنید (الف) کشش در سیمها. (ب) مکان طوقه.

۱۰۹.۴ تابلوی فولادی چهارگوش مطابق شکل به قاب ABC متصل شده است. اگر امتداد باد عمود بر تابلو باشد و باد نیروی $\mathbf{F}_W$ به مقدار ۱۳۵ N را بر مرکز جلویی تابلو وارد کند، مطلوب است (الف) مقدار l را اگر مؤلفه افقی واکنش در سه تکیه‌گاه برابر باشند، (ب) مقدار مؤلفه افقی مؤلفه‌ها را، وقتی $l = ۵۰۰$ mm باشد.

۱۱۰.۴ مدخلی در کف اتاق از تخته چندلایی به ابعاد $۶ \times ۴٫۵$ ft و به وزن ۲۷ lb پوشیده شده است. تخته در نقاط A و B تولید شده است و توسط قطعه کوچک C کمی بالای زمین قرار دارد. معین کنید مؤلفه قائم واکنش در (الف) نقطهٔ A، (ب) نقطهٔ B، (ج) نقطهٔ C.



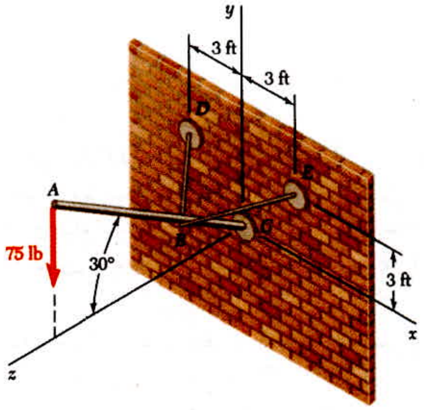
شکل م ۱۰۹.۴



شکل م ۱۱۰.۴

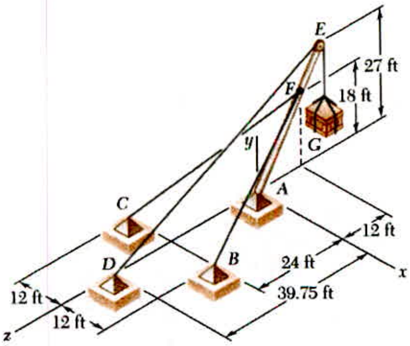
۱۱۱.۴ مسئله ۱۱۰.۴ را با فرض اینکه قطعه کوچک C را حرکت دهیم و در فاصله ۰٫۱۵-ft از گوشهٔ E زیرلبهٔ DE قرار گیرد، حل کنید.

۱۱۲.۴ تیر پرچم AC به‌طول ۱۰ ft با محور Z زاویهٔ °۳۰ تشکیل می‌دهد و توسط مفصل کاسه‌ـساچمه در نقطهٔ C متصل شده است و با دو مهار نازک BD و BE نگهداری می‌شود. اگر فاصله BC برابر ۳ ft باشد، کشش در هر مهار و عکس‌العمل در C را به‌دست آورید



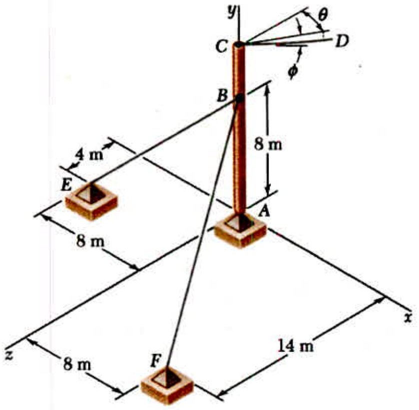
شکل م ۱۱۲.۴

۱۱۳.۴ قطعه ماشین ۲۷۲۰-lb از یک کابل که از روی یک قرقره می‌گذرد، در E آویزان شده است. تیر AE توسط مفصل کاسه‌ـساچمه در A و توسط دو کابل BF و CF نگهداری می‌شود. معین کنید کششها در کابلهای BF و CF (ب) واکنش در A.



شکل م ۱۱۳.۴

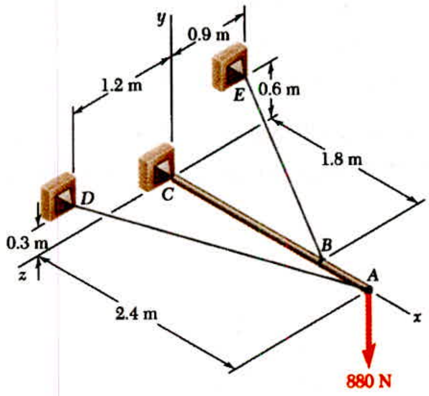
۱۱۴.۴ کابل CD مطابق شکل به تیر ABC به طول ۱۰ m متصل شده است. پایه ت ر A توسط مفصل کاسه‌ـساچمه نگهداری می‌شود و تیر توسط کابلهای BE و BF مهار شده است. اگر $\theta = 30°$ و $\phi = 10°$ و کشش در کابل CD برابر ۶۰۰ N باشد، مطلوب (الف) کششها در کابلهای BE و BF، (ب) عکس‌العمل در A.



شکل م ۱۱۴.۴ و م ۱۱۵.۴

۱۱۵.۴ کابل CD مطابق شکل به تیر ABC به‌طول ۱۰ m متصل شده است. پای در A توسط مفصل کاسه‌ـساچمه نگهداری می‌شود و تیر توسط کابلهای BE و BF شده است. اگر $\phi = 8°$ و کشش در کابلهای BE و BF به‌ترتیب برابر ۸۴۰ N و ۴۵۰ N باشد، مطلوب است (الف) مقدار θ، (ب) کشش در کابل CD، (ج) عکس‌العمل در A.

۱۱۶.۴ تیری به طول ۲٫۴ m توسط یک مفصل کاسه‌ـساچمه در C و دو کابل AD و BE نگهداری می‌شود. مطلوب است کشش در هر کابل.

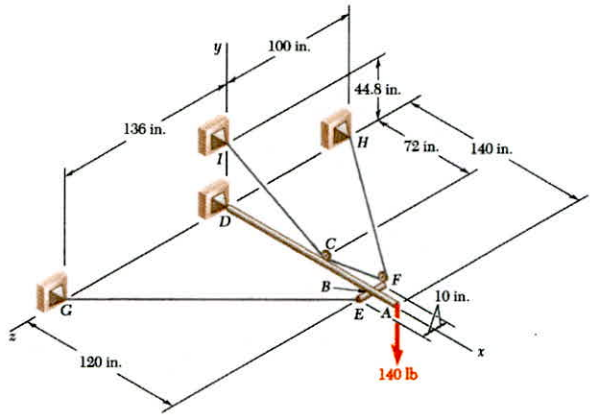


شکل م ۱۱۶.۴

۱۱۷.۴ مسئله ۱۱۶.۴ را با فرض اینکه بار ۸۸۰ N با دو بار ۴۴۰-N وارد بر A تعویض شود حل کنید.

۱۱۸.۴ دو لوله فولادی $ABCD$ و EBF را با هم در نقطه B جوش داده‌اند تا به ش

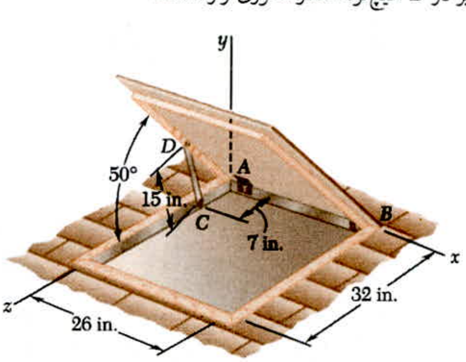
شان داده شده درآید. تیر توسط مفصل کاسه ـ ساچمه در D نگهداری می‌شود و با کابل EG و $ICFH$ دور قرقره‌های C و F بدون اصطکاک عبور کرده است. برای بارگذاری نشان د... شده، مطلوب است کشش در هر عمل و عکس‌العمل در D.



شکل م ۱۱۸.۴

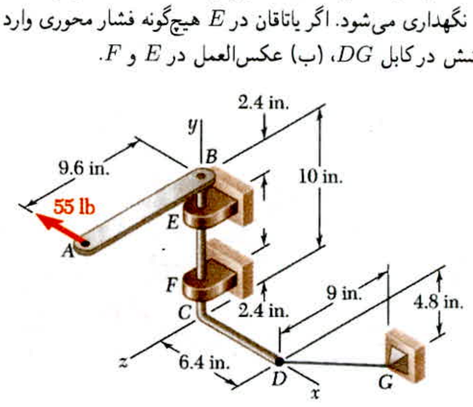
۱۱۹.۴ مسئله ۱۱۸.۴ را با فرض اینکه بار $140\ lb$ بر نقطه B وارد شود، حل کنید.

۱۲ محفظه سقفی با درپوشی به وزن $75\ lb$ در گوشه‌های A و B لولا شده و در ...عیت دلخواه توسط میله CD در C نگهداری می‌شود. یک پین در انتهای D از میله یکی از چندین سوراخهای مته شده در لبه سرپوش جایگیر شده است. برای وضعیت نشان داده مطلوب است (الف) بزرگی نیروی وارد توسط میله CD. (ب) عکس‌العمل در لولاها. با ... اینکه آویز در B هیچ‌گونه فشار محوری وارد نکند.



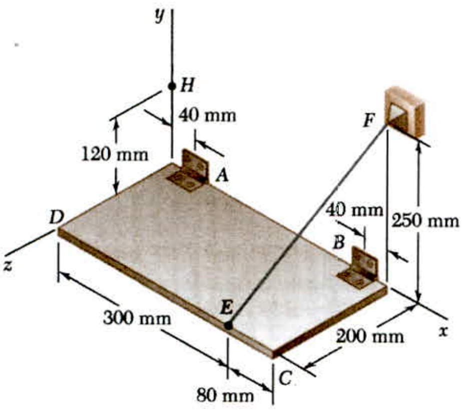
شکل م ۱۲۰.۴

۱۲۱.۴ اهرم AB به میله خمیده BCD جوش داده شده است و توسط یاتاقانها در E و F و کابل DG نگهداری می‌شود. اگر یاتاقان در E هیچ‌گونه فشار محوری وارد نکند، مطلوب است (الف) کشش در کابل DG، (ب) عکس‌العمل در E و F.



شکل م ۱۲۱.۴

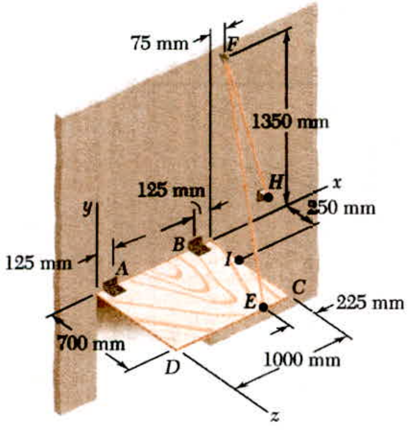
۱۲ صفحه مستطیل نشان داده شده به جرم $15\ kg$ و در وضع نشان داده شده توسط آ...هایی در A و B و کابل EF نگهداری می‌شود. اگر آویز در B هیچ‌گونه فشار محوری وارد نکند، مطلوب است (الف) کشش در کابل، (ب) عکس‌العمل در A و B.



شکل م ۱۲۲.۴

۱۲۳.۴ مسئله ۱۲۲.۴ را با فرض اینکه کابل EF را با یک کابل متصل در نقاط E و H عوض کنند حل کنید.

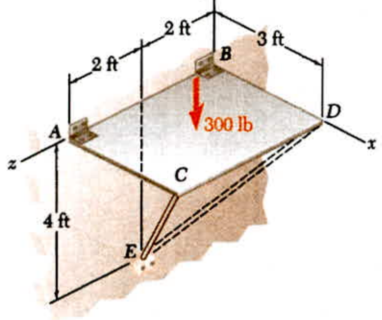
۱۲۴.۴ درب کوچکی به جرم $72\ g$ توسط آویزهای A و B به دیوار و در وضعیت نشان داده شده افقی توسط طناب EFH نگهداری می‌شود. طناب دور قرقره کوچک بدون اصطکاک پیچیده و در نقطه ثابت H محکم شده است. اگر آویز در A هیچ‌گونه فشار محوری وارد نکند مطلوب است (الف) کشش در طناب، (ب) عکس‌العمل در A و B.



شکل م ۱۲۴.۴

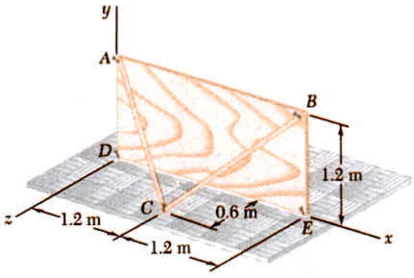
۱۲۵.۴ مسئله ۱۲۴.۴ را اگر طناب متصل به درب در I باشد حل کنید.

۱۲۶.۴ سکوی افقی $ABCD$ به وزن $60\ lb$ بار $240\ lb$ را در مرکزش نگه می‌دارد. سکو به‌طور عادی در وضعیتی توسط آویزها در A و B و مهارهای CE و DE نگهداری می‌شوند. اگر مهار DE برداشته شود، مطلوب است عکس‌العمل در آویزها و نیروهای وارد توسط باقی مانده مهار CF. آویز در A هیچ‌گونه فشار محوری وارد نمی‌کند.



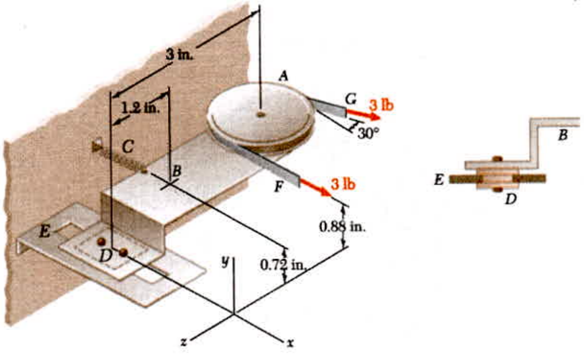
شکل م ۱۲۶.۴

۱۲۷.۴ تخته چندلایی به ابعاد ۲٫۴ × ۱٫۲ mm موقتاً توسط میخها در D و E و توسط دو میخ چوبی در A، B، و C مهار شده است و باد روی سطح تخته چندلا می‌وزد. فرض می‌شود که اثرش را می‌توان توسط نیروی $P\mathbf{k}$ وارد بر مرکز تخته نشان داد. می‌دانیم هر مهار وقتی تحت تأثیر نیروی محوری ۱٫۸-kN قرار می‌گیرد، نسبت به پیچش نامطمئن می‌شود. مطلوب است (الف) ماکزیمم بزرگی P نیروی باد، (ب) بزرگی متناظر مؤلفه z عکس‌العمل در E. فرض کنید میخها شل و هیچ‌گونه کوپلی وارد نمی‌کنند.



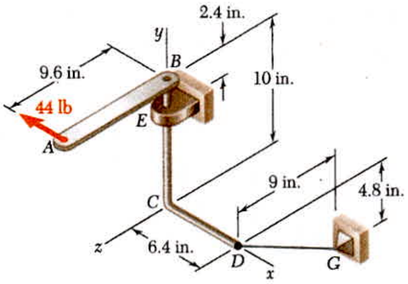
شکل م ۱۲۷.۴

۱۲۸.۴ ساختار یک دستگاه سیم‌کش شامل یک تسمه متحرک روی قرقره بدون اصطکاک A، ورق B و فنر C نصب شده است. ورق نصب شده به قطعه باریک D متصل است که به‌طور آزاد و بدون اصطکاک در شکاف گیره E قرار دارد. اگر قرقره و تسمه در صفحه افقی قرار داشته باشند، بخش F تسمه موازی با محور x و بخش G آن با محور x زاویه °۳۰ تشکیل می‌دهد. مطلوب است (الف) نیرو در فنر، (ب) عکس‌العمل در D.



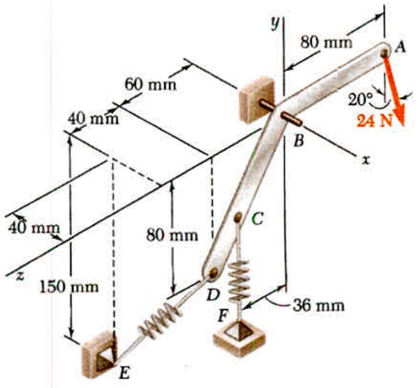
شکل م ۱۲۸.۴

۱۲۹.۴ اهرم AB به میله خمیده BCD جوش داده شده است و توسط یاتاقان E و کابل DG نگهداری می‌شود. اگر یاتاقان بتواند یک فشار محوری با کوپلهای حول محورهای موازی با محورهای x و z ایجاد کند، مطلوب است (الف) کشش در کابل DG، (ب) عکس‌العمل در E.



شکل م ۱۲۹.۴

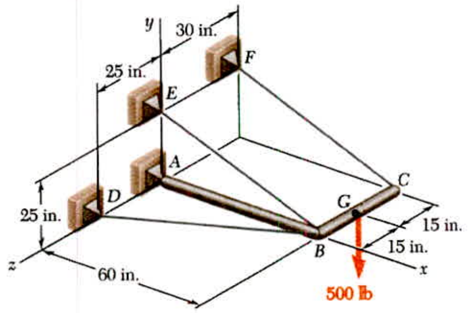
۱۳۰.۴ یاتاقان اهرم ABD به‌طور آزاد می‌لغزد و حول پین افقی در B می‌چرخد. می‌دانیم که نیروی ۲۴-N در صفحه‌ای موازی با صفحه xy قرار گرفته است و یاتاقان می‌تواند کوپلهایی حول محورهای y و z وارد کند. مطلوب است (الف) نیروهای فشاری فنرهای CF و DE، (ب) عکس‌العل در B.



شکل م ۱۳۰.۴

۱۳۱.۴ مسئله ۱۲۴.۴ را با فرض اینکه آویز در A برداشته شود و آویز در B بتواند کوپلهایی حول محورهای y و z وارد کند، حل کنید.

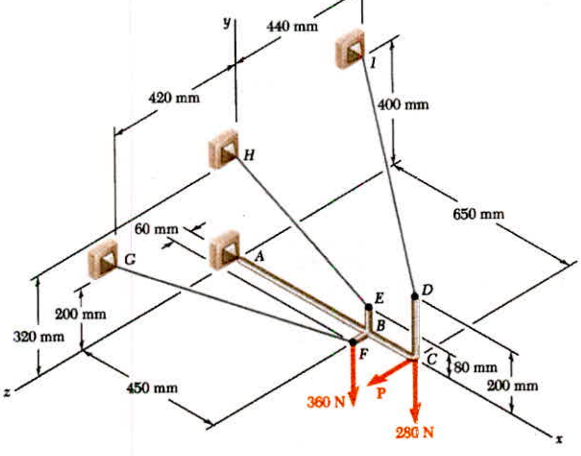
۱۳۲.۴ شکل صلب L عضو ABC توسط کاسه-ساچمه در نقطه A و سه کابل نگه‌ می‌شود. مطلوب است کشش در هر کابل و عکس‌العمل در A که توسط بار وارد شده ‎-lb‎ در G ایجاد می‌شود.



شکل م ۱۳۲.۴

۱۳۳.۴ مسئله ۱۳۲.۴ را با فرض اینکه یک بار اضافی به سمت پایین ۸۰۰ lb در نقطه C وارد شود، حل کنید.

۱۳۴.۴ قاب نشان داده شده توسط کابلها و کاسه-ساچمه در A نگهداری می‌شود. برای $\mathbf{P} = 0$، معین کنید کشش در هر کابل و عکس‌العمل در A.

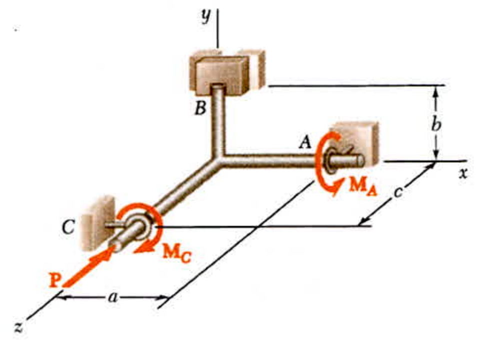


شکل م ۱۳۴.۴ و م ۱۳۵.۴

۱۳۵.۴ قاب نشان داده شده توسط سه کابل و مفصل کاسه-ساچمه در A نگهداری می‌شود. برای $P = 50$ N، مطلوب است کشش در هر کابل و عکس‌العمل در A.

۱۳۶.۴ سه میله به طول‌های $a = 9$ in، $b = 6$ in، و $c = 3$ in را با هم به شکل اجزای

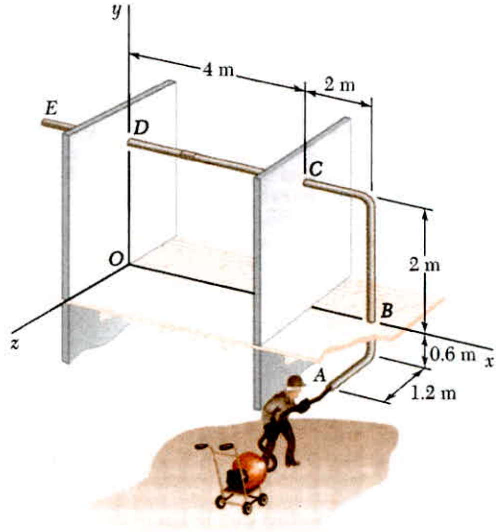
ن داده شده جوش می‌دهند. این اجزا توسط میخهای سردار A و C و شکاف بریده در قطعه در نقطه B نگهداری می‌شود. از اصطکاک صرف‌نظر شود. معین کنید عکس‌العملها در A، B، و C. می‌دانیم که $P =$ ۴۰ lb، $M_A =$ ۳۶ lb.ft، و $M_C =$ ۰ است.



شکل م ۱۳۶.۴ و م ۱۳۷.۴

۱۳۷.۰ سه میله به طولهای $a = -$۲۴۰ mm، $b =$ ۲۰۰ mm، و $c =$ ۱۸۰ mm با هم به شکل اجزای نشان داده شده جوش می‌دهند. اجزا توسط میخ سردار در A و و شکاف بریده در نقطه B از قطعه نگهداری می‌شود. از اصطکاک صرف‌نظر کنید. مطلوب است عکس‌العملها در A، B، و C. می‌دانیم $P =$ ۶۰ N، $M_A =$ ۶٫۳ N · m و $M_C =$ ۱۲ N · m.

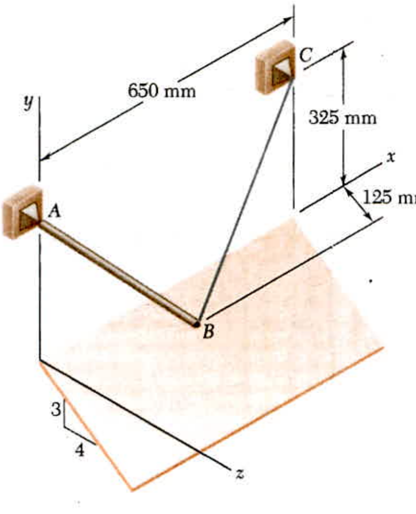
۱۳۸ برای رسوب‌گیری لوله AE، لوله‌کش هر دو انتهای لوله را بازکرده است و فنر مارپیچی را در ورودی A وارد می‌کند. ابزار برش فنر توسط کابل ضخیمی به موتور الکتریکی متصل است که با سرعت ثابت می‌چرخد تا کابل را به داخل لوله براند. نیروهای وارد شده توسط لوله‌کش و موتور به انتهای کابل را می‌توان با یک رنچ $\mathbf{F} = -($۸۰ N$)\mathbf{k}$ و $\mathbf{M} = -($۱۴۴ N · m$)\mathbf{k}$ نشان داد. عکس‌العمل دیگر در B، C، و D که باعث تمیزکردن می‌شود را تعیین کنید. فرض کنید عکس‌العمل در هر تکیه‌گاه شامل دو مؤلفه نیروی عمود بر لوله است.



شکل م ۱۳۸.۴

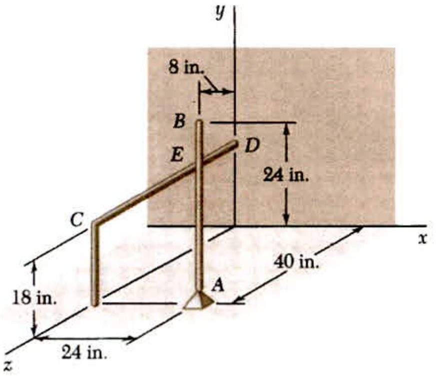
۱۳۹ مسئله ۱۳۸.۴ را با فرض اینکه لوله‌کش یک نیروی $\mathbf{F} = -($۸۰ N$)\mathbf{k}$ را وارد کند و موتور با گشتاور آزاد بچرخد و حل کند.

۱۴۰. میله یکنواخت AB به طول ۵۲۵ mm و جرم ۳ kg به مفصل کاسه-ساچمه A متصل است. این میله به یک سطح مایل و بدون اصطکاک تکیه دارد و توسط طناب BC در وضعیت نشان داده شده نگهداری می‌شود. می‌دانیم که طول طناب ۵۲۵ mm است، مطلوب است (الف) کشش در طناب، (ب) عکس‌العملها در نقاط A و B.



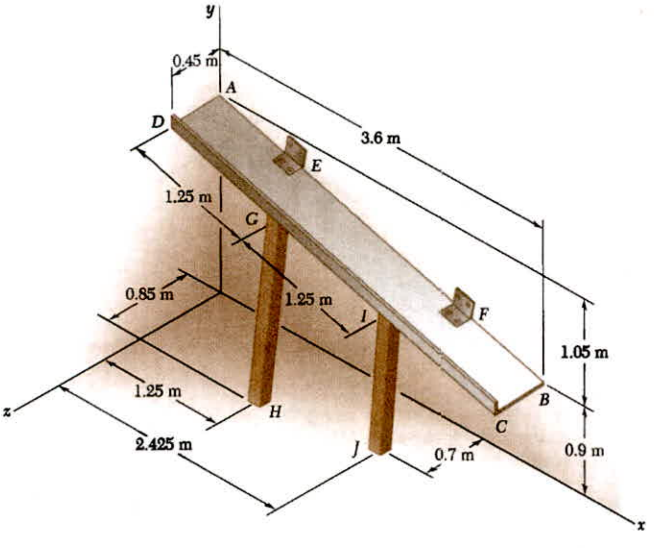
شکل م ۱۴۰.۴

۱۴۱.۴ میله یکنواخت AB به طول ۱۰ lb توسط مفصل کاسه-ساچمه در A و بین دو میله CD و دیوار عمودی قرارگرفته است. از اصطکاک صرف‌نظر کنید. مطلوب است (الف) نیرویی که میله CD روی AB وارد می‌کند، (ب) عکس‌العملها در A و B (راهنمایی. نیروی وارد توسط CD بر روی AB باید عمود بر هر دو میله باشد.)



شکل م ۱۴۱.۴

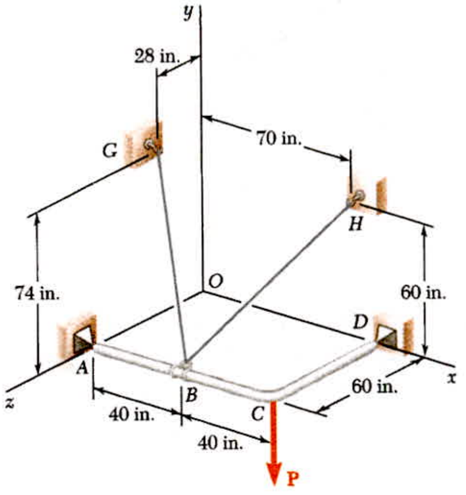
۱۴۲.۴ سرسره $ABCD$ به وزن ۲۵ kg با دوگیره در E و F به دیوار متصل شده است و با دو پایه ستون GH و IJ مهار می‌شود. اگر وزن سرسره به‌طور یکنواخت توزیع شده باشد، مطلوب است بزرگی نیروی وارد شده از پایه GH بر سرسره در صورتی که IJ حذف شود.



شکل م ۱۴۲.۴ و م ۱۴۳.۴

۱۴۳.۴ سرسره $ABCD$ به وزن ۲۵ kg با دوگیره در E و F به دیوار متصل شده و با دو پایه ستون GH و IJ مهار می‌شود. اگر وزن سرسره به‌طور یکنواخت توزیع شده باشد، بزرگی نیروی وارد شده از پایه IJ بر سرسره را در صورتی که پایهٔ GH حذف شود، به‌دست آورید.

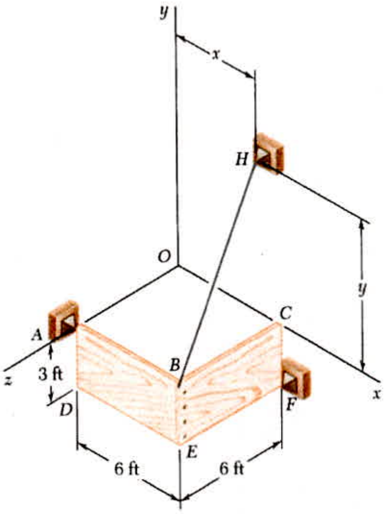
۱۴۴.۴ قاب ACD توسط مفصل کاسه‌ـساچمه در A و D و توسط کابلی که از داخل یک حلقه در B می‌گذرد و به قلاب G و H متصل است، نگهداری می‌شود. اگر قاب در لحظه C باری به بزرگی $P = ۷۵\,\text{lb}$ را نگهداری کند، مطلوب است کشش در کابل.



شکل م ۱۴۴.۴

۱۴۵.۴ مسئله ۱۴۴.۴ را با این فرض حل کنید که کابل DF با کابلی که B و F را به هم وصل می‌کند جایگزین شود.

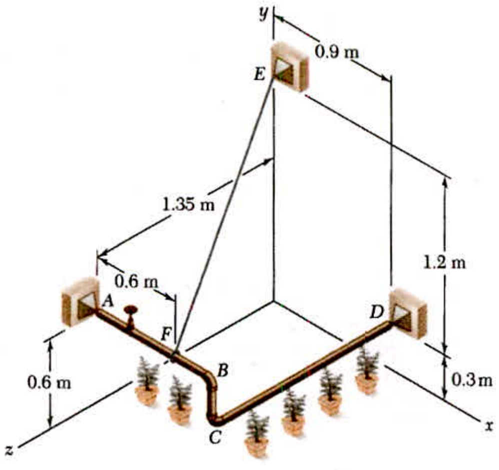
۱۴۶.۴ دو پانل از تخته چندلا به ابعاد ۶ ft × ۳ که وزن هر یک ۳۰ lb است را مطابق شکل میخ کرده‌ایم. تخته‌ها را توسط مفصلهای کاسه‌ـساچمه‌ای A و F و سیم BH نگهداری می‌کنند. معین کنید (الف) مکان H در صفحه xy را، اگر کشش در سیم حداقل باشد، (ب) کشش حداقل متناظر.



شکل م ۱۴۶.۴

۱۴۷.۴ مسئله ۱۴۶.۴ را با فرض اینکه H روی محور y باشد، حل کنید.

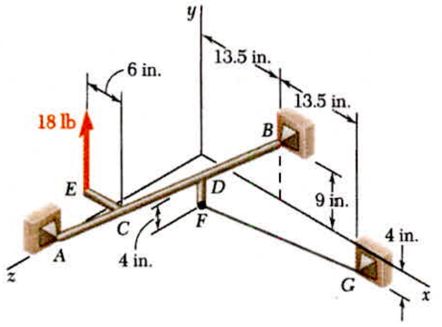
۱۴۸.۴ باغبانی برای آبیاری درختان وگیاهان سه لوله AB، AC، و CD را با آب پخش‌کن افشانه‌ای به هم متصل کرده است و مجموعه را با تکیه‌گاههای A و D و کابل EF نگهداری می‌کند. می‌دانیم که جرم لوله ۱٫۲۵ kg/m بر واحد طول است. مطلوب است کشش در کابل.



شکل م ۱۴۸.۴

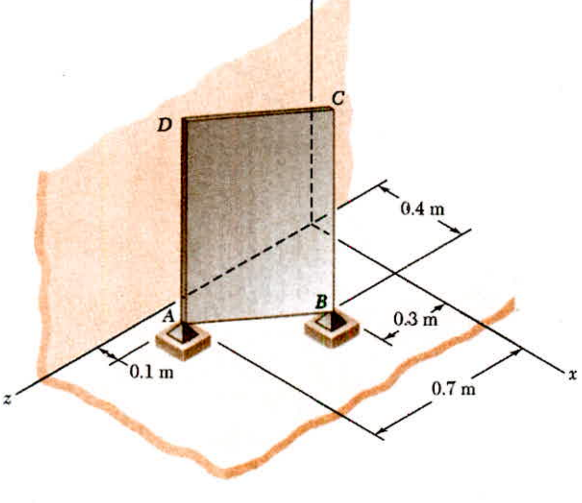
۱۴۹.۴ مسئله ۱۴۸.۴ را با فرض اینکه کابل EF را با کابل متصل به F و C جایگزین کنیم، حل کنید.

۱۵۰.۴ عضو $ABCD$ به طول ۳۱٫۵ in توسط مفصل کاسه‌ـساچمه در A و B نگهداری می‌شود و به بازوهای CE و DF جوش داده شده است. برای بارگذاری نشان داده شده کشش در کابل FG را به‌دست آورید.



شکل م ۱۵۰.۴

۱۵۱.۴ صفحه یکنواخت فولادی ABC به سطح ۰٫۷۵ m × ۰٫۵ و جرم ۴۰ kg را به کاسه‌ـساچمه در A و B متصل کرده‌اند. می‌دانیم که صفحه به دیوار عمودی بدون اصطکاک در D تکیه دارد. مطلوب است (الف) مکان D، (ب) عکس‌العمل در D.



شکل م ۱۵۱.۴

دوره و خلاصه فصل ۴

ن فصل اختصاص به مطالعهٔ تعادل اجسام صلب داشت، یعنی به وضعی که در آن نیروهای خارجی وارد بر یک جسم صلب تشکیل یک سیستم معادل با صفر را می‌دادند [بخش ۱.۴]. بنابراین داریم

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (۱.۴)$$

تجزیهٔ هر نیرو و هر گشتاور به مؤلفه‌های قائم آن، می‌توانیم شرایط لازم و کافی برای ادل یک جسم صلب را با شش معادلهٔ اسکالر زیر بیان کنیم:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad (۲.۴)$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \qquad (۳.۴)$$

از این معادله‌ها می‌توان برای تعیین نیروهای مجهول وارد بر یک جسم صلب یا عکس‌العملهای مجهول وارد از تکیه‌گاههای آن استفاده کرد.

موقع حل یک مسئلهٔ مربوط به تعادل یک جسم صلب لازم است که همهٔ نیروهای رد بر جسم را در نظر بگیرید. بنابراین، اول از همه باید یک نمودار جسم آزاد بکشید ، جسم مورد نظر و همهٔ مجهولها و نیروهای معلوم وارد بر آن را نشان بدهد [بخش ۲.۴].

در قسمت اول این فصل، تعادل سازه دو بعدی را در نظر گرفتیم؛ یعنی فرض ردیم که سازهٔ مورد نظر و نیروهای وارد بر آن همه در یک صفحه قرار دارند. دیدیم که ریک از عکس‌العملهای وارد بر سازه از تکیه‌گاهها می‌توانست شامل یک، دو، یا سه جهول باشد که بستگی به نوع تکیه‌گاه داشت [بخش ۳.۴].

در مورد یک سازه دوبعدی، معادلات (۱.۴) یا معادلات (۲.۴) و (۳.۴) تبدیل به سه معادلهٔ تعادل می‌شود، یعنی

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad (۵.۴)$$

، در آن A نقطهٔ دلبخواهی است که در صفحهٔ سازه است [بخش ۴.۴]. این معادلات می‌توان برای حل سه مجهول به کار برد. با آنکه به سه معادلهٔ تعادل (۵.۴) نمی‌شود ادلات دیگری اضافه کرد، اما به‌جای هریک از آنها می‌شود معادلهٔ دیگری به کار رد. بنابراین می‌توانیم مجموعه‌های دیگری از معادلات تعادل بنویسیم، مانند

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad (۶.۴)$$

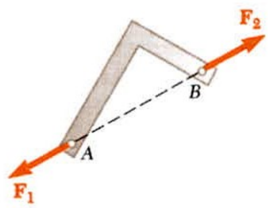
در آن نقطهٔ B طوری انتخاب می‌شود که خط AB موازی با محور y نباشد. بنابراین ادله‌های زیر را نیز می‌توان نوشت

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad (۷.۴)$$

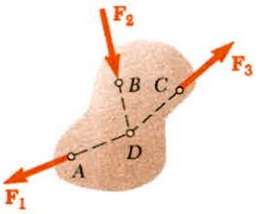
که در آن نقاط A، B، و C در امتداد یک خط قرار نگرفته باشند.

از آنجا که هر دسته از معادلات تعادل را فقط برای سه مجهول می‌شود حل کرد کس‌العملهای تکیه‌گاههای یک سازه صلب دوبعدی را اگر شامل بیش از سه مجهول شند، نمی‌شود کاملاً تعیین کرد؛ اصطلاحاً می‌گویند که آنها از نظر استاتیکی نامعین‌اند خش ۵.۴]. از طرف دیگر، اگر عکس‌العملها شامل کمتر از سه مجهول باشند، تعادل حت شرایط بارگذاری کلی برقرار نخواهد شد. به چنین سازه‌ای اصطلاحاً مقید ناقص می‌گویند. در مورد عکس‌العملهای دقیقاً شامل سه مجهول هیچ تضمینی وجود ندارد ه معادله‌های تعادل را بشود برای هر سه مجهول حل کرد. اگر تکیه‌گاهها طوری آرایش فته باشند که عکس‌العملها همرس یا موازی باشند، عکس‌العملها از نظر استاتیکی معین‌اند و اصطلاحاً می‌گویند که سازه به‌طور نامناسب مقید شده است.

به دو مورد خاص تعادل توجه کردیم. در بخش ۶.۴ جسم دونیرویی را جسمی ریف کردیم که فقط به دو نقطه‌اش نیرو وارد شود و نشان دادیم که برایند $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ این نیروها باید دارای بزرگی برابر، خط اثر یکسان و جهتهای خلاف هم باشند (شکل ۱۱.۴). خاصیتی که حل بعضی مسئله‌ها را در فصول بعد ساده خواهد کرد. در بخش ۷.۴ جسم سه‌نیرویی را جسم صلبی تعریف کردیم که فقط به سه نقطه‌اش نیرو وارد شده باشد، و نشان دادیم که برایند $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$ این نیروها باید یا همرس باشند (شکل ۱۲.۴) یا موازی. این خاصیت روش دیگری را برای مسئله‌های مربوط به جسم سه‌نیرویی فراهم می‌کند [مسئلهٔ نمونهٔ ۶.۴].



شکل ۱۱.۴



شکل ۱۲.۴

در قسمت دوم این فصل، تعادل جسم سه‌بعدی را در نظر گرفتیم، و دیدیم که عکس‌العملهای وارد بر جسم از تکیه‌گاههای آن می‌توانست بین یک تا شش مجهول داشته باشد، که این بستگی داشت به نوع تکیه‌گاه [بخش ۸.۴].

در حالت کلی تعادل جسم سه‌بعدی باید هر شش معادلهٔ تعادل اسکالر (۲.۴) و (۳.۴) را که در شروع این خلاصه آوردیم برای شش مجهول حل کرد [بخش ۹.۴]. البته، در بیشتر مسئله‌ها، می‌شود این معادله‌ها را راحت‌تر به‌دست آورد، اگر ابتدا بنویسیم

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (۱.۴)$$

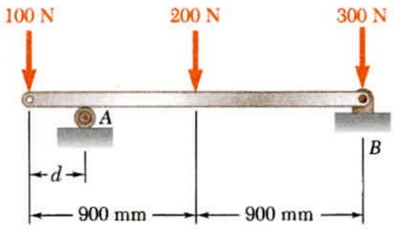
و نیروهای $\mathbf{F}$ و بردار مکانهای $\mathbf{r}$ را برحسب مؤلفه‌های اسکالر و بردارهای یکه بیان کنیم، در این صورت ضرب برداری را می‌شود توسط دترمینان و یا مستقیماً محاسبه کرد، و معادله‌های اسکالر مطلوب را می‌شود از مساوی صفر قراردادن بردارهای یکه به‌دست آورد [مسئله‌های نمونهٔ ۷.۴ تا ۹.۴].

دیدیم که با انتخاب مناسب نقطهٔ O ممکن است تا سه مؤلفه عکس‌العمل مجهول را بشود از محاسبهٔ $\Sigma \mathbf{M}_O$ در دومین رابطهٔ (۱.۴) حذف کرد. همچنین، عکس‌العملها در دو نقطهٔ A و B را می‌توان در بعضی از مسئله‌ها با نوشتن معادلهٔ $\Sigma M_{AB} = 0$ حذف کرد، که شامل محاسبهٔ گشتاورهای نیروها حول محوری است که دو نقطهٔ A و B را به‌هم متصل می‌کند [مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰.۴].

اگر عکس‌العملها شامل بیش از شش مجهول باشند، بعضی از عکس‌العملها از نظر استاتیکی نامعین‌اند؛ اگر عکس‌العملها شامل کمتر از شش مجهول باشند، جسم صلب فقط به‌طور ناقص مقید شده است. اگر عکس‌العملهای وابسته به تکیه‌گاهها موازی باشند یا یک خط را قطع کنند حتی با شش مجهول یا بیشتر هم جسم صلب به‌طور ناقص مقید خواهد بود.

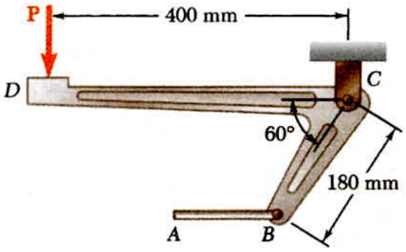
مسئله‌های دوره‌ای

۱۵۲.۴ حداکثر مقدار مجاز هر عکس‌العمل $360\ \text{N}$ است. از وزن تیر صرف‌نظر کنید. مطلوب است گستره مقادیر فاصله d را در حالتی که تیر بی‌خطر باشد.



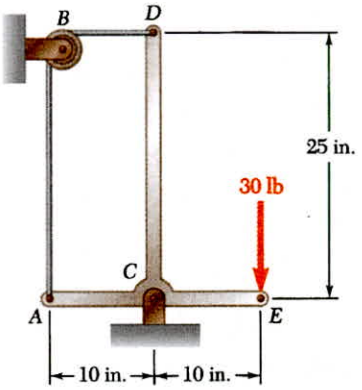
شکل م ۱۵۲.۴

۱۵۳.۴ اگر ماکزیمم مقدار مجاز عکس‌العمل $1000\ \text{N}$ C باشد، حداکثر کششی را که می‌توان در کابل AB وارد کرد، تعیین کنید.



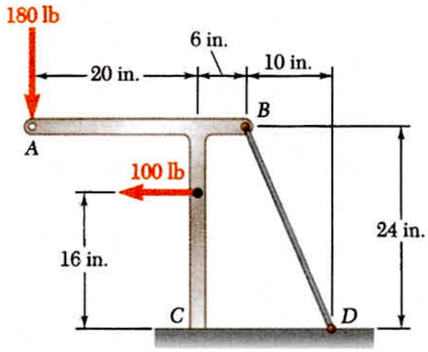
شکل م ۱۵۳.۴

۱۵۴.۴ معین کنید کشش در کابل ABD و عکس‌العمل در تکیه‌گاه C را. از اصطکاک صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۵۴.۴

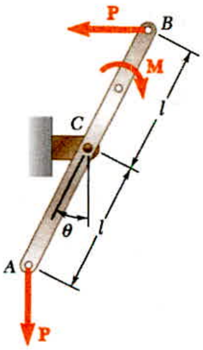
۱۵۵.۴ می‌دانیم کشش در سیم BD برابر $300\ \text{lb}$ است. عکس‌العمل تکیه‌گاه در نقطه ثابت C را در قاب نشان داده شده تعیین کنید.



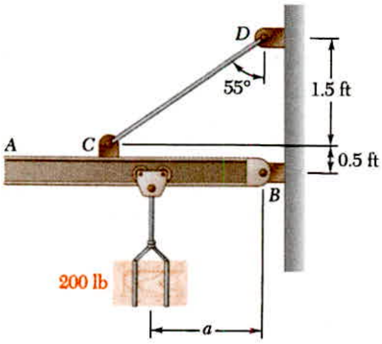
شکل م ۱۵۵.۴

۱۵۶.۴ میله AB تحت تأثیر کوپل M و دو نیرو هر یک به بزرگی P قرار می‌گیرد. (الف) معادله‌ای برحسب θ، P، M و l به‌دست آورید که وقتی میله در تعادل است در آن صدق کند. (ب) مقدار θ متناظر با تعادل را وقتی $M = 150\ \text{lb.in}$، $P = 20\ \text{lb}$ و $l = 6\ \text{in}$ باشند، به‌دست آورید.

۱۵۷.۴ صندوقی به وزن $200\ \text{lb}$ به سیستم تیر غلتکی نشان داده شده متصل است. اگر $a = 1.5\ \text{ft}$ باشد، مطلوب است (الف) کشش در کابل CD، (ب) عکس‌العمل در B.

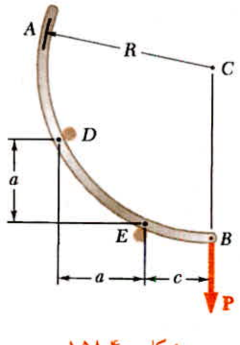


شکل م ۱۵۶.۴



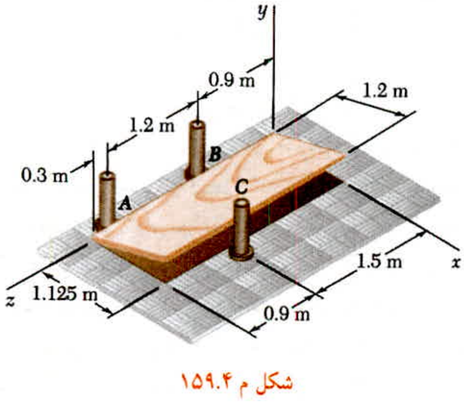
شکل م ۱۵۷.۴

۱۵۸.۴ میله AB را خم کرده و به شکل کمان دایره در آورده و آن را بین دو گل‌میخ D و ـ قرار داده‌ایم. میله بار $\mathbf{P}$ را در انتهای B نگه می‌دارد. از اصطکاک و وزن میله صرف‌نظر ک مطلوب است فاصله c متناظر با تعادل را وقتی $a = 25\ \text{mm}$ و $R = 125\ \text{mm}$ باشد



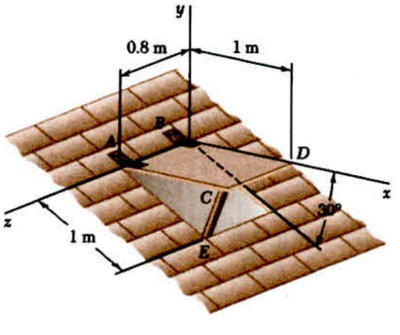
شکل م ۱۵۸.۴

۱۵۹.۴ ورق تخته چندلایی $1.2 \times 2.4\text{-m}$ به جرم $17\ \text{kg}$ موقتاً میان سه لوله تکیه‌گاه ـ داده شده است. لبه پایینی ورق روی طوقه‌های کوچک A و B ساکن است و لبه بالایی نـ بر لوله C متکی است. از اصطکاک تمام سطوح صرف‌نظر کنید. معین کنید عکس‌العملها ـ A، B، و C.



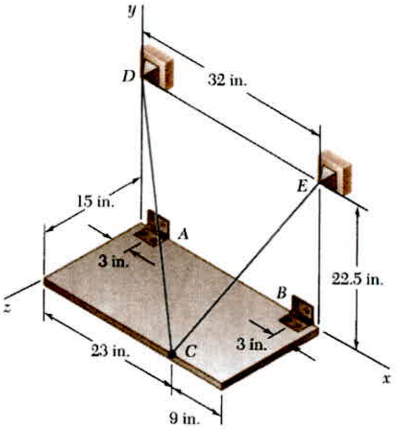
شکل م ۱۵۹.۴

۱۶۰.۴ سرپوش ۳۰ -kg برای باز کردن یک سقف در گوشه‌های A و B آویزان شده است. سقف با افق زاویه 30° تشکیل داده است و سرپوش در وضعیت افقی توسط میله CE نگهداری می‌شود. معین کنید (الف) بزرگی نیروی وارد توسط میله کوچک CE، (ب) عکس‌العملها در آویزها. فرض کنید که آویز در A هیچ‌گونه فشار محوری وارد نکند.



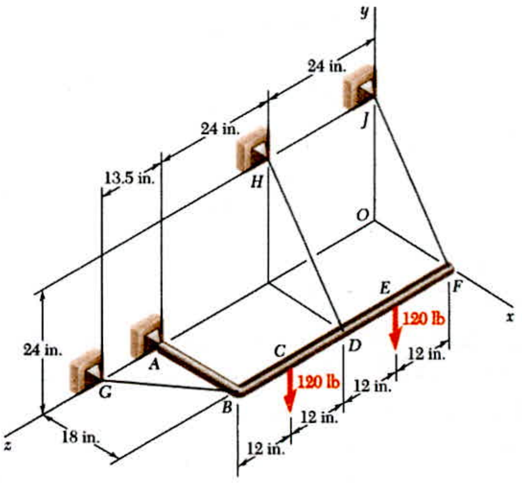
شکل م ۱۶۰.۴

۱۶۱.۴ صفحه مستطیل یکنواخت ۲۸۵-lb در وضع نشان داده شده توسط آویزهای A و B و کابل DCE که از روی قلاب C بدون اصطکاک عبور می‌کند، نگهداری می‌شود. فرض کنید کشش در دو بخش کابل یکسان باشد. معین کنید (الف) کشش در کابل، (ب) عکس‌العملها در A و B. فرض کنید آویز در B هیچ‌گونه فشار محوری وارد نکند.



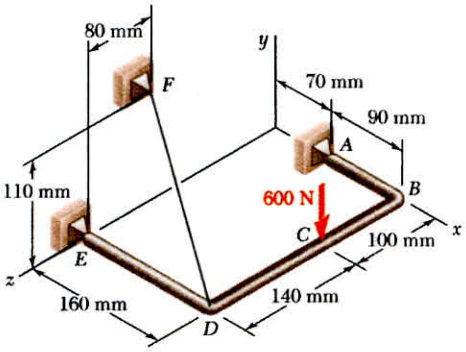
شکل م ۱۶۱.۴

۱۶۲.۴ عضو صلب ABF به شکل L توسط مفصل کاسه‌ـساچمه در A و B و توسط سه کابل نگهداری می‌شود. برای بارگذاری نشان داده شده مطلوب است کشش در هر کابل و عکس‌العمل در A.



شکل م ۱۶۲.۴

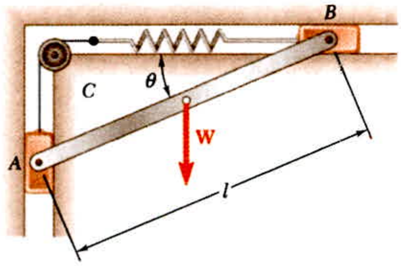
۱۶۳.۴ میله $ABDE$ خم شده و توسط مفصلهای کاسه‌ـساچمه در A و E و کابل DF نگهداری می‌شود. اگر بار ۶۰۰ -N مطابق شکل در نقطه C بر آن وارد شود، کشش در کابل را تعیین کنید.



شکل م ۱۶۳.۴

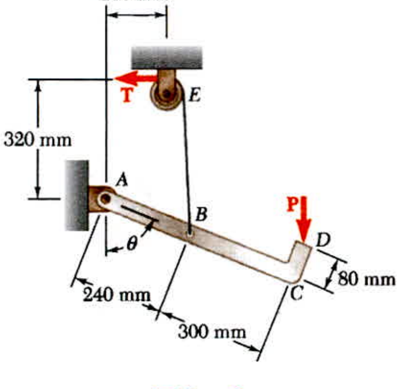
مسئله‌های کامپیوتری

۴.ک ۱ میله باریک AB به وزن W به قطعه‌های A و B که می‌توانند آزادانه در مسیرهای نشان داده شده حرکت کنند متصل است. ضریب ثابت فنر k است و فنر در حالتی که میله افقی است به‌صورت آزاد قرار دارد. از وزن قطعه‌ها صرف‌نظر کنید و معادله‌ای برحسب θ، W، l، و k به‌دست آورید، به‌نحوی که وقتی میله در تعادل است در آن صدق کند. اگر $W = 10$ lb و $l = 40$ in باشد، (الف) مقدار ثابت kی فنر را محاسبه و برحسب تابع زاویه θ برای $15^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ رسم کنید. (ب) دو مقدار برای زاویه θ متناظر حالت تعادل وقتی $k = 0/7$ lb/in است تعیین کنید.



شکل م ۴.ک۱

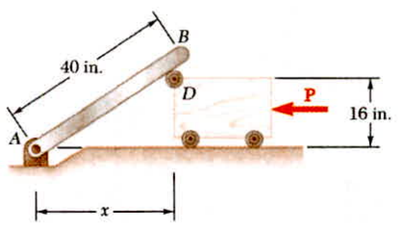
۴.ک ۲ وضعیت میله AB به شکل L توسط کابلی متصل به نقطهٔ B کنترل می‌شود. اگر میله باری به بزرگی $P = 200$ N را نگه دارد، با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی برنامه‌ای بنویسید که از آن بتوان برای محاسبه کشش T در کابل برحسب تابع θ برای مقادیر از صفر تا 120° استفاده کرد. معین کنید حداکثر کشش T_{max} و مقدار θ متناظر.



شکل م ۴.ک۲

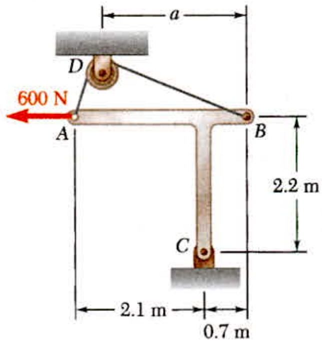
۴.ک ۳ وضعیت میله AB که برابر ۲۰ lb است توسط قطعهٔ نشان داده شده کنترل می‌شود

و با نیروی P به آهستگی به طرف چپ حرکت می‌کند. از اثر اصطکاک چشم‌پوشی کنید و با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری برنامه‌ای بنویسید که از آن بتوان مقدار Pی نیرو را برحسب تابع x، برای مقادیر با کاهش ۳۰ in تا ۰ را محاسبه کرد. ماکزیمم مقدار P و مقدار متناظر x را تعیین کنید.



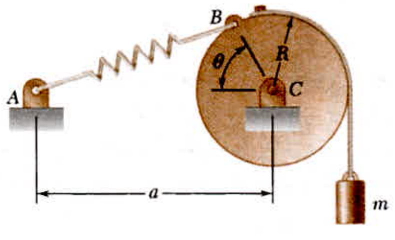
شکل م ۴.ک۳

۴.ک ۴ عضو ABC توسط یک پین وگیره در نقطه C وکابل غیرقابل کشش به‌طول ۳٫۵ m که به نقاط A و B متصل است، از روی قرقره بدون اصطکاک D عبور می‌کند. از جرم ABC و شعاع قرقره صرف‌نظر کنید. مطلوب است (الف) منحنی کشش کابل را برحسب تابع a به‌ازای ۰ ≤ a ≤ ۲٫۴ m رسم کنید. (ب) بیشترین مقدار a برای اینکه تعادل برقرار باشد.

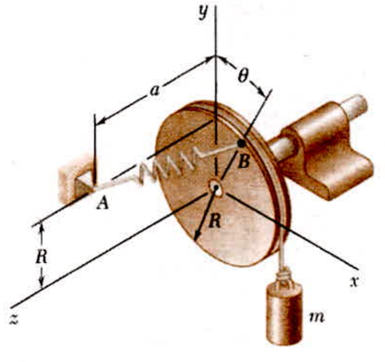


شکل م ۴.ک۴

۴.ک ۵ و ۴.ک ۶ ثابت فنر برابر k است و فنر در $\theta = ۰$ به حالت آزاد است. اگر $R = ۲۰۰$ mm، $a = ۴۰۰$ mm و $k = ۱$ kN/m باشد، با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی برنامه‌ای بنویسید تا از آن بتوان جرم m متناظر تعادل برحسب θ را برای مقادیر θ از ۰ تا ۹۰° محاسبه کرد. مقدار θ متناظر تعادل وقتی $m = ۲$ kg است را تعیین کنید.

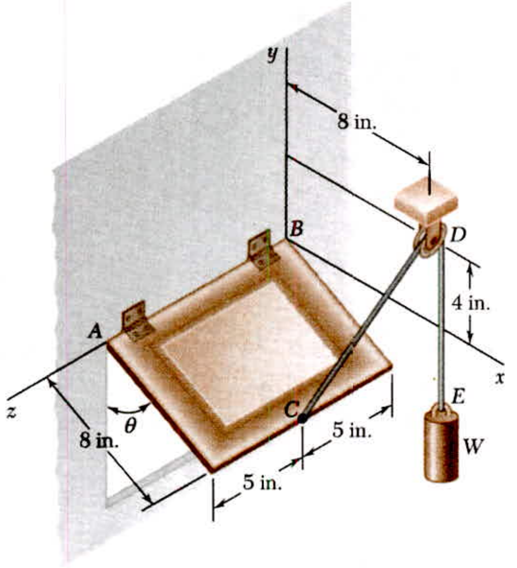


شکل م ۴.ک۵



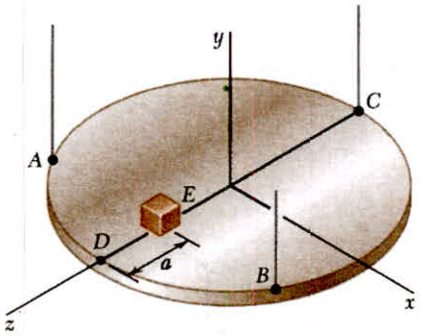
شکل م ۴.ک۶

۴.ک ۷ یک ورق ۱۰ × ۸ in به وزن W مساوی ۴۰ lb توسط لولاهایی در امتداد لبه AB نگهداری می‌شود. کابل CDE متصل به صفحه در نقطه C از روی قرقره کوچک در نقطهٔ D گذشته و استوانه‌ای به وزن W را نگه می‌دارد. از اثر اصطکاک چشم‌پوشی کنید و با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری، برای محاسبه وزن استوانه متناظر حالت تعادل برحسب θ برای مقادیر θ از صفر تا ۹۰° برنامه‌ای بنویسید. مقدار θ متناظر حالت تعادل را اگر $W = ۲۰$ lb باشد به‌دست آورید.



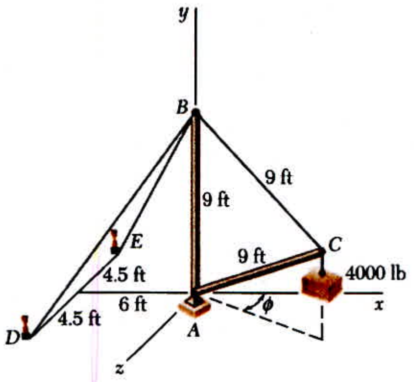
شکل م ۴.ک۷

۴.ک ۸ ورق یکنواخت دایره‌ای به شعاع ۳۰۰ mm و جرم ۲۶ kg که توسط سه سیم عمودی به فواصل مساوی در اطراف لبه‌اش متصل است، نگهداری می‌شود. قطعه کوچک ۳ کیلوگرمی E روی ورق در نقطه D قرار دارد و سپس به آهستگی در امتداد قطر CD حرکت می‌کند تا به نقطه C برسد. محاسبه کنید (الف) کشش در سیمهای A و C را برحسب تابع a که در آن a فاصله بین قطعه از نقطه D است، (ب) مقدار a را برای وقتی که کشش در سیمهای A و C حداقل باشد.



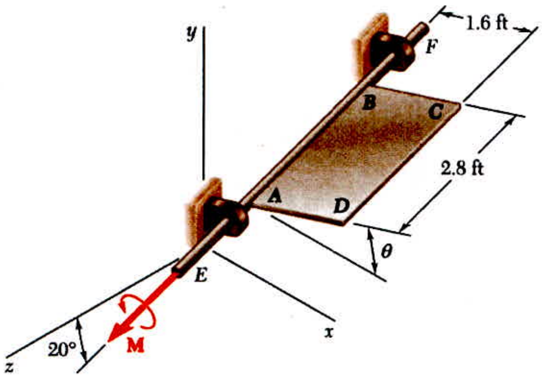
شکل م ۴.ک۸

۴.ک ۹ دستگاه بالاکش نشان داده شده صندوق ۴۰۰۰ lb- را نگهداری می‌کند. دیرک این دستگاه توسط مفصل کاسه ـ ساچمه‌ای در نقطه A و دو کابل به نقاط D و E متصل است. می‌دانیم که دیرک در صفحه قائم قرار دارد و با صفحه xy زاویهٔ ϕ تشکیل می‌دهد. با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری کشش در هر کابل را برحسب تابع ϕ برای مقادیر ϕ از صفر تا ۴۰° محاسبه کنید. مقدار ϕ را به نحوی که کشش در کابل BE ماکزیمم باشد، به‌دست آورید.



شکل م ۴.ک۹

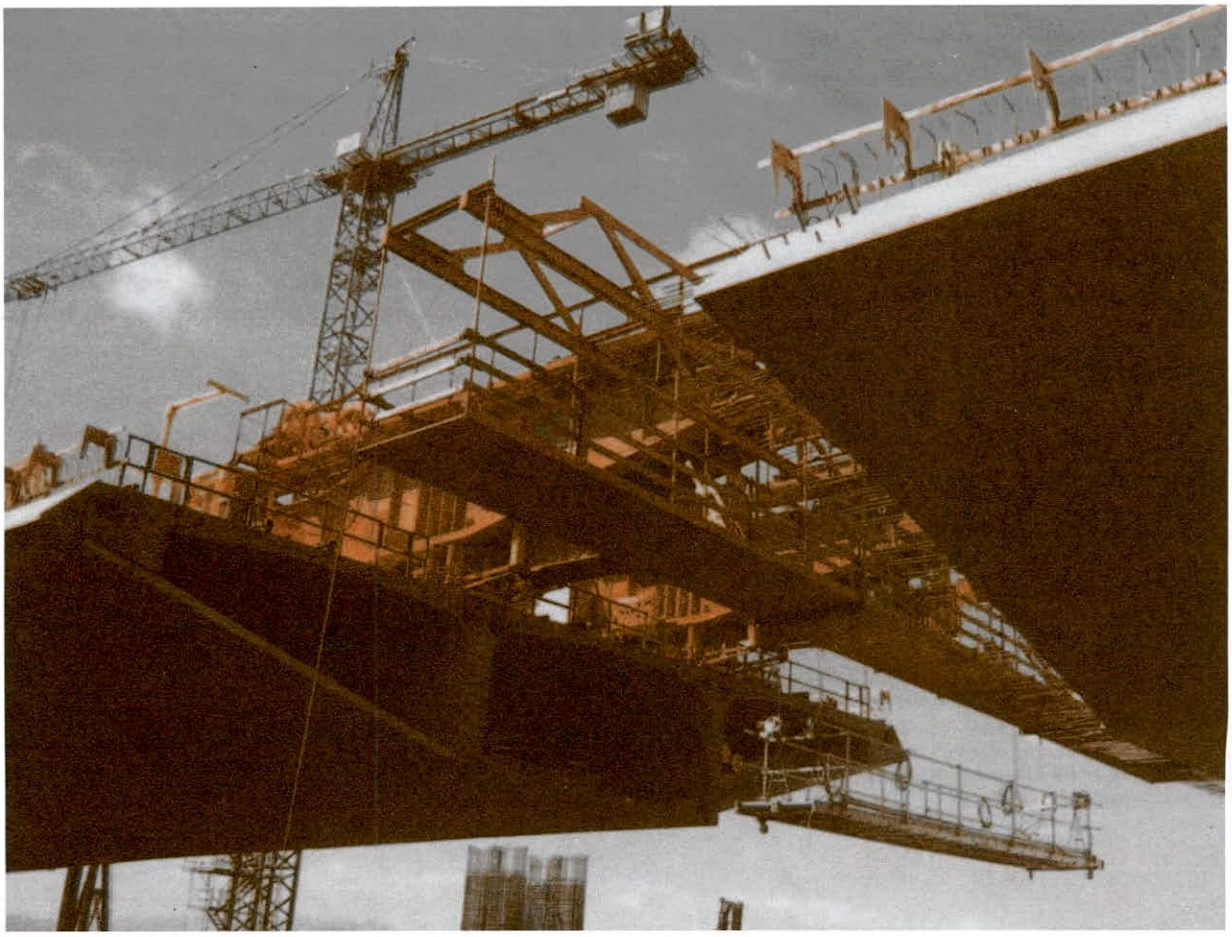
۴.ک ۱۰ ورق یکنواخت فولادی $ABCD$ به محور EF جوش داده شده و در وضعیت نشان داده شده با کوپل M نگهداری می‌شود. اگر طوقه‌ها از لغزیدن محور در یاتاقانها جلوگیری کنند و محور در صفحه yx قرار داشته باشد، بزرگی M کوپل را برحسب θ، به‌ازای $0 \leq \theta \leq 90°$ محاسبه کنید.



شکل م ۴.ک۱۰

فصل ۵

نیروهای گسترده:
مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی



در شکل بخشی از پل دره‌گذر «اسکای‌ری» که بین سانفرانسیسکو و اوکلاند قرار دارد نشان داده شده است. در این فصل مفهوم مرکز هندسی یک سطح بیان می‌شود. همچنین رابطه میان مرکز هندسی و رفتار جاده دره‌گذر بررسی می‌شود.

نیروهای گسترده: مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

۱.۵ مقدمه

سطحها و خطها

۲.۵ مرکز گرانی جسم دوبعدی

۳.۵ مرکزهای هندسی سطوح و خطوط

۴.۵ گشتاورهای اول سطوح و خطوط

۵.۵ ورقها و سیمهای مرکب

۶.۵ تعیین مرکزهای هندسی به روش انتگرال‌گیری

۷.۵ قضیه‌های پاپوس_گلدینوس

۸.۵ بارهای گسترده روی تیرها

۹.۵ نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور

حجمها

۱۰.۵ مرکز گرانی جسم سه‌بعدی_ مرکز هندسی حجم

۱۱.۵ جسمهای مرکب

۱۲.۵ تعیین مرکز هندسی حجم به روش انتگرال‌گیری

۱.۵ مقدمه

تا اینجا فرض کرده‌ایم که جاذبهٔ وارد از زمین بر یک جسم صلب را می‌توانیم با یک تک‌نیروی $\mathbf{W}$ نشان بدهیم. دیدیم که این نیرو، که آن را نیروی گرانی یا وزن جسم می‌نامند، باید بر مرکز گرانی جسم وارد شود (بخش ۲.۳). اما درواقع، زمین به تک‌تک ذرات تشکیل‌دهندهٔ جسم نیرو وارد می‌کند. بنابراین اثر زمین بر روی جسم صلب را می‌بایست با تعداد زیادی نیروهای کوچکتر نشان داد که در کل جسم توزیع شده‌اند. با وجود این در این فصل خواهیم دید که به‌جای همهٔ این نیروهای کوچک می‌توانیم همان تک‌نیروی معادل $\mathbf{W}$ را به‌کار ببریم. روش تعیین مرکز گرانی یعنی نقطهٔ اثر برایند $\mathbf{W}$، برای جسمهای با شکلهای مختلف را نیز خواهیم آموخت.

در قسمت اول این فصل، اجسام دوبعدی، مانند ورقهای تخت و سیمهای واقع در صفحه را در نظر خواهیم گرفت و همراه با تعیین مرکز گرانی یک ورق یا یک سیم، دو مفهوم وابسته به آن، یعنی مفهوم مرکز هندسی یک سطح یا یک خط، و مفهوم گشتاور اول یک سطح یا یک خط نسبت به یک محور را هم معرفی خواهیم کرد.

همچنین خواهیم دید که محاسبهٔ مساحت یک سطح حاصل از دوران، یا یک حجم حاصل از دوران، مستقیماً بستگی به تعیین مرکز هندسی خط یا سطح مولد آن سطح یا جسم حاصل از دوران دارد (قضیه‌های پاپوس_گلدینوس). و، چنانکه در بخشهای ۸.۵ و ۹.۵ خواهیم دید، تعیین مرکز هندسی یک سطح تحلیل تیرهای واقع در معرض بارهای گسترده، و محاسبهٔ نیروهای وارد بر سطوح مستطیل شکل غوطه‌ور در مایع مانند دریچه‌های هیدرولیکی و قسمتهای تشکیل‌دهندهٔ سدها را تسهیل می‌کند.

در قسمت آخر این فصل روش تعیین مرکز گرانی اجسام سه‌بعدی، و نیز مرکز حجم و گشتاورهای اول آن حجم را نسبت به صفحه‌های مختصات خواهیم آموخت.

سطحها و خطها

۲.۵ مرکز گرانی جسم دوبعدی

ابتدا یک ورق تخت افقی را در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۵). این ورق را می‌توانیم به n جزء کوچک تقسیم کنیم. مختصات جزء اول را با $x_۱$ و $y_۱$، مختصات جزء دوم را با $x_۲$ و $y_۲$ نشان می‌دهیم و به همین ترتیب نیروهای ناشی از اثر زمین بر اجزاء ورق را به‌ترتیب با $\Delta\mathbf{W}_۱$، $\Delta\mathbf{W}_۲$، ...، $\Delta\mathbf{W}_n$ نشان می‌دهیم. این نیروها یا وزنها امتدادی به طرف مرکز زمین دارند، اما در عمل می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ آنها هم موازی‌اند. بنابراین، برایند آنها تک‌نیرویی در همان راستا خواهد بود. بزرگی این (W) از جمع جبری بزرگی وزنهای جزئی به‌دست می‌آید:

$$\Sigma F_z: \quad W = \Delta W_۱ + \Delta W_۲ + \cdots + \Delta W_n$$

برای به‌دست آوردن مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نقطهٔ G، یعنی نقطهٔ اثر برایند $\mathbf{W}$، گشتاور $\mathbf{W}$ نسبت به محورهای x و y را با جمع گشتاورهای متناظر وزنهای جزئی برابر می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: &\quad \bar{x}W = x_۱\Delta W_۱ + x_۲\Delta W_۲ + \cdots + x_n W_n \\ \Sigma M_x: &\quad \bar{y}W = y_۱\Delta W_۱ + y_۲ W_۲ + \cdots + y_n\Delta W_n \end{aligned} \qquad (۱.۵)$$

حالا اگر تعداد اجزایی را که ورق به آنها تقسیم شده، افزایش و اندازهٔ هر جزء را کاهش بدهیم، در حد عبارتهای زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad (۲.۵)$$

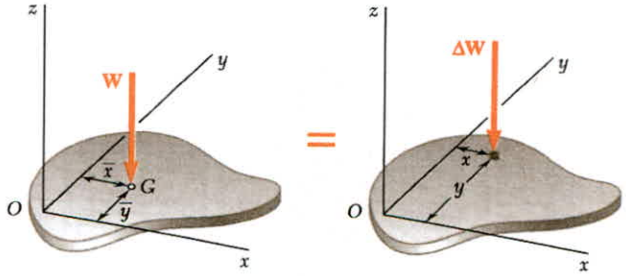
این معادله‌ها معرف وزن $\mathbf{W}$ و مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز گرانی G ورق تخت‌اند. هم معادله‌ها را می‌شود برای سیم واقع در صفحهٔ xy هم به‌دست آورد (شکل ۲.۵). د. چنین موردی، مشاهده خواهیم کرد که مرکز گرانی G در حالت کلی بر روی خود سیم قرار نمی‌گیرد.

۳.۵ مرکزهای هندسی سطوح و خطوط

در مورد یک ورق تخت همگن و با ضخامت یکنواخت، بزرگی وزن (ΔW) یک ورق را می‌شود به این صورت نوشت

$$\Delta W = \gamma t\,\Delta A$$

عکس ۱.۵ برای موازنهٔ دقیق اجزای یک متحرک باید مرکز گرانی و مرکز هندسی را که از مطالب مهم این فصل است، درک کنیم.



شکل ۱.۵ مرکز گرانی یک صفحه.

در آن γ وزن مخصوص ماده (وزن در واحد حجم)، t ضخامت ورق، و ΔA مساحت جزء است.

به همین ترتیب، بزرگی وزن کل ورق (W) را می‌شود به صورت

$$W = \gamma t A$$

نوشت که A مساحت کل ورق است.

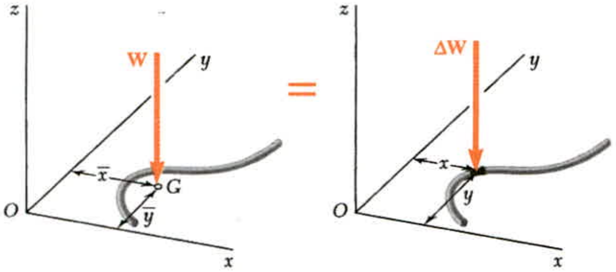
اگر از یکاهای U.S. استفاده کنیم، وزن مخصوص، γ، برحسب lb/ft^3، ضخامت، t، به فوت، و سطوح ΔA و A به فوت مربع، می‌بینیم که ΔW و W برحسب پوند به‌دست خواهد آمد. اگر از یکاهای SI استفاده کنیم γ برحسب N/m^3، t به متر، و سطوح ΔA و A به مترمربع خواهد بود؛ وزنهای ΔW و W به نیوتون به‌دست خواهد آمد.[1]

حالا اگر به جای ΔW و W در معادله‌های گشتاور (۱.۵) معادلهای آنها را قرار دهیم و تمام جمله‌ها را بر γt تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود

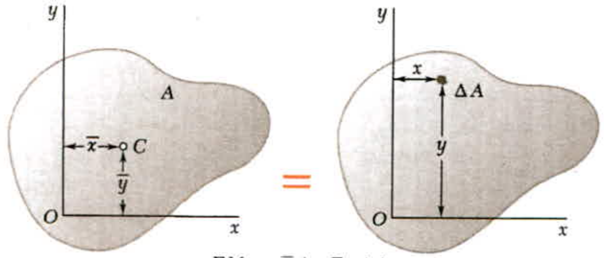
$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \cdots + x_n\Delta A_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \cdots + y_n\Delta A_n$$

اگر تعداد اجزایی را که سطح A به آنها تقسیم شده افزایش، و اندازهٔ هر جزء را کاهش

۱. باید توجه داشت که در دستگاه SI یکاها، یک ماده معمولاً به‌جای اینکه با وزن مخصوص γ مشخص شود، با چگالی ρ (جرم در واحد حجم) مشخص می‌شود. وزن مخصوص ماده می‌تواند از رابطهٔ $\gamma = \rho g$ به‌دست آید که در آن $g = ۹/۸۱\ m/s^2$. چون ρ برحسب kg/m^3 است پس γ برحسب $(kg/m^3)(m/s^2)$ است، یعنی برحسب N/m^3.



شکل ۲.۵ مرکز گرانی یک سیم.



شکل ۳.۵ مرکز هندسی یک سطح.

بدهیم، در حد به‌دست می‌آوریم

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \qquad (۳.۵)$$

این معادله‌ها مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز گرانی یک ورق همگن را نشان می‌دهند. نقطهٔ C به مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را مرکز هندسی C سطح A ورق هم می‌گویند (شکل ۳.۵). اگر ورق همگن نباشد، این معادله‌ها را نمی‌شود برای تعیین مرکز گرانی آن به کار برد؛ اما با این حال آنها معرف مرکز هندسی سطح‌اند.

در مورد یک سیم همگن با سطح مقطع یکنواخت، بزرگی (ΔW) وزن یک جزء سیم را می‌شود چنین بیان کرد

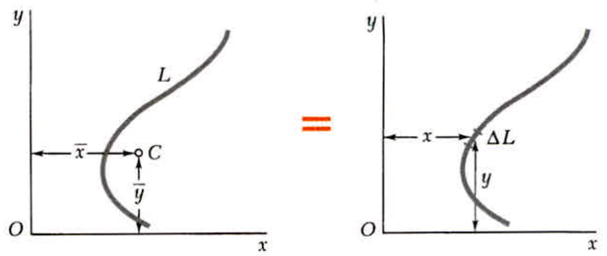
$$\Delta W = \gamma a\,\Delta L$$

که در آن γ وزن مخصوص ماده، a مساحت سطح مقطع سیم، و ΔL طول جزء است. بنابراین مرکز گرانی سیم منطبق است بر مرکز هندسی خط L که مشخص کنندهٔ شکل سیم است (شکل ۴.۵). مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز هندسی خط L از معادله‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \qquad (۴.۵)$$

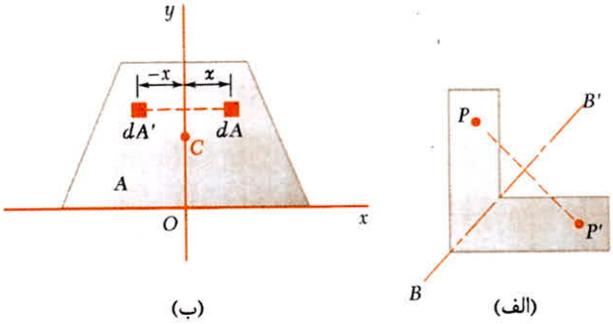
۴.۵ گشتاورهای اول سطوح و خطوط

انتگرال $\int x dA$ در معادله‌های (۳.۵) از بخش قبل را گشتاور اول سطح A نسبت به‌محور y می‌نامند و آن را با Q_y نشان می‌دهند. به‌همین ترتیب، به انتگرال $\int y dA$ هم می‌گویند گشتاور اول سطح A نسبت به محور x و آن را با Q_x نشان می‌دهند. پس



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}L = \Sigma x\,\Delta L$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}L = \Sigma y\,\Delta L$$

شکل ۴.۵ مرکز هندسی یک خط.



شکل ۵.۵

می‌نویسیم

$$Q_y = \int x\,dA \qquad Q_x = \int y\,dA \tag{۵.۵}$$

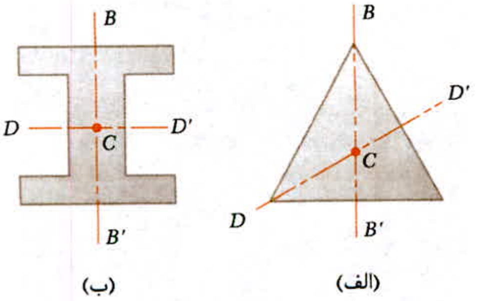
با مقایسهٔ معادله‌های (۳.۵) با معادله‌های (۵.۵)، ملاحظه می‌کنیم که گشتاورهای اول سطح A را می‌شود به صورت حاصلضرب سطح و مختصات مرکز هندسی آن بیان کرد

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{۶.۵}$$

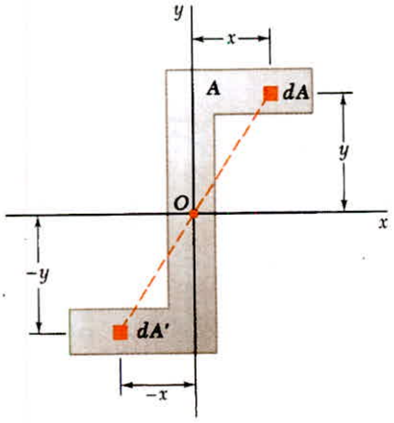
از معادله‌های (۶.۵) نتیجه می‌شود که مختصات مرکز هندسی هر سطح را می‌شود از تقسیم گشتاورهای اول آن سطح بر خود سطح به‌دست آورد. گشتاورهای اول سطح برای تعیین تنشهای برشی در تیرهای تحت بارگذاریهای عرضی در مقاومت مصالح نیز مفید است. سرانجام، با توجه به معادله‌های (۶.۵) مشاهده می‌کنیم که اگر مرکز هندسی یک سطح بر روی یکی از محورهای مختصات واقع باشد، گشتاور اول آن سطح نسبت به آن محور صفر است، و عکس آن نیز صادق است.

رابطه‌هایی مشابه با معادله‌های (۵.۵) و (۶.۵) را می‌توان برای تعریف گشتاورهای اول یک خط نسبت به محورهای مختصات به کار برد و این گشتاورها را به صورت حاصلضرب طول L خط و مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز هندسی آن بیان کرد.

سطح A را نسبت به محور BB' متقارن می‌گویند، به شرطی که به‌ازای هر نقطهٔ P از آن، نقطه‌ای مانند P' بر روی همان سطح بتوان یافت به طوری که خط PP' بر BB' عمود باشد و محور این خط را به دو قسمت مساوی تقسیم کند [شکل ۵.۵ (الف)]. همچنین خط L را نسبت به BB' متقارن می‌گویند اگر در شرایط مشابه بالا صدق کند. وقتی سطحی مانند A یا خطی مانند L دارای یک محور تقارن BB' باشد، گشتاور اول آن نسبت به BB' صفر است و مرکز هندسی‌اش بر روی آن محور قرار دارد. مثلاً، در مورد سطح A در شکل ۵.۵ (ب)، که نسبت به محور y متقارن



شکل ۶.۵



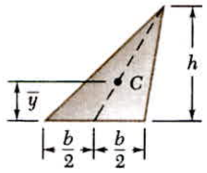
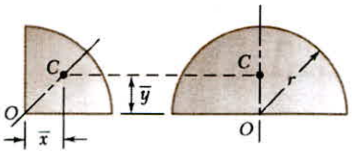
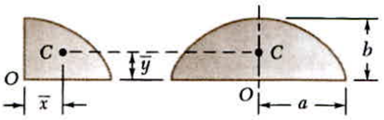
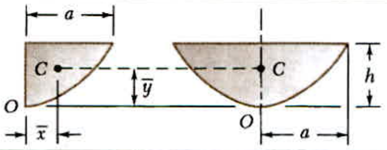
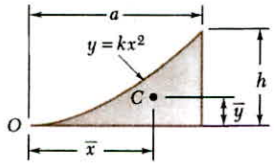
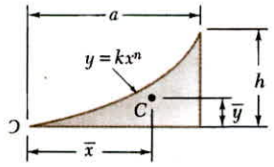
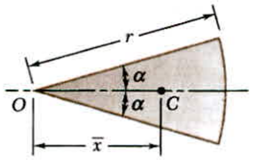
شکل ۷.۵

است، می‌بینیم که متناظر با هر جزء سطح dA به طول x، یک جزء سطح dA' با همان مساحت به طول $-x$ وجود دارد. نتیجه می‌شود که اولین انتگرال معادلهٔ (۵.۵) صفر است، و بنابراین خواهیم داشت $Q_y = 0$. همچنین از نخستین معادلهٔ (۶.۵) نتیجه می‌شود که $\bar{x} = 0$. پس اگر سطحی مانند A یا خطی مانند L دارای یک محور تقارن باشد، مرکز هندسی آن C بر روی آن محور قرار دارد.

علاوه بر این اگر سطح یا خطی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز هندسی‌اش C باید در محل تلاقی دو محور تقارن قرار داشته باشد (شکل ۶.۵). این ویژگی ما امکان می‌دهد که مرکز هندسی سطحهایی مانند دایره، بیضی، مربع، مستطیل، مثلث متساوی‌الاضلاع یا سایر شکلهای متقارن، و نیز مرکز هندسی خطوطی به‌شکل پیرامون دایره، پیرامون مربع و غیره را فوراً تعیین کنیم.

سطح A را نسبت به مرکز O متقارن می‌گویند، اگر متناظر با هر جزء سطح dA به مختصات x و y یک جزء سطح dA' به مختصات $-x$ و $-y$ وجود داشته باشد (شکل ۷.۵). در این صورت نتیجه می‌شود که انتگرالهای معادله‌های (۵.۵) هر دو صفرند و $Q_x = Q_y = 0$. همچنین از معادله‌های (۳.۵) چنین برمی‌آید که $\bar{x} = \bar{y} = 0$ یعنی مرکز هندسی سطح بر مرکز تقارن آن O منطبق است. به همین ترتیب می‌شود نشان داد که مرکز هندسی هر خط متقارن نسبت به مرکز O، بر O منطبق است.

باید توجه داشته باشید که یک شکل دارای مرکز متقارن الزاماً دارای محور تقارن نیست (شکل ۷.۵)، در حالی که یک شکل دارای دو محور تقارن الزاماً دارای مرکز تقارن نیست [شکل ۶.۵ (الف)]. البته اگر شکلی دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد محل تلاقی این محورها مرکز تقارن است [شکل ۶.۵ (ب)].

شکل		$\bar{x}$	$\bar{y}$	مساحت
سطح مثلثی			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
سطح ربع دایره‌ای		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
سطح نیم دایره‌ای		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
سطح ربع بیضوی		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
سطح نیم بیضوی		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
سطح بیضوی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
سطح سهموی		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
اسپاندرل سهموی		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
اسپاندرل کلی		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
قطاع دایره‌ای		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

شکل ۸.۵ (الف) مرکز هندسیهای سطوح با شکلهای معمول.

دربارهٔ مرکزهای هندسی سطوح و خطوط نامتقارن و سطوح و خطوطی که تنها ـ محور تقارن دارند در بخشهای ۶.۵ و ۷.۵ صحبت خواهیم کرد. مرکزهای هندسی طوح و خطوطی که شکل متداول دارند در شکل ۸.۵ (الف) و (ب) نشان داده شده است.

۵.ـ ورقها و سیمهای مرکب

ـر بسیاری از موارد، ورق تخت را می‌شود به سطوحی مانند مستطیل، مثلث یا ـیر شکلهای معمول نشان داده شده در شکل ۸.۵ (الف) تقسیم کرد. طول مختلف مرکز گرانی G را می‌توانیم از روی طولهای $\bar{x}_1$، و $\bar{x}_2$، ...، $\bar{x}_n$ مرکز گرانیهای ـمتهای مختلف تعیین کنیم، به این ترتیب که گشتاور وزن کل ورق حول محور y برابر با مجموع گشتاورهای وزنهای قسمتهای مختلف حول همان محور قرار بدهیم (شکل ۹.۵). عرض $\bar{Y}$ مرکز گرانی ورق هم به‌همین ترتیب با مساوی قراردادن گشتاورها حول محور x به‌دست می‌آید. یعنی می‌توانیم بنویسیم

$$\Sigma M_y : \bar{X}(W_1+W_2+\cdots+W_n) = \bar{x}_1W_1+\bar{x}_2W_2+\cdots+\bar{x}_nW_n$$

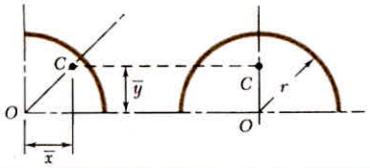
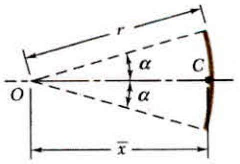
$$\Sigma M_x : \bar{Y}(W_1+W_2+\cdots+W_n) = \bar{y}_1W_1+\bar{y}_2W_2+\cdots+\bar{y}_nW_n$$

یا به اختصار

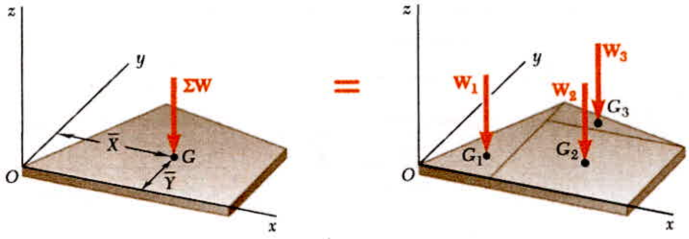
$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad (۷.۵)$$

از روی این معادله‌ها می‌توانیم مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکز گرانی ورق را پیدا کنیم.

اگر ورق همگن و با ضخامت یکنواخت باشد، مرکز گرانی آن بر مرکز هندسی سطح آن، C، منطبق است. طول $\bar{X}$ مرکز هندسی سطح با توجه به اینکه گشتاور اول Q_y

شکل		$\bar{y}$	$\bar{x}$	مساحت
قوس ربع دایره‌ای		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
قوس نیم‌دایره‌ای		$\frac{2r}{\pi}$	0	πr
قوس دایره‌ای		0	$\frac{r \sin\alpha}{\alpha}$	$2\alpha r$

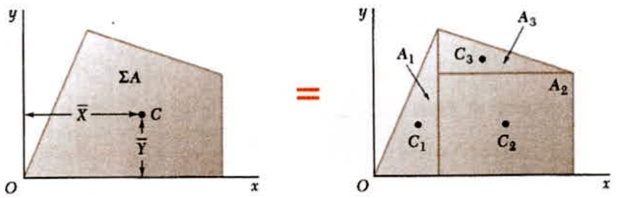
شکل ۸.۵ (ب) مرکز هندسیهای خطوط با شکلهای معمول.



$\Sigma M_y: \quad \bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W$

$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W$

شکل ۹.۵ مرکز گرانی یک ورق مرکب.



$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A$

$Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A$

شکل ۱۰.۵ مرکز هندسی یک سطح مرکب.

سطح مرکب نسبت به محور y را می‌توان هم به‌صورت حاصلضرب $\bar{X}$ و مساحت کل، و هم به صورت مجموع گشتاورهای اول جزء سطحها نسبت به محور y بیان کرد، به‌دست می‌آید (شکل ۱۰.۵). عرض $\bar{Y}$ مرکز هندسی نیز به همین ترتیب با در نظر گرفتن گشتاور اول Q_x سطح مرکب پیدا می‌شود. داریم

$$Q_y = \bar{X}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \cdots + \bar{x}_n A_n$$

$$Q_x = \bar{Y}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \cdots + \bar{y}_n A_n$$

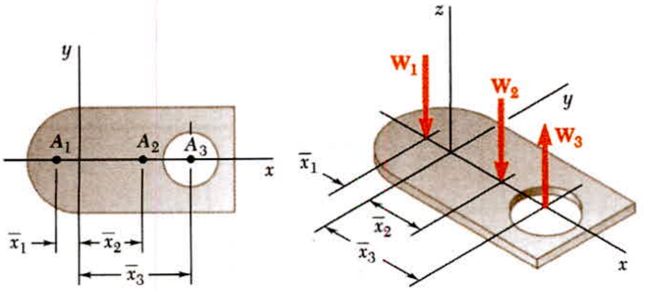
یا به اختصار

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \tag{۸.۵}$$

این معادله‌ها گشتاورهای اول سطح مرکب را به‌دست می‌دهند، می‌توان آنها را برای تعیین مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکز هندسی سطح نیز حل کرد.

باید دقت کرد که علامت هر گشتاور درست ثبت شود. گشتاورهای اول سط[ح] درست مانند گشتاورهای نیروها، ممکن است مثبت یا منفی باشند. مثلاً گشتاور ا[ول] سطحی که مرکز هندسی آن در سمت چپ محور y قرار دارد، نسبت به آن محور منف[ی] خواهد بود. همچنین، مساحت سوراخ را باید با علامت منفی ثبت کرد (شکل ۱۱.۵).

به همین ترتیب در بیشتر موارد می‌شود مرکز گرانی سیم مرکب یا مرکز هندسی خط مرکب را با تقسیم سیم یا خط به اجزای ساده‌تر به‌دست‌آورد (نگاه کنید به م[سئلهٔ] نمونهٔ ۲.۵).

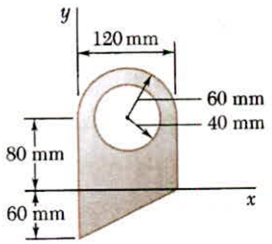


		$\bar{x}$	A	$\bar{x}A$
نیم دایره	A_1	−	+	−
مستطیل کامل	A_2	+	+	+
سوراخ دایره‌ای	A_3	+	−	−

شکل ۱۱.۵

مسئلهٔ نمونه ۱.۵

برای سطح نشان داده شده، (الف) گشتاورهای اول نسبت به محورهای x و y، و (ب) محل مرکز هندسی را تعیین کنید.



:

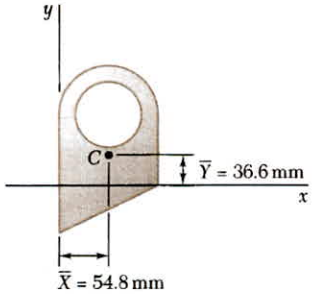
اجزای سطح. این سطح عبارت است از مجموع یک مستطیل، یک مثلث، و یک دایره که یک دایره از آن برداشته شده است. با استفاده از محورهای مختصات نشان داده شده، مساحت و مختصات مرکز هندسی هریک از این سطوح را تعیین، و در جدول زیر ثبت می‌کنیم. مساحت دایره را با علامت منفی نشان می‌دهیم، چون باید را از مجموع مساحتهای سایر سطوح کم کنیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض $\bar{y}$ مرکز سی مثلث برای محورهای نشان داده شده منفی است. گشتاورهای اول هر سطح سبت به محورهای مختصات محاسبه و در جدول وارد می‌کنیم.

الف) گشتاورهای اول سطح. با استفاده از معادله‌های (۸.۵)، می‌نویسیم

$$Q_x = \Sigma \bar{y}A = ۵۰۶{,}۲ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۳ \qquad Q_x = ۵۰۶ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۳ \blacktriangleleft$$

$$Q_y = \Sigma \bar{x}A = ۷۵۷{,}۷ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۳ \qquad Q_y = ۷۵۸ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۳ \blacktriangleleft$$

ب) محل مرکز هندسی. با قراردادن مقادیر به‌دست آمده از جدول در معادله‌های



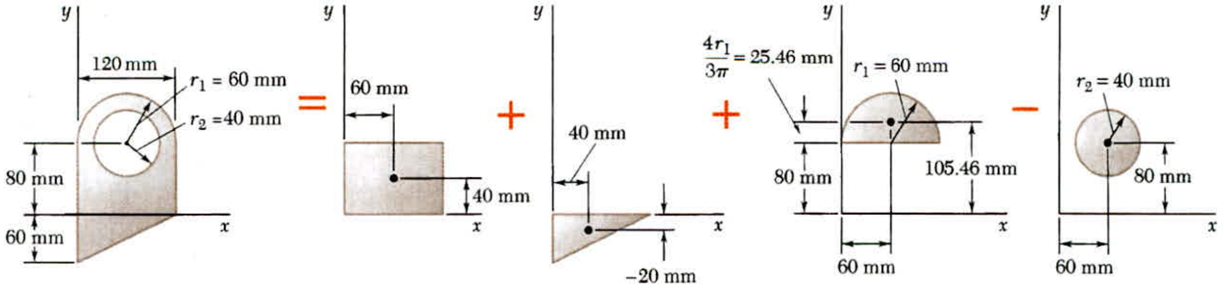
مشخص‌کنندهٔ مرکز هندسی سطح مرکب، داریم

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A: \quad \bar{X}(۱۳{,}۸۲۸ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۲) = ۷۵۷{,}۷ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۳$$

$$\bar{X} = ۵۴{,}۸\ \text{mm} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A: \quad \bar{Y}(۱۳{,}۸۲۸ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۲) = ۵۰۶{,}۲ \times ۱۰^۳\ \text{mm}^۳$$

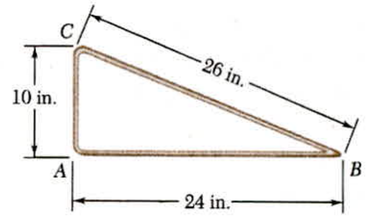
$$\bar{Y} = ۳۶{,}۶\ \text{mm} \blacktriangleleft$$



$\bar{y}A$, mm^۳	$\bar{x}A$, mm^۳	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}$, mm	A, mm^۲	سطوح
$+۳۸۴ \times ۱۰^۳$	$+۵۷۶ \times ۱۰^۳$	۴۰	۶۰	$(۱۲۰)(۸۰) = ۹{,}۶ \times ۱۰^۳$	مستطیل
-۷۲×۱۰^۳	$+۱۴۴ \times ۱۰^۳$	-۲۰	۴۰	$\frac{۱}{۲}(۱۲۰)(۶۰) = ۳{,}۶ \times ۱۰^۳$	مثلث
$+۵۹۶{,}۴ \times ۱۰^۳$	$+۳۳۹{,}۳ \times ۱۰^۳$	۱۰۵٫۴۶	۶۰	$\frac{۱}{۲}\pi(۶۰)^۲ = ۵{,}۶۵۵ \times ۱۰^۳$	نیم‌دایره
$-۴۰۲{,}۲ \times ۱۰^۳$	$-۳۰۱{,}۶ \times ۱۰^۳$	۸۰	۶۰	$-\pi(۴۰)^۲ = -۵{,}۰۲۷ \times ۱۰^۳$	دایره
$\Sigma \bar{y}A = +۵۰۶{,}۲ \times ۱۰^۳$	$\Sigma \bar{x}A = +۷۵۷{,}۷ \times ۱۰^۳$			$\Sigma A = ۱۳{,}۸۲۸ \times ۱۰^۳$	

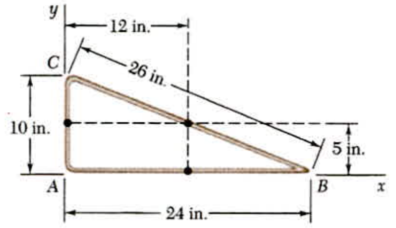
مسئلهٔ نمونه ۲.۵

ل نشان داده شده از یک سیم همگن ساخته شده است. مرکز گرانی آن را تعیین ..



ن:

ن شکل از سیم همگن تشکیل شده است، مرکز گرانی آن را می‌توان با تعیین مرکز سی خط نظیر به‌دست آورد. با انتخاب محورهای مختصات نشان داده شده به A، مختصات مرکز هندسی هر پاره‌خط را تعیین، و گشتاورهای اول را نسبت به حورهای مختصات محاسبه می‌کنیم.



$\bar{y}L$, in^۲	$\bar{x}L$, in^۲	$\bar{y}$, in	$\bar{x}$, in	L, in	پاره‌خط
۰	۲۸۸	۰	۱۲	۲۴	AB
۱۳۰	۳۱۲	۵	۱۲	۲۶	BC
۵۰	۰	۵	۰	۱۰	CA
$\Sigma \bar{y}L = ۱۸۰$	$\Sigma \bar{x}L = ۶۰۰$			$\Sigma L = ۶۰$	

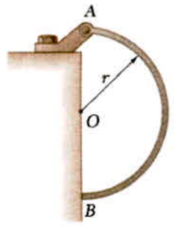
با قراردادن مقادیر به‌دست آمده از جدول در معادله‌های مشخص‌کنندهٔ مرکز هندسی خط مرکب، به‌دست می‌آوریم

$$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x}L: \quad \bar{X}(۶۰\ \text{in}) = ۶۰۰\ \text{in}^۲ \qquad \bar{X} = ۱۰\ \text{in} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y}L: \quad \bar{Y}(۶۰\ \text{in}) = ۱۸۰\ \text{in}^۲ \qquad \bar{Y} = ۳\ \text{in} \blacktriangleleft$$

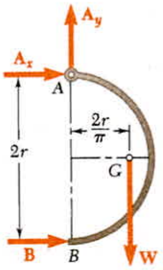
مسئلهٔ نمونه ۳.۵

یک میلهٔ یکنواخت نیم‌دایره‌ای به وزن W و شعاع r در نقطهٔ A به پینی متصل است و در نقطهٔ B به یک سطح بدون اصطکاک تکیه دارد. عکس‌العملها در A و B را تعیین کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. نمودار جسم آزاد میله رسم شده است. نیروهای وارد بر میله عبارت‌اند از وزن آن که بر مرکز گرانی G وارد می‌شود و محل آن از شکل ۸.۵(ب) به‌دست می‌آید؛ عکس‌العمل در A که با مؤلفه‌هایش $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ نشان داده شده، و عکس‌العمل افقی در B.



معادله‌های تعادل

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰: \qquad B(۲r) - W\left(\frac{۲r}{\pi}\right) = ۰$$

$$B = +\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{B} = \frac{W}{\pi} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ۰: \qquad A_x + B = ۰$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{A}_x = \frac{W}{\pi} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰: \qquad A_y - W = ۰ \qquad \mathbf{A}_y = W \uparrow$$

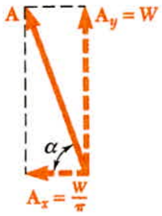
با جمع دو مؤلفهٔ عکس‌العمل در A:

$$A = \left[W^۲ + \left(\frac{W}{\pi}\right)^۲\right]^{۱/۲} \qquad A = W\left(۱ + \frac{۱}{\pi^۲}\right)^{۱/۲} \blacktriangleleft$$

$$\tan\alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi \qquad \alpha = \tan^{-۱}\pi \blacktriangleleft$$

پاسخها را می‌توانیم به این صورت هم بیان کنیم

$$\mathbf{A} = ۱٫۰۴۹W \measuredangle ۷۲٫۳^\circ \qquad \mathbf{B} = ۰٫۳۱۸W \rightarrow \blacktriangleleft$$



چگونه مسئله حل کنیم

در این درس معادله‌های عام تعیین محل مرکز گرانی اجسام دوبعدی و سیمها [معادلات (۲.۵)] و مرکزهای هندسی سطحهای [معادلات (۳.۵)] و خطها [معادلات (۴.۵)] را معرفی کردیم. حالا از شما خواسته‌ایم که در مسئله‌های زیر محل مرکز هندسی سطحها و خطهای مرکب یا گشتاورهای اول سطحها را برای ورقهای مرکب تعیین کنید[معادلات (۸.۵)].

۱. تعیین محل مرکزهای هندسی سطحها و خطهای مرکب. روش حل این نوع مسئله‌ها را در مسئله‌های نمونهٔ ۱.۵ و ۲.۵ نشان داده‌ایم. با این همه نکاتی وجود دارد که باید آنها را مورد تأکید قرار بدهیم.

الف. اولاً موقع حل مسئله باید تصمیم بگیرید که سطح یا خط داده شده را چگونه از اشکال معمول بسازید (شکل ۸.۵). باید بتوانید تشخیص بدهید که در مورد سطوح تخت برای ساختن یک شکل خاص اغلب بیشتر از یک راه وجود دارد. همچنین اگر هر یک از عناصر سازندهٔ سطح را (چنانکه در مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۵ انجام گردید) نشان بدهید به شما کمک می‌کند که مرکزهای هندسی، مساحتها و یا طولها را درست محاسبه کنید. فراموش نکنید که برای به‌دست آوردن شکل مورد نظر، هم می‌توانید شکلها را با هم جمع کنید، و هم می‌توانید آنها را از هم کم کنید.

ب. اکیداً توصیه می‌کنیم که برای هر مسئله یک جدول درست کنید و مساحتها و طولها و مختصات مربوط به مرکزهای هندسی را در آن ثبت کنید. لازم است به خاطر داشته باشید که مساحت سطحهایی را که «برمی‌دارید» (مثلاً سوراخها) باید منفی بگیرید. همچنین، علامت منفی مختصات را هم باید به حساب بیاور... بنابراین، باید همیشه به‌دقت به مکان مبدأ محورهای مختصات توجه داشته باشید.

ج. در صورت امکان، از تقارن استفاده کنید (بخش ۴.۵) تا تعیین مکان مر... هندسی آسانتر شود.

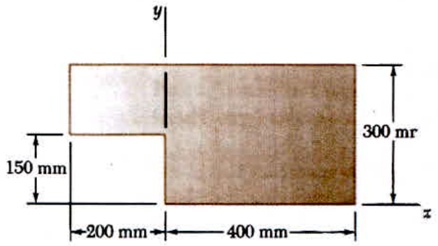
د. زاویهٔ α را در فرمولهای مربوط به قطاع دایره‌ای و قوسی از دایره همـ... برحسب رادیان بیان کنید (شکل ۸.۵).

۲. محاسبهٔ گشتاورهای اول یک سطح. روشهای تعیین مکان مرکز هندسی ... سطح و تعیین گشتاورهای اول یک سطح به هم شبیه‌اند، اما برای تعیین گشتاور... اول یک سطح هیچ ضرورتی ندارد که کل مساحت سطح را محاسبه کنید. چنانک... در بخش ۴.۵ هم گفتیم، باید تشخیص بدهید که گشتاور اول یک سطح نسبت به محوری که از مرکز هندسی آن می‌گذرد صفر است.

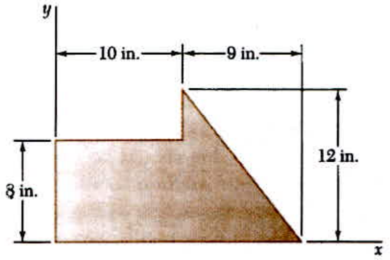
۳. حل مسئله‌های مربوط به مرکز گرانی. همهٔ اجسامی که در مسئله‌های ... در نظر گرفته‌ایم همگن‌اند؛ بنابراین مرکزهای گرانی و مرکزهای هندسی آنها بر... منطبق‌اند. علاوه بر این، برای جسمی که از یک پین آویزان شده است و در حال تعا... به سر می‌برد، پین و مرکز گرانی جسم باید هر دو روی یک خط قائم قرار داشته باش... ممکن است به نظر برسد که بسیاری از مسئله‌ها در این درس کمتر به مکانیک ارتباط دارند. اما مهارت پیدا کردن در تعیین مکان مرکز هندسی اشکال مرکب، ... بسیاری از مباحثی که به‌زودی با آنها مواجه خواهید شد ضرورت دارد.

سئله‌ها

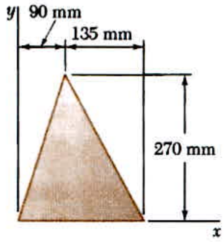
۱ تا ۸.۵ محل مرکز هندسی سطحهای نشان‌داده شده را تعیین کنید.



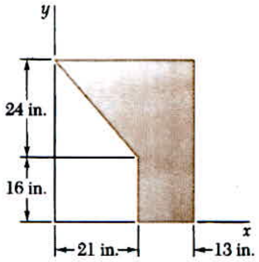
شکل م ۱.۵



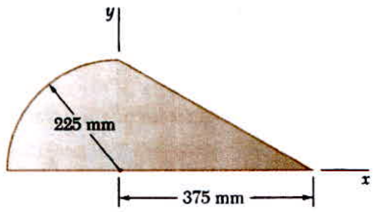
شکل م ۲.۵



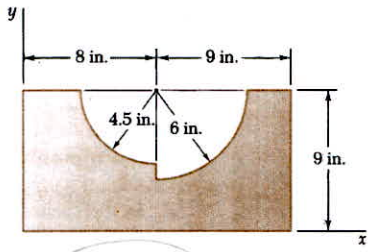
شکل م ۳.۵



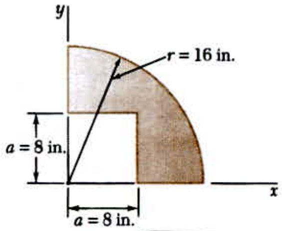
شکل م ۴.۵



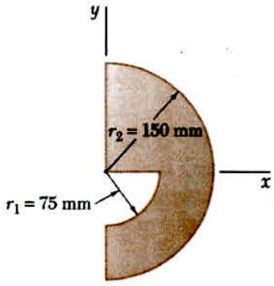
شکل م ۵.۵



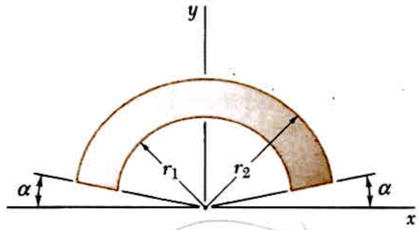
شکل م ۶.۵



شکل م ۷.۵



شکل م ۸.۵

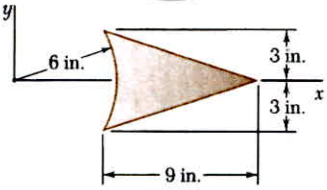


شکل م ۱۰.۵

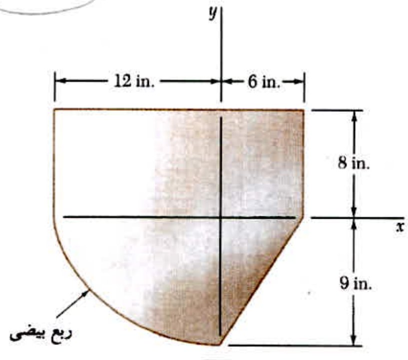
۹.۸ برای سطح نشان داده شدهٔ مسئله ۸.۵ نسبت r_2/r_1 را به نحوی به‌دست آورید که $\bar{x} = 4r_1/$ باشد.

۱۰.۵ نشان دهید که وقتی r_1 به سمت r_2 میل کند محل مرکز هندسی رس دایره‌ای به شعاع $(r_1 + r_2)/2$ میل می‌کند.

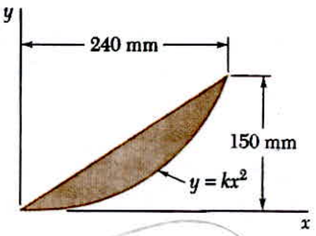
۱۱. تا ۱۶.۵ حل مرکز هندسی سطحهای نشان داده شده را تعیین کنید.



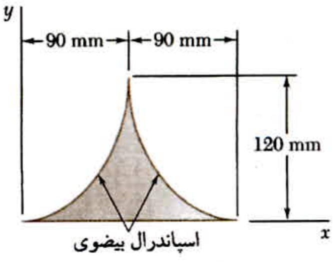
شکل م ۱۱.۵



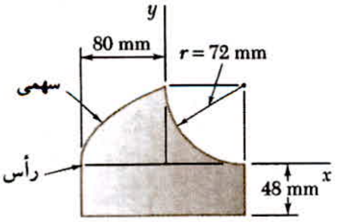
شکل م ۱۳.۵



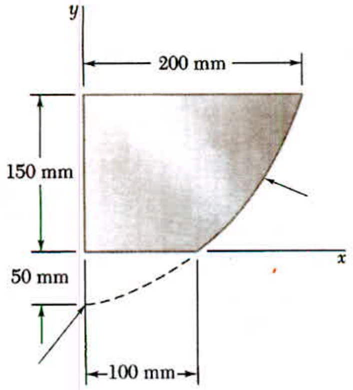
شکل م ۱۲.۵



شکل م ۱۴.۵

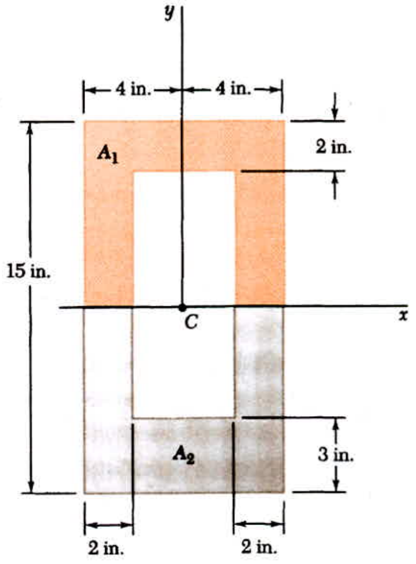


شکل م ۱۵.۵

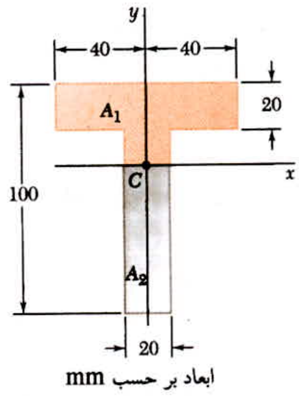


شکل م ۱۶.۵

۱۷.۵ و ۱۸.۵ محور افقی x از مرکز هندسی C سطح نشان داده شده گذشته است و سطح را به دو سطح A_1 و A_2 تقسیم می‌کند. گشتاور اول هر سطح را نسبت به محور x به‌دست آورید و نتایج به‌دست آمده را توضیح دهید.

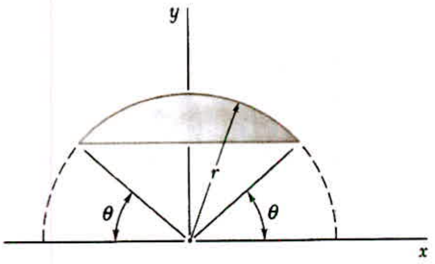


شکل م ۱۷.۵



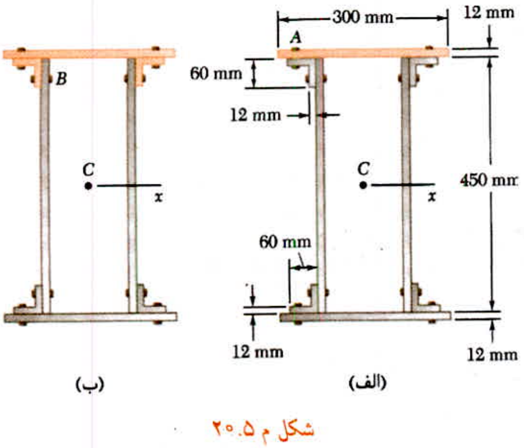
شکل م ۱۸.۵

۱۹.۵ گشتاور اول سطح نشان داده شده را نسبت به محور x با Q_x نشان دهید. (الف) Q_x برحسب r و θ بیان کنید. (ب) برای چه مقداری از θ، Q_x ماکزیمم است، و مقدار ماکزیمم را به‌دست آورید.



شکل م ۱۹.۵

۲۰.۵ تیر مرکبی از چهار ورق که مطابق شکل توسط پیچ و مهره با چهار نبشی به ا
$۱۲\,\mathrm{mm} \times ۶۰ \times ۶۰$ متصل است، تشکیل شده است. پیچ و مهره به فواصل مساو
در امتداد تیر قرار گرفته‌اند و تیر از بار عمودی نگهداری می‌کند. چنانکه در مقاومت مص
اثبات می‌کنند، نیروهای برشی وارد بر پیچها در A و B به‌ترتیب متناسب‌اند با گشتاورهای
قسمتهای نشان داده شده در شکلهای (الف) و (ب) نسبت به محور x که از مرکز هندسی C
می‌گذرد. اگر نیروی وارد بر پیچ در A برابر ۲۸۰ N باشد، نیروی وارد شده بر پیچ و مهره B را
به‌دست آورید.



شکل م ۲۰.۵

۲۱.۵ تا ۲۴.۵ سیم همگن و نازکی را خم می‌کنیم تا به شکل محیط شکل نشان داده ش
درآید. مکان و مرکز گرانی سیم را در موارد زیر به‌دست آورید.

۲۱.۵ شکل م ۱.۵

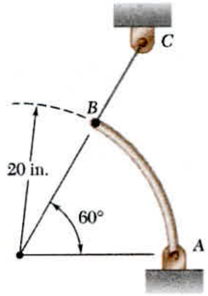
۲۲.۵ شکل م ۲.۵

۲۳.۵ شکل م ۵.۵

۲۴.۵ شکل م ۸.۵

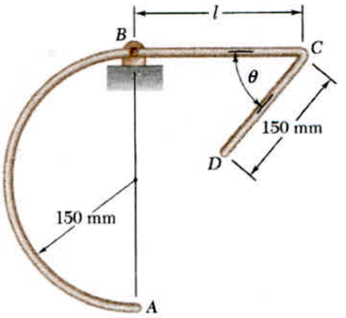
۲۵.۵ میله یکنواخت فولادی ۱/۷۵-lb را مطابق شکل به شکل دایره‌ای به شعاع ۲۰ in

م کردیم. میله توسط طناب BC در پین A نگهداری می‌شود. مطلوب است (الف) کشش ر طناب، (ب) عکس‌العمل در A



شکل م ۲۵.۵

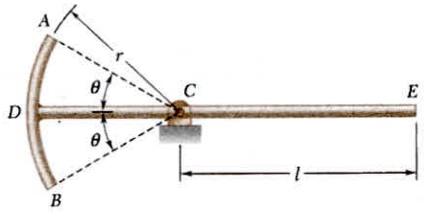
۲۶.۵ سیم همگن $ABCD$ مطابق شکل خم شده و توسط پین در B نگهداری می‌شود. ،ذر $l = ۲۰۰$ mm باشد زاویه θ را طوری که قسمت BC سیم افقی باشد، تعیین کنید.



شکل م ۲۶.۵ و م ۲۷.۵

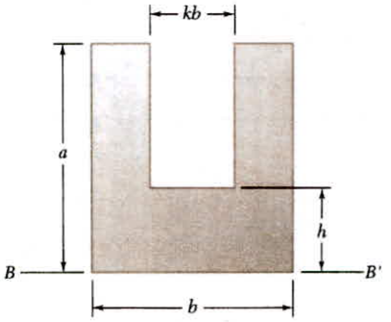
۲۷.۵ سیم همگن $ABCD$ مطابق شکل خم شده و توسط یک پین در B نگهداری می‌شود. ،ذر $\theta = ۳۰°$ باشد، طول l را طوری که قسمت CD سیم افقی باشد، تعیین کنید.

۲۸.۵ می‌دانیم که شکل نشان داده شده از یک سیم همگن نازک تشکیل شده است، مطلوب ست طول l قسمت CE سیم را به نحوی که مرکز گرانی شکل در نقطه C و در حالتهای ۱۵ $\theta =$، (ب) $\theta = ۶۰°$ باشد.



شکل م ۲۸.۵

۲۹.۵ فاصله h را طوری تعیین کنید که مرکز هندسی سطح مشخص شده تا حد امکان به خط BB' نزدیک باشد، وقتی $k = ۰٫۲$، (ب) $k = ۰٫۶$ باشد.



شکل م ۲۹.۵ و م ۳۰.۵

۳۰.۵ نشان دهید وقتی فاصله h طوری انتخاب شود که فاصله $\bar{y}$ از خط BB' تا مرکز هندسی سطح نشان داده شده حداقل باشد، آنگاه $\bar{y} = h$ خواهد بود. ■

۶.۵ تعیین مرکزهای هندسی به روش انتگرال‌گیری

مرکز هندسی یک سطح محصور به منحنیهای تحلیلی (یعنی منحنیهایی که با معادله‌های جبری تعریف می‌شوند) معمولاً با محاسبهٔ انتگرالهای معادله‌های (۳.۵) از بخش ۳.۵ تعیین می‌شود.

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \qquad (۳.۵)$$

اگر جزء سطح dA مستطیل کوچکی به اضلاع dx و dy باشد، محاسبهٔ هریک از این انتگرالها مستلزم یک انتگرال‌گیری دوگانه برحسب x و y است. در صورت استفاده از مختصات قطبی که در آن dA سطح کوچکی به اضلاع dr و $rd\theta$ است نیز انتگرال‌گیری دوگانه لازم است.

اما در بیشتر موارد، مختصات مرکز هندسی سطح را می‌شود با محاسبهٔ یک انتگرال ساده به‌دست آورد. برای این کار می‌توانیم dA را به شکل مستطیل یا نواری باریک یا قطاعی نازک یا جزئی از شکل در نظر بگیریم [شکل ۱۲.۵ (الف)]؛ مرکز هندسی مستطیل باریک در مرکزش، و مرکز هندسی قطاع نازک (مثل مثلث) در فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}r$ از رأس آن قرار دارد. بنابراین مختصات مرکز هندسی سطح مورد نظر را می‌توان با برابر قراردادن گشتاور اول سطح کل نسبت به هریک از محورهای مختصات با مجموع (یا انتگرال) گشتاورهای مربوط به سطوح جزئی، به‌دست آورد. اگر مختصات مرکز هندسی جزء dA را با $\bar{x}_{el}$ و $\bar{y}_{el}$ نشان بدهیم می‌توانیم بنویسیم

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA$$
$$Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA \qquad (۹.۵)$$

اگر مساحت سطح A معلوم نباشد، می‌توان آن را هم با استفاده از این اجزا محاسبه کرد.

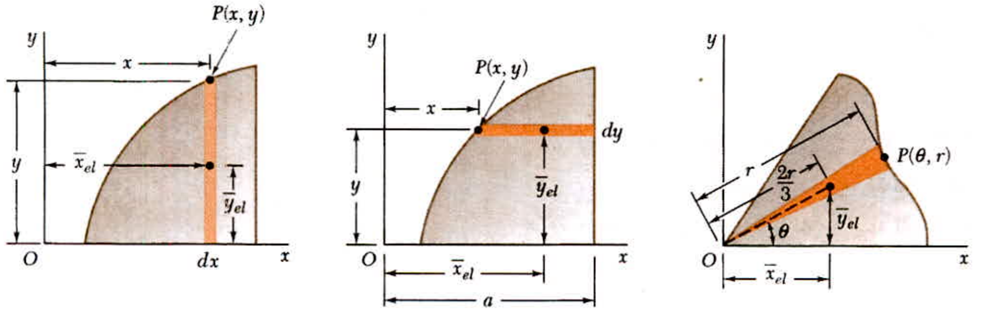
مختصات $\bar{x}_{el}$ و $\bar{y}_{el}$ مرکز هندسی جزء سطح را می‌بایست برحسب مختصات نقطه‌ای واقع بر منحنی محصورکنندهٔ سطح مورد نظر بیان کرد. همچنین، مساحت جزء سطح dA را می‌بایست برحسب مختصات آن نقطه و دیفرانسیلهای مناسب بیان کرد. این عمل در شکل ۱۲.۵ (ب) برای سه نوع از جزء سطحهای معمولی انجام شده است؛ جزء سطح شکل قسمت ج را موقعی باید به کار برد که معادلهٔ منحنی محصورکنندهٔ سطح در مختصات قطبی داده شده باشد. عبارتهای مناسب را می‌بایست در فرمولهای (۹.۵) قرار داد، و معادلهٔ منحنی محصور کننده را برای بیان یکی از مختصات برحسب دیگری به کار برد. به این ترتیب انتگرال‌گیری دوگانه به انتگرال‌گیری ساده خلاصه می‌شود. وقتی مساحت و انتگرالها در معادله‌های (۹.۵) تعیین شد، می‌توان آنها را برای مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز سطح حل کرد.

مرکز هندسی هر خطی را که با یک معادلهٔ جبری تعریف شده باشد می‌توان با محاسبهٔ انتگرالهای معادله‌های (۴.۵) در بخش ۳.۵ تعیین کرد.

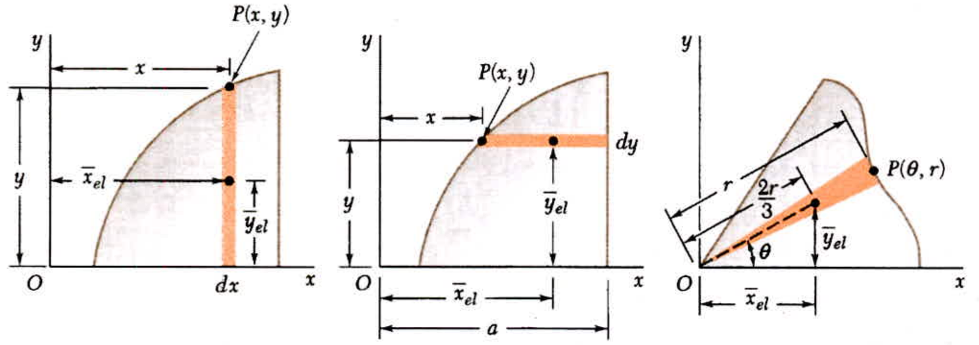
$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \qquad (۴.۵)$$

به‌جای جزء dL باید یکی از عبارتهای زیر را قرار داد؛ بسته به اینکه در معادلهٔ معرف خط کدامیک از مختصه‌های x، y، یا θ را متغیر مستقل گرفته باشیم (این عبارتها را می‌شود با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث به‌دست آورد):

$$dL = \sqrt{۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\,dx \qquad dL = \sqrt{۱ + \left(\frac{dx}{dy}\right)^۲}\,dy$$

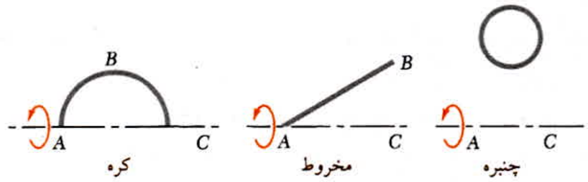


شکل ۱۲.۵ (الف) مرکز هندسی و سطوح جزئی دیفرانسیلی.

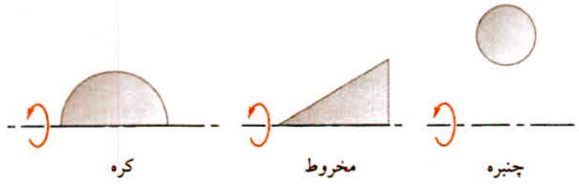


(الف)	(ب)	(ج)
$\bar{x}_{el} = x$	$\bar{x}_{el} = \dfrac{a+x}{2}$	$\bar{x}_{el} = \dfrac{2r}{3}\cos\theta$
$\bar{y}_{el} = y/2$	$\bar{y}_{el} = y$	$\bar{y}_{el} = \dfrac{2r}{3}\sin\theta$
$dA = y\,dx$	$dA = (a-x)\,dy$	$dA = \dfrac{1}{2}r^2\,d\theta$

شکل ۱۲.۵ (ب) مرکز هندسی و سطوح جزئی دیفرانسیلی.



شکل ۱۳.۵



شکل ۱۴.۵

$$dL = \sqrt{r^{2} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{2}}\,d\theta$$

پس از اینکه با استفاده از معادلهٔ خط یکی از مختصات برحسب دیگری بیان شد می‌شود انتگرال‌گیری را انجام داد، و معادله‌های (۴.۵) را برای مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز هندسی خط حل کرد.

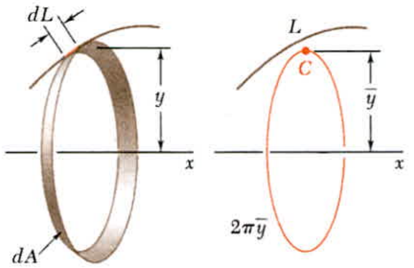
۷.۵ قضیه‌های پاپوس ـ گلدینوس

این قضایا که اولین‌بار توسط دانشمند یونانی پاپوس در قرن سوم میلادی و سپس توسط ریاضیدان سویسی گلدینوس یا گولدین (۱۵۷۷ تا ۱۶۴۳) بیان شد، با سطوح و اجسام دورانی سروکار دارند.

سطح دورانی، سطحی است که می‌توان آن را با دوران یک منحنی واقع در صفحه حول یک محور ثابت ایجاد کرد. مثلاً، (شکل ۱۳.۵)، سطح یک کره را می‌توان از دوران قوس نیم‌دایره‌ای ABC حول قطر AC به‌دست آورد؛ سطح یک مخروط را می‌توان از دوران خط راست AB حول محور AC، و سطح چنبره یا حلقه را می‌شود از دوران پیرامون یک دایره حول یک محور غیر متقاطع ایجاد کرد. جسم دورانی، جسمی است که می‌توان آن را با دوران یک سطح تخت حول یک محور ثابت ایجاد کرد. کرهٔ توپر می‌توان از دوران یک سطح نیم‌دایره‌ای، مخروط را از دوران یک سطح مثلثی، و چنبرهٔ توپر را از دوران یک سطح دایره‌ای کامل به‌دست آورد (شکل ۱۴.۵).

قضیه ۱. مساحت سطح دورانی برابر است با طول منحنی مولد ضربدر فاصله‌ای که مرکز هندسی منحنی ضمن تولید سطح مورد نظر می‌پیماید.

اثبات. جزء dL از خط L را در نظر بگیرید (شکل ۱۵.۵) که حول محور x دوران می‌کند. مساحت حاصل از این دوران (dA) برابر است با $2\pi y dL$. بنابراین مساحت



شکل ۱۵.۵

عکس ۲.۵ مخزنهای ذخیره، همگی اجسام دوار هستند. بنابراین مساحت سطح و حجم‌آنها را می‌توان با استفاده از قضیه‌های پاپوس-گلدینوس به‌دست آورد.

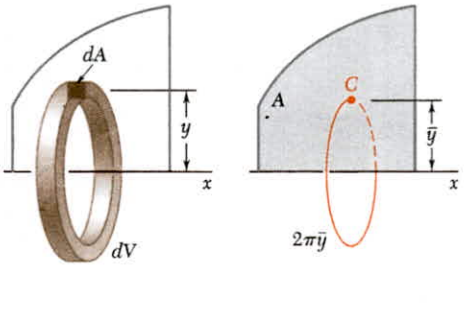
سطح کل حاصل از L برابر است با $A = \int ۲\pi y dL$. اما در بخش ۳.۵ دیدیم که تگرال $\int y dL$ برابر است با $\bar{y}L$. بنابراین داریم

$$A = ۲\pi\bar{y}L \qquad (۱۰.۵)$$

ه در آن $۲\pi\bar{y}$ فاصله‌ای است که مرکز هندسی L پیموده است. باید توجه داشته باشید که منحنی مولد نباید محوری را که حول آن دوران می‌کند قطع کند؛ اگر چنین شود، دو قطعهٔ واقع در دو طرف محور دو سطح با علامتهای مخالف ایجاد می‌کنند و این قضیه را نمی‌شود به کار برد.

قضیه ۲. حجم یک جسم دورانی برابر است با مساحت سطح مولد ضربدر اصله‌ای که مرکز هندسی سطح ضمن تولید جسم مورد نظر می‌پیماید.

اثبات. جزء سطح dA از سطح A را در نظر بگیرید که حول محور x دوران می‌کند (شکل ۱۶.۵). حجم dV حاصل از دوران جزء سطح dA برابر است با $۲\pi y dA$. بنابراین حجم کل حاصل از دوران A برابر است با $V = \int ۲\pi y dA$، و از آنجا که



شکل ۱۶.۵

انتگرال $\int y dA$ برابر است با $\bar{y}A$ بخش ۳.۵)، داریم

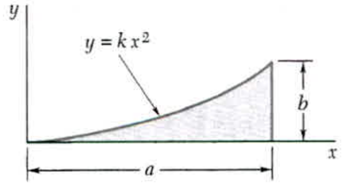
$$V = ۲\pi\bar{y}A \qquad (۱۱.۵)$$

که در آن $۲\pi\bar{y}$ فاصلهٔ طی‌شده توسط مرکز هندسی A است. بازهم باید توجه داشته باشید که اگر محور دوران سطح مولد را قطع کند این قضیه را نمی‌شود به کار برد.

قضیه‌های پاپوس-گلدینوس راه ساده‌ای را برای محاسبهٔ مساحت سطحهای دورانی و حجم جسمهای دورانی پیشنهاد می‌کند. می‌توان آنها را به شیوهٔ عکس، برای تعیین مرکز هندسی یک منحنی تخت وقتی سطح حاصل از دوران آن معلوم باشد، یا برای تعیین مرکز هندسی یک سطح تخت، وقتی حجم جسم حاصل از دوران آن معلوم شد نیز به کار برد (مسئلهٔ نمونهٔ ۸.۵ را ببینید).

مسئلهٔ نمونه ۴.۵

با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی یک اسپاندرل سهموی را تعیین کنید.



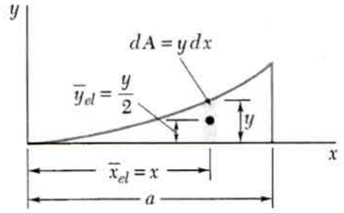
حل:

تعیین ثابت k. با جایگزین کردن $x = a$ و $y = b$ در معادلهٔ داده شده مقدار k را تعیین می‌کنیم. داریم $b = ka^۲$ یا $k = b/a^۲$. پس معادلهٔ منحنی چنین است

$$y = \frac{b}{a^۲}x^۲ \qquad \text{یا} \qquad x = \frac{a}{b^{۱/۲}}y^{۱/۲}$$

جزء دیفرانسیل عمودی. با انتخاب جزء دیفرانسیل نشان داده شده، سطح کل شکل را به‌دست می‌آوریم

$$A = \int dA = \int y\,dx = \int_۰^a \frac{b}{a^۲}x^۲dx = \left[\frac{b}{a^۲}\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^a = \frac{ab}{۳}$$



گشتاور اول جزء دیفرانسیل نسبت به محور y برابر است با $\bar{x}_{el}dA$، و گشتاور اول سطح کل برابر است با

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}dA = \int xy\,dx = \int_۰^a x(\frac{b}{a^۲}x^۲)dx = \left[\frac{b}{a^۲}\frac{x^۴}{۴}\right]_۰^a = \frac{a^۲b}{۴}$$

چون $Q_y = \bar{x}A$، داریم

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}dA \qquad \bar{x}\frac{ab}{۳} = \frac{a^۲b}{۴} \qquad \bar{x} = \frac{۳}{۴}a \blacktriangleleft$$

همچنین، گشتاور اول جزء دیفرانسیل نسبت به محور x برابر است با $\bar{y}_{el}dA$، و گشتاور اول سطح کل برابر است با

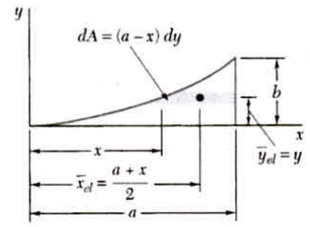
$$Q_x = \int \bar{y}_{el}dA = \int \frac{y}{۲}y\,dx = \int_۰^a \frac{۱}{۲}(\frac{b}{a^۲}x^۲)^۲dx = \left[\frac{b^۲}{۲a^۴}\frac{x^۵}{۵}\right]_۰^a = \frac{ab^۲}{۱۰}$$

چون $Q_x = \bar{y}A$، داریم

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}dA \qquad \bar{y}\frac{ab}{۳} = \frac{ab^{۲}}{۱۰} \qquad \bar{y} = \frac{۳}{۱۰}b \quad ◄$$

جزء دیفرانسیل افقی. همین نتایج را می‌توانستیم با در نظرگرفتن یک جزء افقی به‌دست آوریم. گشتاورهای اول سطح چنین‌اند

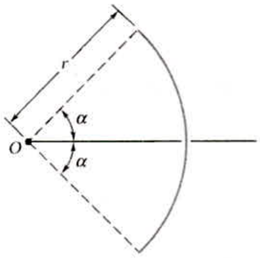
$$Q_y = \int \bar{x}_{el}dA = \int \frac{a+x}{۲}(a-x)dy = \int_{۰}^{b} \frac{a^{۲}-x^{۲}}{۲}dy$$
$$= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{b}(a^{۲} - \frac{a^{۲}}{b}y)dy = \frac{a^{۲}b}{۴}$$
$$Q_x = \int \bar{y}_{el}dA = \int y(a-x)dy = \int y(a - \frac{a}{b^{۱/۲}}y^{۱/۲})dy$$
$$= \int_{۰}^{b}(ay - \frac{a}{b^{۱/۲}}y^{۳/۲})dy = \frac{ab^{۲}}{۱۰}$$



مجدداً عبارتهای به‌دست آمده را در معادله‌های معرف مرکز هندسی سطح قرار می‌دهیم تا $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به‌دست آید.

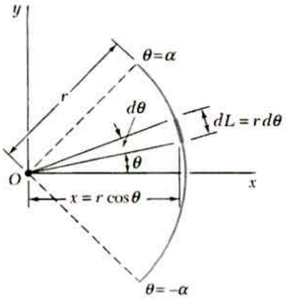
مسئلهٔ نمونه ۵.۵

محل مرکز هندسی قوس دایره‌ای نشان داده شده را تعیین کنید.



حل:

چون قوس نسبت به محور x متقارن است، پس $\bar{y} = ۰$ است. جزء دیفرانسیل را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم، و طول قوس را با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم.



$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\,d\theta = r\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = ۲r\alpha$$

گشتاور اول قوس نسبت به محور y برابر است با

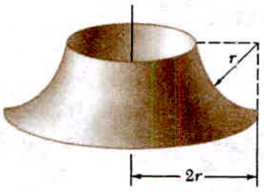
$$Q_y = \int x\,dL = \int_{-\alpha}^{\alpha}(r\cos\theta)(r\,d\theta) = r^{۲}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta$$
$$= r^{۲}[\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha} = ۲r^{۲}\sin\alpha$$

چون $Q_y = \bar{x}L$ است، می‌نویسیم

$$\bar{x}(۲r\alpha) = ۲r^{۲}\sin\alpha \qquad \bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha} \quad ◄$$

مسئلهٔ نمونه ۶.۵

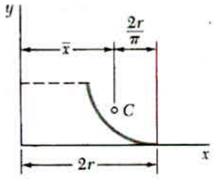
مساحت سطح دورانی نشان داده شده را که از دوران یک‌چهارم قوس دایره‌ای حول محوری عمودی به‌دست آمده است، تعیین کنید.



حل:

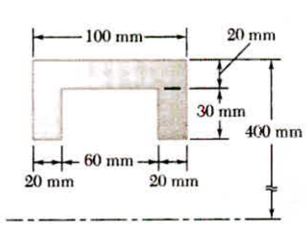
با توجه به قضیهٔ اول پاپوس-گلدینوس، مساحت ایجاد شده برابر است با حاصلضرب طول قوس در فاصلهٔ پیموده شده توسط مرکز هندسی آن. با مراجعه به شکل ۸.۵ (ب)، داریم

$$\bar{x} = ۲r - \frac{۲r}{\pi} = ۲r(۱ - \frac{۱}{\pi})$$
$$A = ۲\pi\bar{x}L = ۲\pi\left[۲r(۱-\frac{۱}{\pi})\right](\frac{\pi r}{۲})$$
$$A = ۲\pi r^{۲}(\pi - ۱) \quad ◄$$



مسئلهٔ نمونه ۷.۵

قطر خارجی قرقره‌ای $۰٫۸\ m$ و سطح مقطع لبهٔ آن مطابق شکل است. قرقره از جنس فولاد و چگالی فولاد $\rho = ۷٫۸۵ \times ۱۰^{۳}\ kg/m^{۳}$ است. جرم و وزن لبهٔ قرقره را تعیین کنید.

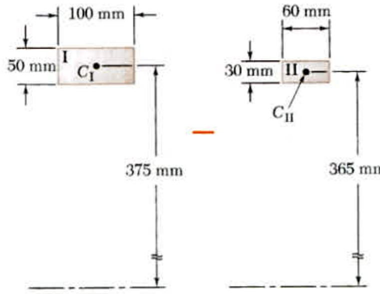


حل:

حجم لبه را می‌توان با به‌کاربردن قضیهٔ دوم پاپوس-گلدینوس پیداکرد. بنابه این قضیه، حجم برابر است با حاصلضرب سطح مقطع مساحت در مسافت طی‌شده توسط مرکز هندسی در یک دور کامل. البته، حجم را می‌توانیم خیلی ساده‌تر به‌دست بیاوریم، به این ترتیب که این سطح مقطع را ترکیبی از مستطیل (I) ،

مساحت مثبت و مستطیل (II) با مساحت منفی در نظر بگیریم.

	مساحت، $mm^۲$	$\bar{y}$, mm	فاصله‌ای که C طی می‌کند، mm	حجم، $mm^۳$
I	$+۵۰۰۰$	۳۷۵	$۲\pi(۳۷۵)=۲۳۵۶$	$(۵۰۰۰)(۲۳۵۶)=۱۱{,}۷۸\times ۱۰^۶$
II	-۱۸۰۰	۳۶۵	$۲\pi(۳۶۵)=۲۲۹۳$	$(-۱۸۰۰)(۲۲۹۳)=-۴{,}۱۳\times ۱۰^۶$
				حجم‌لبه $= ۷{,}۶۵\times ۱۰^۶$



چون $۱ \text{ mm} = ۱۰^{-۳}$ m، داریم $۱ \text{ mm}^۳ = (۱۰^{-۳}\text{ m})^۳ = ۱۰^{-۹}\text{ m}^۳$، و نتیجه می‌گیریم که

$$V = ۷{,}۶۵ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^۳ = (۷{,}۶۵\times ۱۰^۶)(۱۰^{-۹}\text{ m}^۳)$$
$$= ۷{,}۶۵ \times ۱۰^{-۳}\text{ m}^۳$$
$$m = \rho V = (۷{,}۸۵\times ۱۰^۳ \text{ kg}/\text{m}^۳)(۷{,}۶۵\times ۱۰^{-۳}\text{ m}^۳)$$

◄ $m = ۶۰{,}۰ \text{ kg}$

$$W = mg = (۶۰{,}۰ \text{ kg})(۹{,}۸۱ \text{ m}/\text{s}^۲) = ۵۸۹ \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^۲$$

◄ $W = ۵۸۹ \text{ N}$

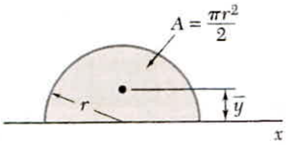
مسئلهٔ نمونه ۸.۵

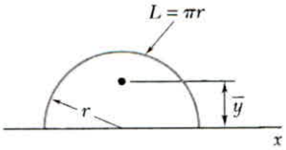
با استفاده از قضیه‌های پاپوس-گلدینوس، (الف) مرکز هندسی سطح نیم‌دایره‌ای، و (ب) مرکز هندسی قوس نیم‌دایره‌ای را تعیین کنید. حجم کره برابر با $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و مساحت سطح آن برابر با $۴\pi r^۲$ است.

حل:

حجم کره برابر است با حاصلضرب سطح نیم‌دایره در فاصلهٔ طی‌شده توسط مرکز هندسی آن در یک دور دوران حول محور x.

$$V = ۲\pi\bar{y}A \qquad \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = ۲\pi\bar{y}(\frac{۱}{۲}\pi r^۲) \qquad \bar{y} = \frac{۴r}{۳\pi} \blacktriangleleft$$





همچنین، مساحت کره برابر است با حاصلضرب طول نیم‌دایرهٔ مولد در فاصلهٔ طی‌شده توسط مرکز هندسیِ آن در یک دور.

$$A = ۲\pi\bar{y}L \qquad ۴\pi r^۲ = ۲\pi\bar{y}(\pi r) \qquad \bar{y} = \frac{۲r}{\pi} \blacktriangleleft$$

چگونه مسئله حل کنیم

ر مسئله‌های این درس، برای تعیین مرکز هندسی سطحها و خطهای موردنظر ترتیب از معادله‌های

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \qquad (۳.۵)$$

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \qquad (۴.۵)$$

. برای تعیین مساحت سطحهای حاصل از دوران و یا حجمهای حاصل از دوران از قضایای پاپوس-گلدینوس (بخش ۷.۵) استفاده خواهید کرد.

۱. تعیین مرکزهای هندسی سطحها و خطها با استفاده از انتگرالگیری مستقیم. موقع حل این نوع مسائل، روش حل نشان داده شده در مسئله‌های نمونهٔ ۴.۵ و ۵.۵ را دنبال کنید: مساحت A و یا طول L را محاسبه کنید، گشتاور اول سطح یا خط را تعیین کنید، و بعد معادله‌های (۳.۵) یا (۴.۵) را برای مختصات مرکزهای هندسی حل کنید. به نکته‌های زیر هم دقیقاً توجه کنید.

الف. در آغاز حل مسئله هریک از جمله‌ها را در انتگرالهایی که می‌خواهید به کار ببرید به دقت تعریف یا تعیین کنید. سعی کنید حتماً در طرحی که می‌کشید dA یا dL و فواصل آنها تا مرکزهای هندسی را نشان دهید.

ب. چنانکه در بخش ۶.۵ گفتیم، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ در معادلات بالا نمایندهٔ مختصات مرکز هندسی اجزای dA و dLاند. باید بدانید که مختصات مرکز هندسی dA برابر با مختصات یک نقطهٔ واقع بر روی منحنی محیط سطح مورد نظر نیستند. شکل ۱۲.۵ را به دقت بررسی کنید تا این نکتهٔ مهم را کاملاً بفهمید.

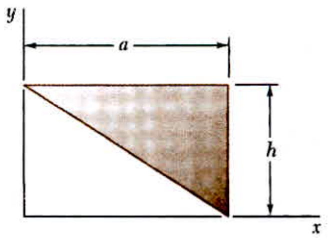
ج. برای اینکه محاسباتتان ساده‌تر و کوتاهتر بشود همیشه قبل از تعریف جزء دیفرانسیلی که می‌خواهید به کار ببرید شکل سطح یا خط داده شده را بررسی کنید. مثلاً بعضی وقتها ممکن است بهتر باشد که به‌جای مستطیلهای عمودی مستطیلهای افقی را به کار ببرید. همین‌طور برای سطح یا خطی که تقارن دایره‌ای داشته باشد معمولاً بهتر است که از مختصات قطبی استفاده کنید.

د. با آنکه بیشتر انتگرالهای این درس ساده‌اند، اما گاهی هم ممکن است لازم باشد که از روشهای پیشرفته‌تر، مثل روشهای مثلثاتی یا انتگرالگیری جزء‌به‌جزء استفاده کنید. البته، سریعترین روش برای محاسبهٔ انتگرالهای مشکل استفاده از جدول انتگرالهاست.

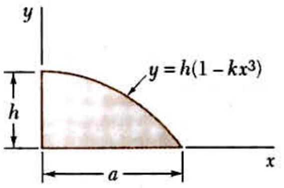
۲. کاربرد قضایای پاپوس-گلدینوس. همان‌طور که در مسئله‌های نمونهٔ ۶.۵ تا ۸.۵ نشان دادیم با استفاده از این قضایای ساده و در عین حال بسیار مفید می‌توانید معلوماتتان دربارهٔ مرکز هندسی را برای محاسبهٔ مساحت و حجم به‌کار ببرید. اگرچه این قضیه‌ها به فاصلهٔ طی‌شده توسط مرکز هندسی و طول منحنی مولد یا مساحت سطح مولد اشاره دارند، اما معادلات حاصل [معادله‌های (۱۰.۵) و (۱۱.۵)] شامل حاصلضرب این معادلات‌اند که به‌ترتیب همان گشتاور اول یک خط $(\bar{y}L)$ و یک سطح $(\bar{y}A)$اند. پس در مسئله‌هایی که در آنها خط یا سطح مولد متشکل از بیش از یک شکل معمول است فقط کافی است که $\bar{y}L$ یا $\bar{y}A$ را پیدا کنید. اجباری ندارید که طول منحنی مولد یا مساحت سطح مولد را محاسبه کنید.

مسئله‌ها

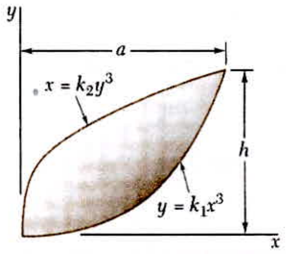
۳۱.۵ تا ۳۳.۵ به روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را تعیین کنید. جوابتان را برحسب a و h بیان کنید.



شکل م ۳۱.۵

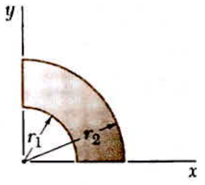


شکل م ۳۲.۵

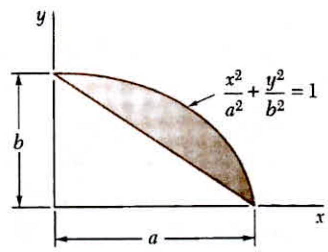


شکل م ۳۳.۵

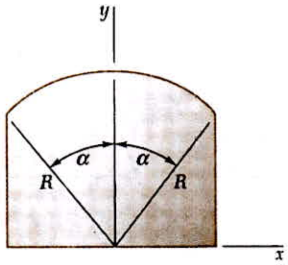
۳۴.۵ تا ۳۶.۵ با روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را به‌دست آورید.



شکل م ۳۴.۵

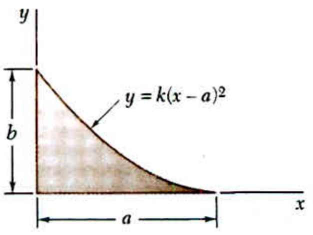


شکل م ۳۵.۵

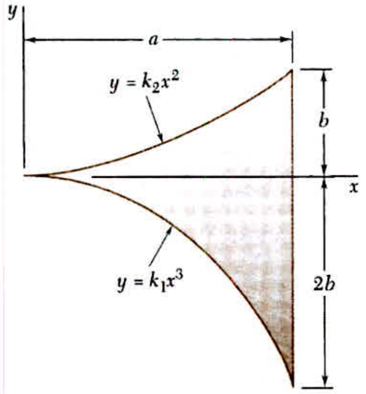


شکل م ۳۶.۵

۳۷.۵ و ۳۸.۵ با روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را برحسب a و b تعیین کنید.

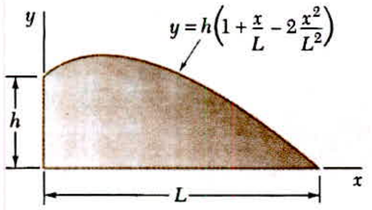


شکل م ۳۷.۵



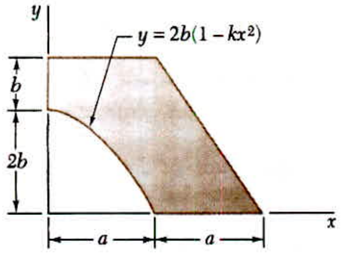
شکل م ۳۸.۵

۳۹.۵ با روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را تعیین کنید.

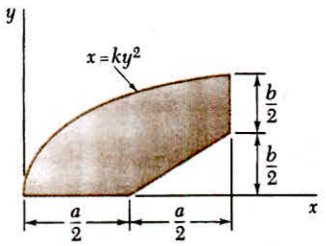


شکل م ۳۹.۵

۴۰.۵ و ۴۱.۵ به روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را برحسب a و b تعیین کنید.

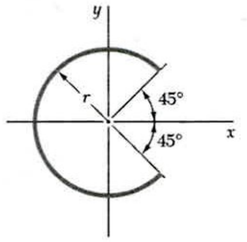


شکل م ۴۰.۵

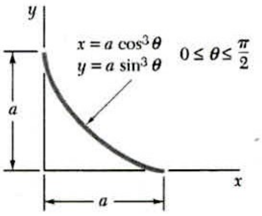


شکل م ۴۱.۵

۴۲.۵ و ۴۳.۵ سیم همگن را به‌صورت شکل نشان داده شده خم کنید و با روش انتگرال‌گیری مستقیم مختصه x مرکز هندسی را تعیین کنید.

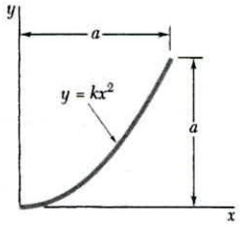


شکل م ۴۲.۵



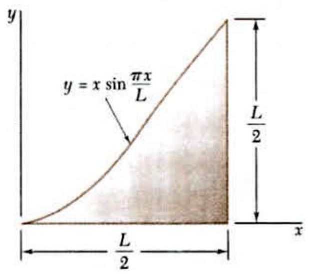
شکل م ۴۳.۵

۴۴.۵* سیم همگن را به شکل نشان داده شده خم کنید. با روش انتگرال‌گیری مستقیم مختصه x مرکز هندسی را برحسب a تعیین کنید. پاسخ خود را برحسب a بیان کنید.

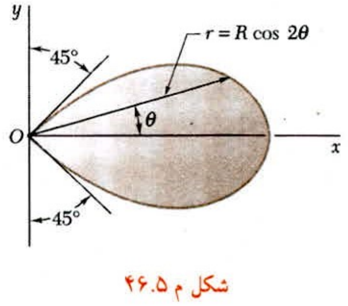


شکل م ۴۴.۵

۴۵.۵* و ۴۶.۵* با روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را تعیین کنید.



شکل م ۴۵.۵



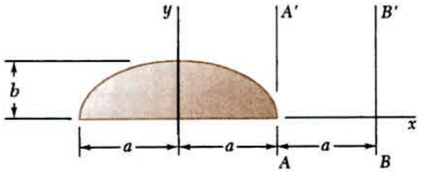
شکل م ۴۶.۵

۴۷.۵ حجم و مساحت سطح توپر به‌دست آمده را توسط چرخش سطح مسئلهٔ ۲.۵ حول (الف) محور x، (ب) خط $x = 19\ \text{in}$ به‌دست آورید.

۴۸.۵ حجم و مساحت سطح توپر به‌دست آمده از چرخش سطح مسئله ۴.۵ را حول (الف) محور y، (ب) خط $y = 40\ \text{in}$ به‌دست آورید.

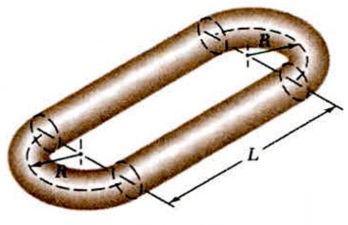
۴۹.۵ حجم و مساحت سطح توپر به‌دست آمده از چرخش سطح مسئله ۱.۵ را حول (الف) محور x، (ب) خط $x = 400\ \text{mm}$ به‌دست آورید.

۵۰.۵ حجم و مساحت سطح توپر به‌دست آمده از سطح نیم بیضوی نشان داده شده را حول (الف) محور AA'، (ب) محور BB'، (ج) محور y به‌دست آورید.



شکل م ۵۰.۵

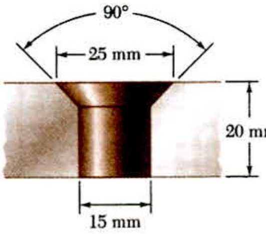
۵۱.۵ حجم و سطح مساحت زنجیر نشان داده شده را تعیین کنید. می‌دانیم که زنجیر از میله‌ای به قطر $0{,}5\ \text{in}$ ساخته شده و $R = 0{,}75\ \text{in}$ و $L = 3\ \text{in}$ است.



شکل م ۵۱.۵

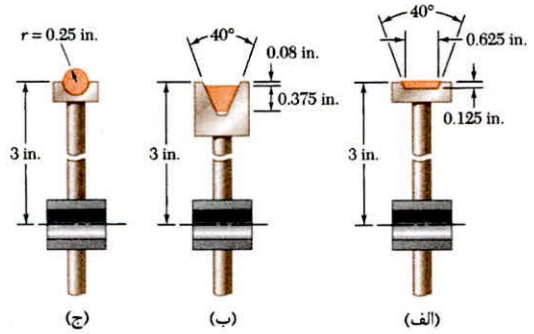
۵۲.۵ تحقیق کنید که عبارتهای داده شده برای حجمهای چهار شکل اول شکل ۲۱.۵ صحیح است.

۵۳.۵ سوراخی به قطر $15\ \text{mm}$ در قطعه‌ای فولادی به ضخامت $20\ \text{mm}$ ایجاد و سپس مطابق شکل، خزینه داده می‌شود. حجم فولاد برداشته شده در مرحله خزینه‌داری را به‌دست آورید.



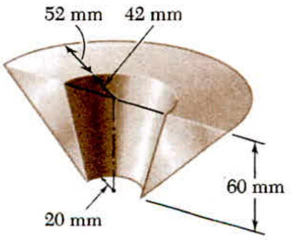
شکل م ۵۳.۵

۵۴.۵ سه تسمه با مقطع مختلف را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. اگر در هر لحظهٔ مفروض تسمه‌ها با نیمی از قرقره در تماس باشند، سطح تماس بین تسمه و قرقره را برای هر حالت تعیین کنید.



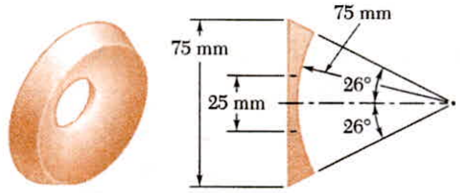
شکل م ۵۴.۵

۵۵.۵ حجم و مساحت کل جسم نشان داده شده را تعیین کنید.



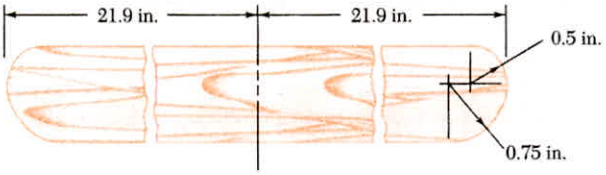
شکل م ۵۵.۵

۵۶.۵ محل خروج لوله از دیوار را مطابق شکل نشان داده شده، با یک ورق برنجی می‌پوشانند. اگر چگالی برنج زرد kg/m^3 ۸۴۷۰ باشد، جرم لبهٔ تزیینی را حساب کنید.



شکل م ۵۶.۵

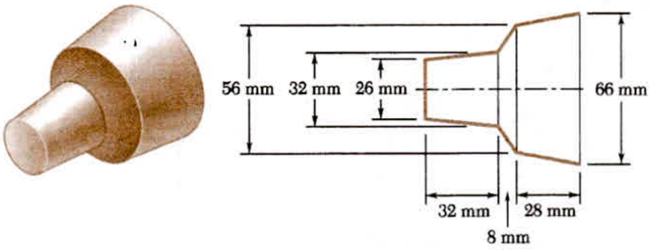
۵۷.۵ قسمت بالای یک میز چوبی دارای لبه‌های پروفیل نشان داده شده است. اگر قطر روی میز پیش از شکل دادن 44 in و وزن مخصوص چوب lb/in^3 ۰٫۰۲۵ باشد، وزن چوب رنده شده از تولید ۵۰۰۰ قطعه، روی میز را به‌دست آورید.



شکل م ۵۷.۵ و ۵۸.۵

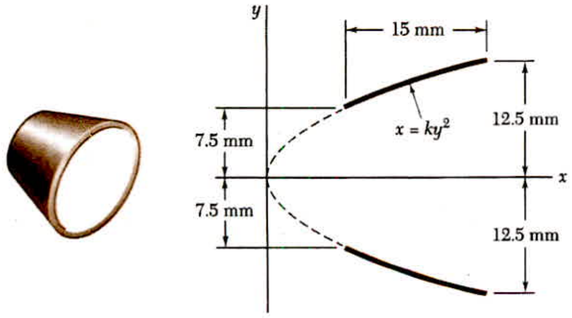
۵۸.۵ قسمت بالای میز چوبی در شکل نشان داده شده است. می‌دانیم بالای هر میز باید سه بار لاک الکل بخورد. همچنین ۱ گالن می‌تواند ft^2 ۵۰۰ را پوشش می‌دهد. برای رنگ‌زدن ۵۰۰۰ میز چند گالن لاک لازم است.

۵۹.۵ کاسه چراغ آلومینیمی نشان داده شده دارای ضخامت یکنواخت 1 mm است. می‌دانیم که چگالی آلومینیم kg/m^3 ۲۸۰۰ است. جرم کاسه را به‌دست آورید.



شکل م ۵۹.۵

*۶۰.۵ قسمت بازتابنده یک چراغ قوه کوچک به شکل سهمی است. مساحت سطح داخلی بازتابنده را به‌دست آورید.



شکل م ۶۰.۵

* ۸.۵ بارهای گسترده روی تیرها

مفهوم مرکز هندسی یک سطح را می‌توان علاوه بر مسئله‌های مربوط به وزن ورقهای تخت برای حل مسئله‌های دیگر هم به کار برد. به‌عنوان مثال، تیری را درنظر بگیرید تـ بار گسترده‌ای را تحمل می‌کند؛ این بار ممکن است شامل وزن موادی باشد که به‌طر مستقیم یا غیرمستقیم توسط تیر نگه داشته می‌شوند، یا ممکن است ناشی از نیروی ب یا فشار هیدروستاتیکی باشد. بارگسترده را می‌شود برحسب w بار وارد بر یکای طو تیر نشان داد (شکل ۱۷.۵)؛ این بار برحسب N/m بیان می‌شود. بزرگی نیروی وارد ب یک جزء تیر به طول dx برابر است با $dW = wdx$، و بارکل وارد بر تیر برابر است ب

$$W = \int_0^L w\,dx$$

مشاهده می‌کنیم که مقدار حاصلضرب wdx برابر است با مساحت جزء dA در شکل ۱۷.۵ (الف). بنابراین بزرگی بار W برابر است با کل مساحت A زیرمنحنی بار.

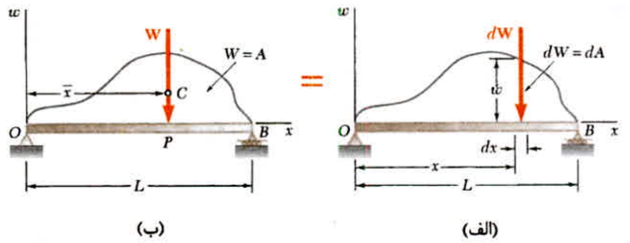
$$W = \int dA = A$$

حالا می‌خواهیم ببینیم به کجای تیر می‌شود یک تک بار متمرکز $\mathbf{W}$ با هم بزرگی W، معادل بارگسترده وارد کرد تا همان عکس‌العملها را در تکیه‌گاهها ایجاد ک [شکل ۱۷.۵ (ب)]. البته این بار متمرکز $\mathbf{W}$ که برایند بارهای گسترده است فقط وقت معادل بارگسترده است که نمودار جسم آزاد کل تیر را در نظر بگیریم. برای به‌دست آوردن نقطهٔ اثر P بار معادل متمرکز $\mathbf{W}$ گشتاور $\mathbf{W}$ حول نقطهٔ O را برابر با مجموع گشتاورهای بارهای جزئی $d\mathbf{W}$ حول نقطهٔ O قرار می‌دهیم :

$$(OP)W = \int x\,dW$$

یا، چون $dW = wdx = dA$ و $W = A$ است

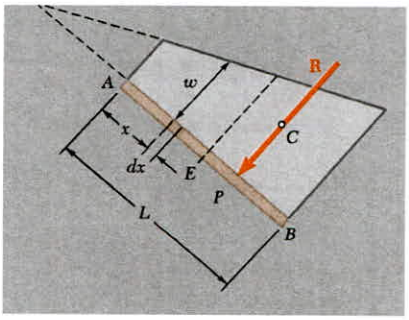
$$(OP)A = \int_0^L x\,dA \qquad (۱۲.۵)$$



(ب) (الف)

شکل ۱۷.۵

عکس ۳.۵ پشت‌بامهای ساختمانهای نشان داده شده نه تنها باید وزن کل برف را تحمل کنند، ...ه باید بارها و نیروهای با توزیع نامتقارن ناشی از برف‌روبی را نیز تحمل کنند.



شکل ۱۸.۵

...ز آنجا که این انتگرال نمایندهٔ گشتاور اول سطح زیرمنحنی بار نسبت به محور ω است، ... جای آن می‌شود حاصلضرب $\bar{x}A$ را قرارداد. بنابراین داریم $OP = \bar{x}$، که $\bar{x}$ همان ...صله از محور ω تا C مرکز هندسی سطح A است (البته این مرکز هندسی تیر نیست). بنابراین به‌جای بار گستردهٔ وارد بر تیر می‌شود یک بار متمرکز قرار داد؛ بزرگی این ... متمرکز برابر با سطح زیر منحنی بار است، و خط اثرش از مرکز هندسی آن سطح عبور می‌کند. اما توجه داشته باشید که بار متمرکز تنها در مورد نیروهای خارجی با ...رهای داده‌شده معادل است. از بار متمرکز می‌شود برای تعیین عکس‌العملها استفاده ...د، ولی نباید آن را برای محاسبهٔ نیروهای داخلی و خمیدگیها به کار برد.

۹.۵ نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور

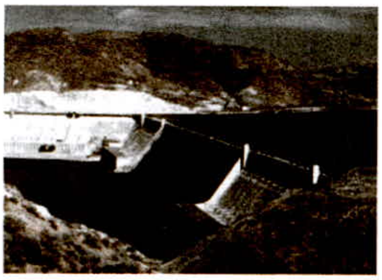
...هیافت مورد استفاده در بخشهای قبل را می‌شود برای تعیین برایند نیروهای فشار ...یدروستاتیکی وارد بر یک سطح مستطیلی غوطه‌ور در مایع به کار برد. ورق مستطیلی ...ان داده شده در شکل ۱۸.۵ به طول L و عرض b را، که b عمود بر صفحهٔ شکل ...ت، در نظر بگیرید. چنانکه در بخش ۸.۵ نشان دادیم، بار وارد بر یک جزء ورق به ...ول dx برابر است با ωdx، که در آن ω بار وارد بر واحد طول است. ولی این بار را می‌شود به‌صورت $pdA = pbdx$ هم بیان کرد، که در آن p فشار نسبی مایع[1] و b عرض ورق است؛ پس $\omega = bp$ است. اما چون فشار نسبی در هر مایع برابر است با $p = \gamma h$، ... در آن γ چگالی مایع و h فاصلهٔ عمودی تا سطح آزاد است، نتیجه می‌شود که

$$w = bp = b\gamma h \qquad (۱۳.۵)$$

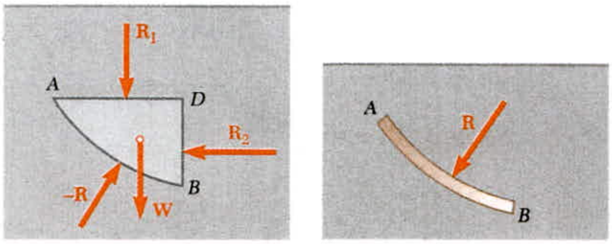
...ه نشان می‌دهد ω، یعنی بار در واحد طول متناسب با h است و در نتیجه به‌طور ...طی با x' تغییر می‌کند.

با توجه به نتایج بخش ۸.۵، مشاهده می‌کنیم که برایند $(\mathbf{R})$ نیروهای هیدروستاتیکی ...رد بر یک طرف ورق از لحاظ مقدار برابر با مساحت ذوزنقهٔ زیرمنحنی بار است و

۱. فشار p، که نشان‌دهندهٔ بار بر واحد سطح است، برحسب N/m^2 یا lb/ft^2 بیان می‌شود. N/m^2 ...که یکای فرعی SI است پاسکال (Pa) نامیده می‌شود.



عکس ۴.۵ همان‌طورکه در این بخش بحث شد سد گراندکولی سه نوع مختلف نیروهای گسترده را تحمل می‌کند: وزن عناصر سازنده‌اش، نیروهای فشار وارد از آب بر وجه غوطه‌ور، و نیروهای فشار وارد از زمین بر پایه‌اش.



شکل ۱۹.۵

خط اثرش از C مرکز هندسی آن سطح عبور می‌کند. به نقطهٔ Pی ورق که R به آن وارد می‌شود مرکز فشار[1] می‌گویند.

حالا نیروهای وارد از یک مایع بر یک سطح منحنی با عرض ثابت را در نظر می‌گیریم [شکل ۱۹.۵ (الف)]. چون تعیین برایند $\mathbf{R}$ این نیروها با انتگرال‌گیری مستقیم ساده نیست، جسم آزاد حاصل از جداکردن حجم مایع ABD محصور به سطح منحنی AB و دو سطح تخت AD و DB را در نظر می‌گیریم [شکل ۱۹.۵ (ب)]. نیروهای وارد بر جسم آزاد ABD عبارت‌اند از وزن $\mathbf{W}$ مربوط به مایع جداشده، برایند R_1 نیروهای وارد بر AD، برایند R_2 نیروهای وارد بر BD، و برایند $-\mathbf{R}$ نیروهای وارد از سطح منحنی بر مایع. برایند $-\mathbf{R}$ برابر و در خلاف جهت برایند R نیروهای وارد از مایع بر سطح منحنی است؛ خط اثر این دو برایند یکی است. نیروهای $\mathbf{W}$، $\mathbf{R}_1$، و $\mathbf{R}_2$ را می‌شود با روشهای استاندارد تعیین کرد؛ پس از آنکه مقدار این نیروها به‌دست آمد، نیروی $-\mathbf{R}$ را می‌توان از حل معادله‌های تعادل جسم آزاد شکل ۱۹.۵ (ب) به‌دست آورد. برایند $\mathbf{R}$ نیروهای هیدروستاتیکی وارد بر سطح منحنی، با تغییر جهت $-\mathbf{R}$ به‌دست خواهد آمد.

روشهای مطرح‌شده در این بخش را می‌توان برای تعیین برایند نیروهای هیدروستاتیکی وارد بر سطح سدها یا دریچه‌ها و پره‌های مستطیل‌شکل به کار برد. برایند نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور با عرض متغیر را با روشهای فصل ۹ تعیین خواهیم کرد.

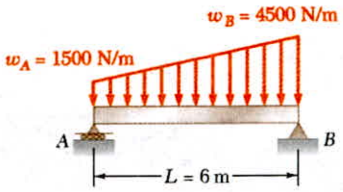
مسئلهٔ نمونه ۹.۵

تیری بار گسترده‌ای را مطابق شکل تحمل می‌کند. (الف) بار متمرکز معادل و (ب) عکس‌العملها در تکیه‌گاهها را تعیین کنید.

۱. با توجه به اینکه سطح زیرمنحنی بار برابر است با $\omega_E L$ و با توجه به معادلهٔ (۱۳.۵) می‌توان نوشت

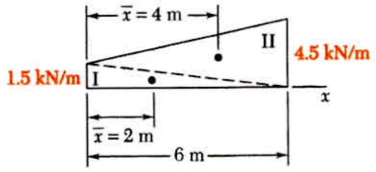
$$R = \omega_E L = (bp_E)L = p_E(bL) = p_E A$$

که در آن A مساحت ورق را نشان می‌دهد. پس، بزرگی $\mathbf{R}$ را می‌توان از ضرب‌کردن مساحت ورق در فشار مرکز E آن به‌دست آورد. اما برایند $\mathbf{R}$ را باید بر نقطهٔ P وارد کرد، نه بر E.



حل:

الف. بار معادل متمرکز. بزرگی برایند بار برابر است با سطح زیر منحنی بار؛ خط اثر برایند از مرکز هندسی همین سطح عبور می‌کند. سطح زیر منحنی بار را به دو مثلث تقسیم و جدول زیر را پر می‌کنیم. برای سادگی محاسبات و جدولبندی، بارهای وارد بر واحد طول را برحسب kN/m بیان می‌کنیم.



	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN·m
مثلث I	۴٫۵	۲	۹
مثلث II	۱۳٫۵	۴	۵۴
	$\Sigma A =$ ۱۸٫۰		$\Sigma \bar{x}A =$ ۶۳

پس

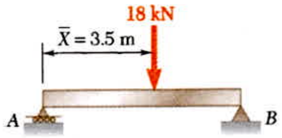
$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A : \bar{X}(۱۸\,\text{kN}) = ۶۳\,\text{kN·m} \qquad \bar{X} = ۳٫۵\,\text{m}$$

بار معادل متمرکز برابر است با

◄ $\mathbf{W} = ۱۸\,\text{kN} \downarrow$

و فاصلهٔ خط اثر آن برابر است با

◄ $\bar{X} = ۳٫۵\,\text{m}$ در سمت راست A.



ب. عکس‌العملها. عکس‌العمل در A عمودی است و آن را با A نشان می‌دهیم؛ عکس‌العمل در B را با مؤلفه‌هایش $\mathbf{B}_x$ و $\mathbf{B}_y$ نشان می‌دهیم. بار داده‌شده را می‌توانیم به‌صورت مجموع دو بار مثلثی مطابق شکل در نظر بگیریم. برایند هر بار مثلثی برابر است با مساحت مثلث و بر مرکز هندسی آن وارد می‌شود. معادله‌های تعادل جسم آزاد نشان داده شده را چنین می‌نویسیم

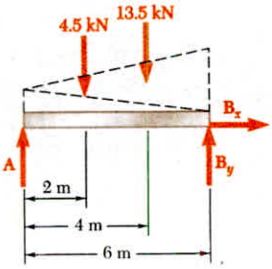
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ۰ : \qquad \mathbf{B}_x = ۰ \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰ : \; -(۴٫۵\,\text{kN})(۲\,\text{m}) - (۱۳٫۵\,\text{kN})(۴\,\text{m}) + B_y(۶\,\text{m}) = ۰$$

◄ $\mathbf{B}_y = ۱۰٫۵\,\text{kN} \uparrow$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = ۰ : \; +(۴٫۵\,\text{kN})(۴\,\text{m}) + (۱۳٫۵\,\text{kN})(۲\,\text{m}) - A(۶\,\text{m}) = ۰$$

◄ $\mathbf{A} = ۷٫۵\,\text{kN} \uparrow$

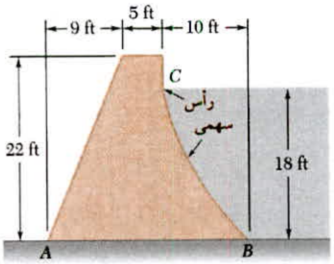


راه حل دیگر: بارگستردهٔ مفروض را می‌توان با برایندش که در قسمت الف به‌دست آمد، جایگزین کرد. عکس‌العملها را می‌توانیم با نوشتن معادله‌های تعادل $\Sigma F_x = ۰$ و $\Sigma M_A = ۰$ و $\Sigma M_B = ۰$ تعیین کنیم. در نتیجه داریم

◄ $\mathbf{A} = ۷٫۵\,\text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{B}_y = ۱۰٫۵\,\text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{B}_x = ۰$

مسئلهٔ نمونه ۵.۱۰

سطح مقطع یک سد بتنی مطابق شکل است. مقطعی از آن به ضخامت ۱ ft را در نظر بگیرید. (الف) برایند نیروهای عکس‌العمل وارد از زمین بر پایهٔ AB سد، و (ب) برایند نیروهای فشار وارد از آب بر وجه BC سد را تعیین کنید. وزن مخصوص بتن $۱۵۰\,\text{lb/ft}^۳$ و وزن مخصوص آب $۶۲٫۴\,\text{lb/ft}^۳$ است.



حل:

الف. عکس‌العمل زمین. جسم آزاد را مقطع $AEFCDB$ به ضخامت ۱ ft سد و آب اختیار می‌کنیم. نیروهای عکس‌العمل وارد از زمین بر پایهٔ AB با سیستم کوپل ـ نیروی معادل در A نشان داده شده است. نیروهای دیگر وارد بر جسم آزاد عبارت‌اند از وزن سد، که با مؤلفه‌های $\mathbf{W}_۱$، $\mathbf{W}_۲$، $\mathbf{W}_۳$ نشان داده شده؛ $\mathbf{W}_۴$ وزن آب، و $\mathbf{P}$ برایند نیروهای فشار وارد بر مقطع BD توسط آب موجود در سمت راست BD، داریم

$$W_۱ = \frac{۱}{۲}(۹\,\text{ft})(۲۲\,\text{ft})(۱\,\text{ft})(۱۵۰\,\text{lb}/\text{ft}^۳) = ۱۴۸۵۰\,\text{lb}$$

$$W_۲ = (۵\,\text{ft})(۲۲\,\text{ft})(۱\,\text{ft})(۱۵۰\,\text{lb}/\text{ft}^۳) = ۱۶۵۰۰\,\text{lb}$$

$$W_۳ = \frac{۱}{۳}(۱۰\,\text{ft})(۱۸\,\text{ft})(۱\,\text{ft})(۱۵۰\,\text{lb}/\text{ft}^۳) = ۹۰۰۰\,\text{lb}$$

$$W_۴ = \frac{۲}{۳}(۱۰\,\text{ft})(۱۸\,\text{ft})(۱\,\text{ft})(۶۲٫۴\,\text{lb}/\text{ft}^۳) = ۷۴۸۸\,\text{lb}$$

$$P = \frac{۱}{۲}(۱۸\,\text{ft})(۱\,\text{ft})(۱۸\,\text{ft})(۶۲٫۴\,\text{lb}/\text{ft}^۳) = ۱۰۱۰۹\,\text{lb}$$

معادله‌های تعادل

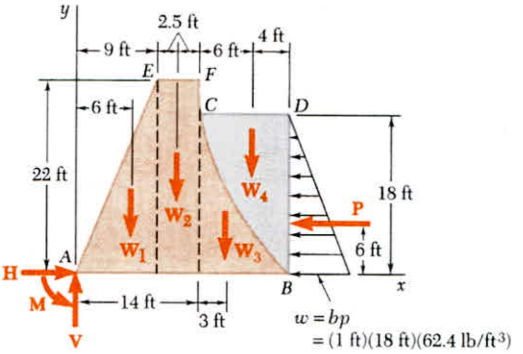
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ۰ : \quad H - ۱۰۱۰۹\,\text{lb} = ۰ \qquad \mathbf{H} = ۱۰۱۱۰\,\text{lb} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ : \quad V - ۱۴۸۵۰\,\text{lb} - ۱۶۵۰۰\,\text{lb} - ۹۰۰۰\,\text{lb} - ۷۴۸۸\,\text{lb} = ۰$$

$$\mathbf{V} = ۴۷۸۴۰\,\text{lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰ : \quad -(۱۴۸۵۰\ \mathrm{lb})(۶\ \mathrm{ft}) - (۱۶۵۰۰\ \mathrm{lb})(۱۱٫۵\ \mathrm{ft})$$
$$- (۹۰۰۰\ \mathrm{lb})(۱۷\ \mathrm{ft}) - (۷۴۸۸\ \mathrm{lb})(۲۰\ \mathrm{ft})$$
$$+ (۱۰۱۰۹\ \mathrm{lb})(۶\ \mathrm{ft}) + M = ۰$$

$$\mathbf{M} = ۵۲۰۹۶۰\ \mathrm{lb\cdot ft}$$ ◄

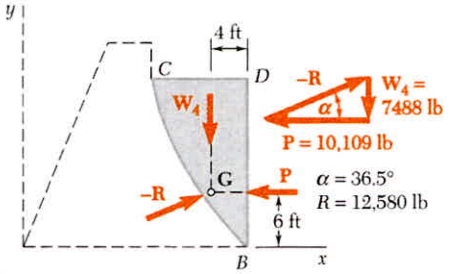


…توانیم به‌جای سیستم کوپل-نیروی به‌دست آمده تک‌نیرویی به فاصلهٔ d در طرف …ت A قرار دهیم، که

$$d = \frac{۵۲۰۹۶۰\ \mathrm{lb\cdot ft}}{۴۷۸۴۰\ \mathrm{lb}} = ۱۰٫۸۹\ \mathrm{ft}$$

ب. برایند R نیروهای آب. قسمت سهموی BCD آب را به‌عنوان جسم آزاد انتخاب می‌کنیم. نیروها عبارت‌اند از برایند $\mathbf{R}-$ نیروهای وارد از سد بر آب، وزن $\mathbf{W}_۴$ و نیروی $\mathbf{P}$. چون این نیروها باید همرس باشند، $\mathbf{R}-$ از G نقطهٔ تقاطع $\mathbf{W}_۴$ و $\mathbf{P}$ عبور می‌کند. مثلث نیرو را رسم و بزرگی و راستای $\mathbf{R}-$ را از روی آن تعیین می‌کنیم. برایند $\mathbf{R}$ نیروهای وارد از آب بر وجه BC برابر و مخالف $\mathbf{R}-$ است.

$$\mathbf{R} = ۱۲۵۸۰\ \mathrm{lb} \measuredangle ۳۶٫۵°$$ ◄



چگونه مسئله حل کنیم

…در مسئله‌های این درس با دو نوع بارگذاری معمول و بسیار مهم روبه‌رو هستید: یکی …های گسترده روی تیرها و دیگری نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور با عرض ثابت. به …جی که در بخشهای ۸.۵ و ۹.۵ آوردیم و در مسئله‌های نمونهٔ ۹.۵ و ۱۰.۵ نشان …دادیم تعیین تک‌نیروی معادل برای هر یک از این بارگذاریها مستلزم اطلاع از محل …مرکزهای هندسی است.

۱. تحلیل تیرهایی که در معرض بارهای گسترده‌اند. در بخش ۸.۵ نشان دادیم …ه به‌جای بارگسترده روی یک تیر می‌توانیم یک تک‌نیروی معادل قرار بدهیم. بزرگی …ن نیرو برابر است با مساحت سطح زیرمنحنی بار و خط اثرش از مرکز هندسی آن …طح عبور می‌کند. پس، باید حل مسئله را با قراردادن تک‌نیروی معادل به‌جای هر …ک از بارهای گسترده بر روی تیر آغاز کنید. بعد می‌توانید عکس‌العملهای تکیه‌گاههای …تیر را، با استفاده از روشهای فصل ۴، حساب کنید.

…بارهای گسترده پیچیده را باید، در صورت امکان، به شکل سطحهای نشان داده …ده در شکل ۸.۵ (الف) در آورید [مسئلهٔ نمونهٔ ۹.۵]. بعد می‌توانید به‌جای هر یک …این سطحها یک تک‌نیروی معادل قرار بدهید و سیستم نیروهای معادل را باز هم …ساده‌تر کنید. وقتی مسئلهٔ نمونه ۹.۵ را مطالعه می‌کنید توجه داشته باشید که از تشابه …یان نیرو و سطح و از روشهای تعیین محل مرکز هندسی سطح مرکب برای تحلیل …ک تیر تحت تأثیر بارهای گسترده چگونه استفاده کرده‌ایم.

۲. حل مسئله‌های مربوط به نیروهای وارد بر اجسام غوطه‌ور. در موقع حل این …ع مسئله‌ها باید نکات و روشهای زیر را به‌خاطر داشته باشید.

الف. فشار p در عمق h زیر سطح آزاد یک مایع برابر است با γh یا $\rho g h$، که …و ρ وزن مخصوص و چگالی مایع است. بار وارد بر واحد طول (w) سطح یک …جسم غوطه‌ور با عرض ثابت b برابر است با

$$w = bp = b\gamma h = b\rho g h$$

ب. خط اثر نیروی برایند ($\mathbf{R}$) وارد بر یک سطح تخت غوطه‌ور، عمود بر سطح …ست.

ج. برای یک سطح مستطیلی تخت قائم و یا مایل به عرض b، به‌جای بارگذاری روی سطح می‌شود یک توزیع بار خطی قرار داد که به شکل ذوزنقه است (شکل ۱۸.۵). بزرگی $\mathbf{R}$ هم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$R = \gamma h_E A$$

که در آن h_E، فاصلهٔ عمودی از مرکز سطح و A مساحت سطح است.

د. اگر لبهٔ بالایی سطح مستطیل شکل منطبق بر سطح آزاد مایع باشد آن وقت منحنی بار (به‌جای ذوزنقه‌ای) مثلثی خواهد بود، چون فشار مایع در سطح آزاد آن برابر با صفر است. در این مورد، خط اثر $\mathbf{R}$ به سهولت تعیین می‌شود، چون این خط اثر برای یک بارگستردهٔ مثلثی، از مرکز هندسی می‌گذرد.

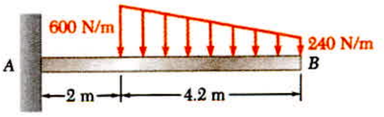
هـ. پیشنهاد می‌کنیم که به‌جای تحلیل ذوزنقه از روش قسمت ب مسئلهٔ نمونهٔ ۹.۵ استفاده کنید. اول بارگسترده ذوزنقه‌ای را به دو مثلث تقسیم کنید و سپس بزرگی برایند هر یک از این بارهای مثلثی را محاسبه کنید. (این بزرگی برابر است با مساحت مثلث ضرب‌در عرض صفحه). توجه کنید که خط اثر هر یک از نیروهای برایند از مرکز هندسی مثلث متناظر عبور می‌کند و مجموع این نیروها معادل با $\mathbf{R}$ است. پس به‌جای استفاده از $\mathbf{R}$ می‌توانید از دو نیروی برایند معادل استفاده کنید، که نقاط اثرشان به‌آسانی محاسبه می‌شود. البته معادلهٔ داده شده برای R در بند ج را باید فقط وقتی به‌کار ببرید که بخواهید بزرگی $\mathbf{R}$ را پیدا کنید.

و. اگر سطح غوطه‌ور با عرض ثابت خمیده باشد برای پیدا کردن برایند نیروی وارد بر سطح باید تعادل حجم مایع محصور به سطح منحنی مورد نظر و صفحات عمودی و افقی را در نظر بگیرید (شکل ۱۹.۵). در نظر داشته باشید که نیروی $\mathbf{R}_۱$ در شکل ۱۹.۵ برابر با وزن مایع بالای صفحهٔ AD است. روش حل مسئله‌های سطوح خمیدهٔ غوطه‌ور در مایع در قسمت ب مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰.۵ نشان داده شده است.

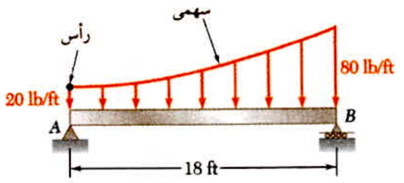
در مباحث دیگر مکانیک (به ویژه در مقاومت مصالح و مکانیک سیالات) برای استفاده از ایده‌های ارائه شده نشان داده در این درس فرصت فراوانی خواهید داشت.

مسئله‌ها

۶۱.۵ و ۶۲.۵ برای تیر و بارگذاری نشان داده شده، مطلوب است (الف) بزرگی و مکان برایند بارگسترده، (ب) عکس‌العمل در تکیه‌گاه تیر.

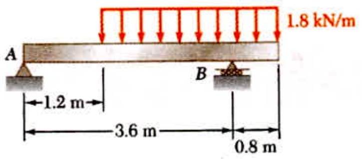


شکل م ۶۱.۵

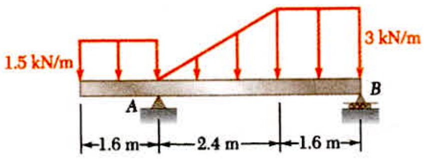


شکل م ۶۲.۵

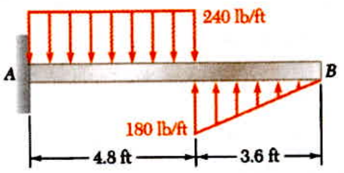
۶۳.۵ تا ۶۸.۵ عکس‌العملها در تکیه‌گاههای تیر را برای بارگذاری داده شده به‌دست آورید.



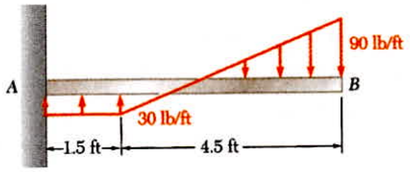
شکل م ۶۳.۵



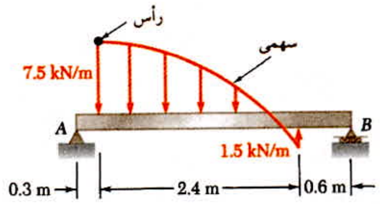
شکل م ۶۴.۵



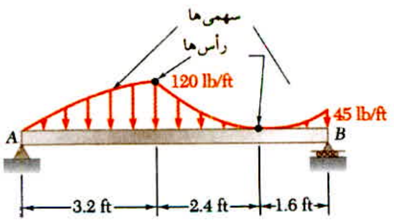
شکل م ۶۵.۵



شکل م ۶۶.۵

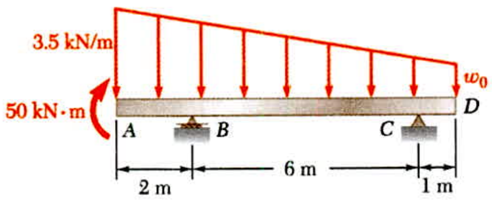


شکل م ۶۷.۵



شکل م ۶۸.۵

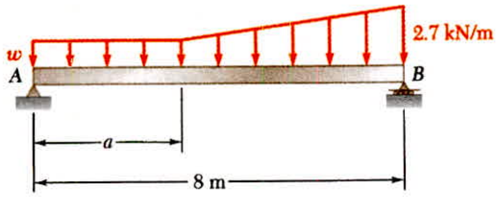
۶۹.۵ عکس‌العملها در تکیه‌گاههای تیر را برای بارگذاری داده شده وقتی $w_0 = ۱٫۵\,\mathrm{kN/m}$ باشد به‌دست آورید.



شکل م ۶۹.۵ و م ۷۰.۵

۷۰.۵ مطلوب است (الف) بارگسترده w_0 در انتهای D از تیر $ABCD$ برای ...، عکس‌العمل در نقطه B صفر باشد، (ب) عکس‌العمل متناظر در C.

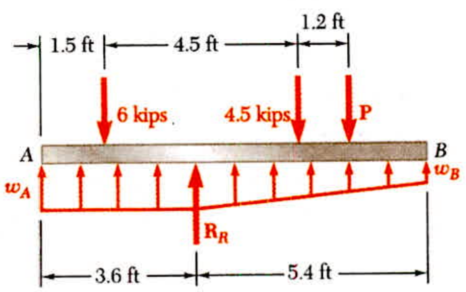
۷۱.۵ می‌دانیم که $w = ۳۰۰\,\mathrm{N/m}$، مطلوب است (الف) کمترین فاصله a به‌نحوی که عکس‌العمل عمودی در تکیه‌گاه B دو برابر در A باشد، (ب) عکس‌العملهای متناظر در تکیه‌گ...



شکل م ۷۱.۵ و م ۷۲.۵

۷۲.۵ می‌دانیم که $w = ۳۰۰\,\mathrm{N/m}$، مطلوب است کمترین فاصله a را در حالتی که ن... عکس‌العمل عمودی در تکیه‌گاه B به عکس‌العمل عمودی در تکیه‌گاه A ماکزیمم باشد، (...) عکس‌العمل متناظر در تکیه‌گاهها.

۷۳.۵ تیر مدرج AB سه بار متمرکز را نگهداری می‌کند و روی خاک و تخته سنگ وسیع ساکن است. خاک یک بارگسترده به سمت بالا بر آن وارد می‌کند و تخته سنگ بار مت... $\mathbf{R}_R$ را مطابق شکل بر آن وارد می‌کند. می‌دانیم که $P = ۱\,\mathrm{kip}$ و $w_B = \frac{۱}{۲}w_A$. مط... است مقادیر w_A و R_R متناظر با حالت تعادل.

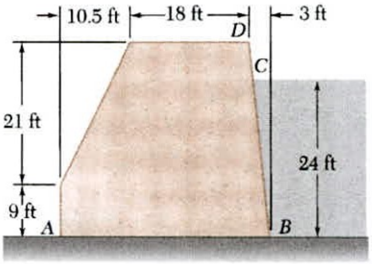


شکل م ۷۳.۵ و م ۷۴.۵

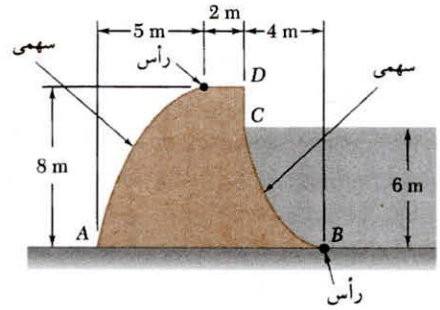
۷۴.۵ تیر مدرج AB سه بار متمرکز را نگهداری می‌کند و روی خاک و تخته سنگ بار مت... $\mathbf{R}_R$ را مطابق شکل وارد می‌کند. می‌دانیم که $w_B = ۰٫۴w_A$. مطلوب است (الف) بیشت... مقدار $\mathbf{P}$ را که تیر در حالت تعادل وارد می‌کند. (ب) مقدار متناظر w_A.

در مسئله‌های زیر وزن مخصوص آب تازه را $\gamma = ۶۲٫۴\ lb/ft^۳$ و وزن مخصوص بتن $\gamma_c = ۱۵۰\ lb/ft^۳$ در دستگاه U.S. و چگالی آب تازه را $\rho = ۱۰^۳\ kg/in^۳$ و چگالی بتن را $\rho_c = ۲٫۴۰ \times ۱۰^۳\ kg/m^۳$ در دستگاه SI در نظر بگیرید. به مبحث چگونگی تعیین وزن مخصوص مواد مفروض و چگالی آنها توجه کنید.

۷۵.۵ و ۷۶.۵ مقطع عرضی یک سد بتنی را در شکل ببینید. برای مقطعی از سد به عرض واحد مطلوب است (الف) عکس‌العمل نیروهای وارد شده از زمین روی پایه AB سد، (ب) ... اثر برایند نیروهای عکس‌العمل در قسمت (الف). (ج) برایند نیروهای فشاری وارد توسط ... روی وجه DB سد.

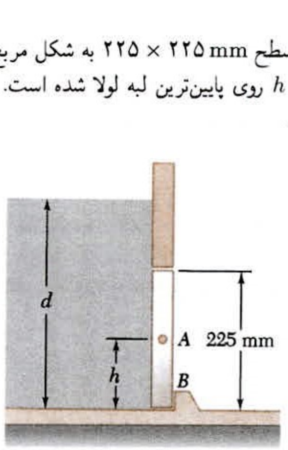


شکل م ۷۵.۵



شکل م ۷۶.۵

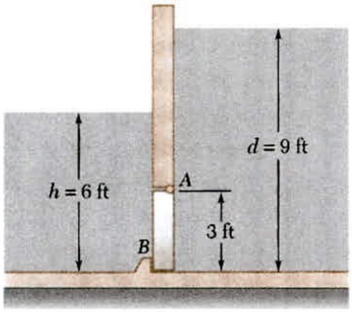
۷۷.۵ دریچه خودکار به سطح ۲۲۵×۲۲۵ mm به شکل مربع حول محور افقی در نقطه ... به فاصله $h = ۹۰$ mm روی پایین‌ترین لبه لولا شده است. مطلوب است عمق d آب ... اینکه دریچه باز باشد.



شکل م ۷۷.۵ و م ۷۸.۵

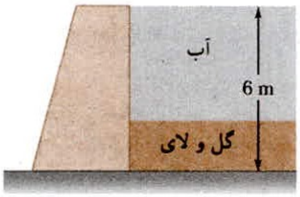
۷۸.۵ دریچه خودکار به سطح ۲۲۵×۲۲۵ mm به شکل مربع حول محور افقی در نقطه A لولا شده است. اگر دریچه باز باشد عمق $d = ۴۵۰$ mm است. معین کنید فاصله h را ... از قعر آب در نقطه A.

۷۹.۵ مجرای آب تازه باتلاق را برای بردن به اقیانوس داخل یک درب خودکار بسته می‌کنند که عرض آن ۴ ft و ارتفاع آن ۳ ft است. درب توسط لولاهایی در امتداد لبه بالایی در A و ... مانع روی میله کف درب نقطه B نگهداری می‌شود. در لحظهٔ مفروض سطح آب باتلاق و اقیانوس به‌ترتیب برابر $h = ۶$ ft و $d = ۹$ ft. معین کنید نیروی وارد از کف روی درب B و عکس‌العمل لولا در A (وزن مخصوص آب‌شور $۶۴\ lb/ft^۳$ است.



شکل م ۷۹.۵

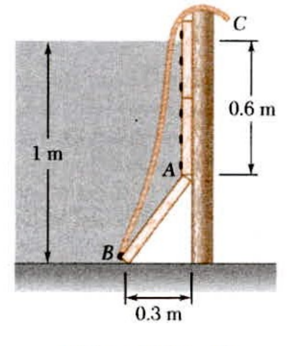
۸۰.۵. سدی برای دریاچه‌ای طراحی شده تا مانع نیروی اضافی توسط گل و لای و لجن قعر دریاچه شود. با فرض اینکه گل و لای و لجن رسوب یافته در ته دریاچه معادل با مایعی به چگالی $\rho_s = ۱٫۷۶ \times ۱۰^۳\ kg/m^۳$ و با در نظر گرفتن مقطعی از سد به عرض ۱ m، معین کنید درصد ازدیاد در نیروی وارد شده روی وجه سد برای جمع شدگی گل و لای به عمق ۱٫۵ m.



شکل م ۸۰.۵ و م ۸۱.۵

۸۱.۵ پایهٔ یک سد در یک دریاچه برای مقاومت ۱۵۰ درصد نیروی افقی آب طراحی شده است. پس از ساخت سد پی بردند که گل و لای (که معادل است با مایعی به چگالی $\rho_s = ۱٫۷۶ \times ۱۰^۳\ kg/m^۳$ در قعر دریاچه با آهنگ ۲۰ mm در سال رسوب می‌کند. با در نظر گرفتن اینکه مقطع سد به عرض ۱ m است، معین کنید چند سال طول می‌کشد تا سد ناامن شود.

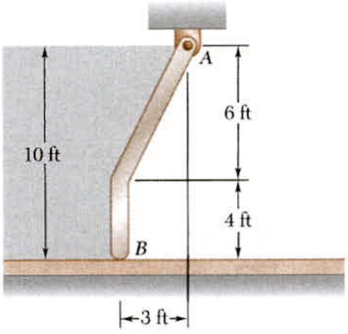
۸۲.۵ سدی موقت به عرض ۱٫۵ m در کانال آب تازه متشکل است از دو تخته برای قرار گرفتن پایه تیر در پهلوهای کانال و تخته مناسب دیگر AB، مطابق شکل، که یک سرش به تیر و سر دیگرش به زمین کانال متصل شده است. وقتی طناب BC شل شود و از اصطکاک چشم‌پوشی شود، مطلوب است (الف) نیروی افقی وارد بر تخته AB توسط هر یک از پایه‌های تیر، (ب) نیروی عمودی وارد بر لبهٔ بالایی تخته AB، (ج) عکس‌العمل در B.



شکل م ۸۲.۵ و م ۸۳.۵

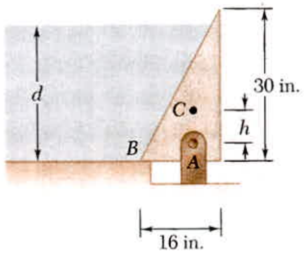
۸۳.۵ سدی موقت به عرض ۱٫۵ m در کانال آب تازه متشکل است از دو تخته برای قرار گرفتن پایه تیر در پهلوهای کانال و تخته مناسب دیگر AB، مطابق شکل، که یک سرش به تیر و سر دیگرش به کانال متصل است. از اصطکاک چشم‌پوشی کنید، بزرگی و راستای کشش حداقل در طناب BC را که باعث حرکت تخته AB می‌شود، تعیین کنید.

۸۴.۵ دریچه AB واقع در انتهای کانال آب به عرض ۶ ft توسط لولاها در لبه بالایی نگهداری می‌شود. اگر کف کانال بدون اصطکاک باشد، مطلوب است عکس‌العمل در A و B.



شکل م ۸۴.۵

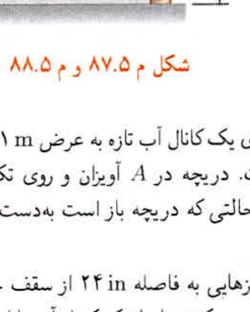
۸۵.۵ دریچه منشوری شکل در انتهای یک کانال آب تازه بدون اصطکاک جای داده شده است و توسط پین و دیوارکوب در A نگهداری می‌شود و روی تکیه‌گاه B ساکن است. پین در فاصله $h = ۴\ \text{in}$ زیرمرکز گرانش دریچه در نقطه C قرار دارد. معین کنید عمق d آب را برای زمانی که دریچه باز خواهد بود.



شکل م ۸۵.۵ و م ۸۶.۵

۸۶.۵ دریچه منشوری شکل در انتهای یک کانال آب تازه بدون اصطکاک جای داده شده است و توسط پین و دیوارکوب در A و روی تکیه‌گاه بدون اصطکاک در B ساکن است. معین کنید فاصله h را، اگر دریچه در حالت $d = ۳۰\ \text{in}$ باز باشد.

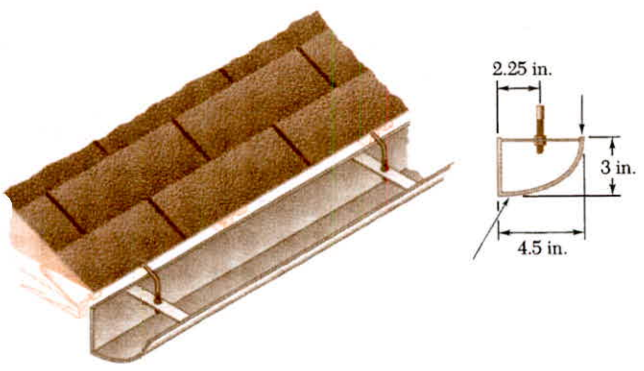
۸۷.۵ دریچه‌ای در انتهای یک کانال آب تازه به عرض ۱ m از سه صفحه مستطیل 125-kg فولادی ساخته شده است. دریچه در نقطه A آویزان و روی تکیه‌گاه بدون اصطکاک در D نگهداری می‌شود. می‌دانیم که $d = ۰٫۷۵\ \text{m}$، مطلوب است عکس‌العملها در A و D.



شکل م ۸۷.۵ و م ۸۸.۵

۸۸.۵ دریچه‌ای در انتهای یک کانال آب تازه به عرض ۱ m از سه صفحه مستطیل 125-kg فولادی ساخته شده است. دریچه در A آویزان و روی تکیه‌گاه D بدون اصطکاک ساکن است. عمق d آب را در حالتی که دریچه باز است به‌دست آورید.

۸۹.۵ ناودانی توسط آویزهایی به فاصله ۲۴ in از سقف خانه‌ای آویزان است. پس از اینکه برگها راه عبور آب را مسدود می‌کنند، ناودان کم کم از آب باران پر می‌شود. وقتی که ناودان کاملاً از آب پر شد مطلوب است. (الف) برایند فشار نیروی وارد توسط آب روی مقطع 24-in سطح خمیده ناودان، (ب) سیستم کوپل-نیروی وارد بر روی یک آویز در محل اتصال به ناودان.



شکل م ۸۹.۵

حجمها

۱۰.۵ مرکز گرانی جسم سه‌بعدی ــ مرکز هندسی حجم

مرکز گرانی (G) یک جسم سه‌بعدی از تقسیم جسم به اجزای کوچک، و برابر قراردا... وزن $\mathbf{W}$ وارد بر نقطهٔ G با سیستم نیروهای گستردهٔ $\Delta\mathbf{W}$ که نمایندهٔ وزنهای اج... کوچک هستند، به‌دست می‌آید. اگر محور y را عمودی و جهت مثبت آن را رو به... بگیریم (شکل ۲۰.۵)، و بردار مکان G را با $\bar{\mathbf{r}}$ نشان بدهیم و $\mathbf{W}$ را برابر با مج... وزنهای جزئی $\Delta\mathbf{W}$ و گشتاور آن حول O را برابر با مجموع گشتاورهای آن وزنها ... نقطهٔ O قرار بدهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}: \quad & -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma\mathbf{M}_O: \quad & \bar{\mathbf{r}}\times(-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r}\times(-\Delta W\mathbf{j})] \end{aligned} \qquad (۱۳.۵)$$

اگر معادلهٔ آخری را مجدداً به شکل زیر بنویسیم

$$\bar{\mathbf{r}}W\times(-\mathbf{j}) = (\Sigma\mathbf{r}\,\Delta W)\times(-\mathbf{j}) \qquad (۱۴.۵)$$

مشاهده می‌کنیم که وزن $\mathbf{W}$ی جسم معادل با سیستم وزنهای جزئی $\Delta\mathbf{W}$ است به‌شرطی که داشته باشیم:

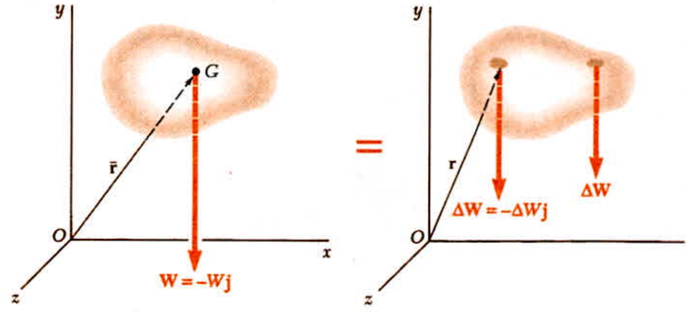
$$W = \Sigma\Delta W \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma\mathbf{r}\Delta W$$

با افزایش تعداد اجزا و کاهش اندازهٔ هر جزء در حد به‌دست می‌آوریم

$$W = \int dW \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r}\,dW \qquad (۱۵.۵)$$

می‌بینیم که رابطه‌های به‌دست آمده از وضعیت قرارگرفتن جسم مستقل‌اند. مثلاً، ... جسم و محورهای مختصات را طوری بچرخانیم که محور z رو به بالا قرار گیرد ...

عکس ۵.۵ برای پیش‌بینی مشخصات پرواز بویینگ ۷۴۷، هنگام انتقال شاتل فضایی مدا... مرکز گرانی بویینگ و شاتل باید تعیین شود.



شکل ۲۰.۵

دله‌های (۱۳.۵) و (۱۴.۵) بردار یکهٔ $\mathbf{j}-$ تبدیل به $\mathbf{k}-$ خواهد شد، اما معادله‌های ۱۵) تغییر نخواهد نکرد. با تجزیهٔ بردارهای $\bar{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{r}$ به مؤلفه‌های قائم پی‌می‌بریم که ین رابطهٔ (۱۵.۵) معادل است با سه معادلهٔ اسکالر زیر

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW \qquad (۱۶.۵)$$

اگر جسم از مادهٔ همگنی با وزن مخصوص γ ساخته شده باشد، بزرگی dW، ورن یک جزء بی‌نهایت کوچک، را می‌توانیم برحسب حجم dV آن جزء، و بزرگی W، ... کل آن، را برحسب حجم کل V بیان کنیم. می‌نویسیم

$$dW = \gamma\,dV \qquad W = \gamma V$$

راردادن این معادلها به‌جای dW و W در دومین رابطهٔ (۱۵.۵)، می‌نویسیم

$$\bar{\mathbf{r}}V = \int \mathbf{r}\,dV \qquad (۱۷.۵)$$

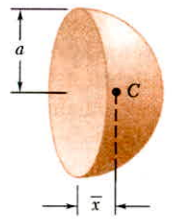
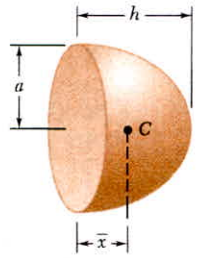
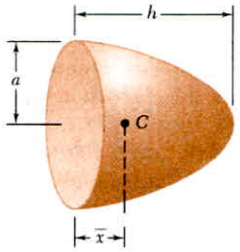
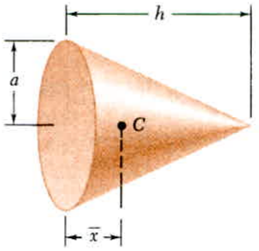
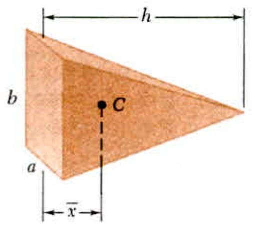
ی به شکل اسکالر

$$\bar{x}V = \int x\,dV \qquad \bar{y}V = \int y\,dV \qquad \bar{z}V = \int z\,dV \qquad (۱۸.۵)$$

نقطهٔ به مختصات $\bar{x}$، $\bar{y}$، و $\bar{z}$ مرکز هندسی C حجم V جسم هم می‌گویند. اگر سم همگن نباشد، معادله‌های (۱۸.۵) را نمی‌شود برای تعیین مرکز گرانی جسم به کار برد؛ اما آنها بازهم معرف مرکز هندسی حجم‌اند.

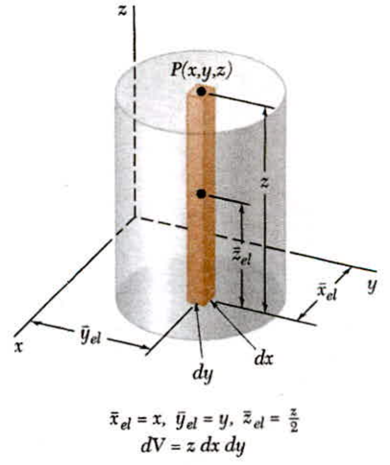
انتگرال $\int x dV$ را گشتاور اول حجم نسبت به صفحهٔ yz می‌نامند. به همین رتیب انتگرالهای $\int y dV$ و $\int z dV$، به ترتیب معرف گشتاورهای اول حجم نسبت صفحهٔ zx و صفحهٔ xyاند. از معادله‌های (۱۸.۵) پیداست که اگر مرکز هندسی م در یکی از صفحه‌های مختصات قرار داشته باشد، گشتاور اول حجم نسبت به صفحه صفر است.

یک حجم را نسبت به یک صفحه متقارن می‌گویند به‌شرطی که به‌ازای هر نقطهٔ P از آن، نقطه‌ای نظیر P' در همان حجم وجود داشته باشد به‌طوری که خط PP' بر ن صفحه عمود باشد و توسط صفحه به دو قسمت مساوی تقسیم شود. این صفحه ر صفحهٔ تقارن حجم مورد نظر می‌نامند. وقتی حجمی مانند V دارای یک صفحهٔ رن باشد، گشتاور اول V نسبت به آن صفحه صفر است و مرکز هندسی آن حجم در فحهٔ تقارن قرار دارد. وقتی حجمی دارای دو صفحهٔ تقارن باشد، مرکز هندسی آن م روی فصل مشترک آن دو صفحه قرار دارد. بالاخره، اگر حجمی دارای سه صفحهٔ تقارن باشد به‌طوری که این صفحه‌ها در یک نقطهٔ معین همدیگر را قطع کنند (یعنی نه در طول یک خط مشترک) نقطهٔ برخورد سه صفحه بر مرکز هندسی حجم منطبق است. این ویژگی به ما امکان می‌دهد که مرکز حجم کره‌ها، بیضیها، مکعبها، مکعب مستطیلها، و غیره را به‌آسانی تعیین کنیم.

شکل		$\bar{x}$	حجم
نیم‌کره		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
نیم بیضی‌وار دورانی		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
سهمی‌وار دورانی		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
مخروط		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
هرم		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

شکل ۲۱.۵ مرکز هندسی حجمهای متداول.

مرکز حجمهای نامتقارن یا حجمهایی را که تنها یک یا دو صفحهٔ تقارن دارند می‌بایست با انتگرال‌گیری تعیین کرد (بخش ۱۲.۵). مرکز هندسی تعدادی از حجمهای متداول در شکل ۲۱.۵ نشان داده شده است. باید توجه داشته باشید که به‌طور کلی مرکز هندسی حجم دورانی بر مرکز هندسی سطح مقطعش منطبق نیست، بنابراین، مرکز هندسی نیم‌کره با مرکز هندسی سطح نیم‌دایره‌ای، و مرکز هندسی مخروط با مرکز هندسی مثلث متفاوت است.



شکل ۲۲.۵ تعیین مرکز هندسی یک حجم با استفاده از انتگرال‌گیری دوگانه.

۱۱.۵ جسمهای مرکب

اگر جسمی را بشود به تعدادی از اشکال متداول نشان داده شده در شکل ۲۱.۵ تقسیم کرد، مرکز گرانی آن (G) را می‌شود با برابر قراردادن گشتاور وزن کل آن حول O با مجموع گشتاورهای وزنهای قسمتهای مختلف تشکیل‌دهندهٔ آن حول نقطهٔ O، تعیین کرد. همانند بخش ۱۰.۵، معادله‌های زیر را که معرف مختصات $\bar X$، $\bar Y$، و $\bar Z$ مرکز گرانی G هستند، به‌دست می‌آوریم.

$$\bar X\Sigma W = \Sigma\bar x W \qquad \bar Y\Sigma W = \Sigma\bar y W \qquad \bar Z\Sigma W = \Sigma\bar z W \tag{۱۹.۵}$$

اگر جسم از یک مادهٔ همگن ساخته شده باشد، مرکز گرانی و مرکز هندسی حجم آن بر هم منطبق‌اند و می‌توان از معادله‌های زیر استفاده کرد:

$$\bar X\Sigma V = \Sigma\bar x V \qquad \bar Y\Sigma V = \Sigma\bar y V \qquad \bar Z\Sigma V = \Sigma\bar z V \tag{۲۰.۵}$$

۱۲.۵ تعیین مرکز هندسی حجم به روش انتگرال‌گیری

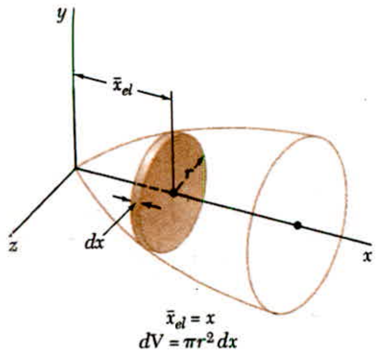
مرکز هندسی یک حجم محصور به سطحهای تحلیلی را می‌توانیم با محاسبهٔ انتگرالهای داده شده در بخش ۱۰.۵ تعیین کنیم:

$$\bar x V = \int x\,dV \qquad \bar y V = \int y\,dV \qquad \bar z V = \int z\,dV \tag{۲۱.۵}$$

اگر جزء حجم dV را برابر با مکعب کوچکی به اضلاع dx، dy، و dz اختیار کنیم، محاسبهٔ هریک از این انتگرالها مستلزم انتگرال‌گیری سه‌گانه است. اما اگر dV را برابر با حجم عنصر باریکی مطابق شکل ۲۲.۵ بگیریم، مختصات مرکز هندسی بیشتر حجمها را می‌شود با انتگرال‌گیری دوگانه به‌دست آورد. در این صورت برای به‌دست آوردن مختصات مرکز حجم مورد نظر می‌توانیم معادله‌های (۲۱.۵) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\bar x V = \int \bar x_{el}dV \qquad \bar y V = \int \bar y_{el}dV \qquad \bar z V = \int \bar z_{el}dV \tag{۲۲.۵}$$

و بعد عبارتهای ذکرشده در شکل ۲۲.۵ را به‌جای حجم dV و مختصات $\bar x_{el}$، $\bar y_{el}$، و $\bar z_{el}$ قرار بدهیم. اگر با استفاده از معادلهٔ سطح z را برحسب x و y بیان کنیم انتگرال‌گیری تبدیل به انتگرال‌گیری دوگانه برحسب x و y می‌شود.



شکل ۲۳.۵ تعیین مرکز هندسی حجم حاصل از دوران.

اگر حجم مورد نظر دارای دو صفحهٔ تقارن باشد، مرکز هندسی‌اش باید روی فصل مشترک آنها قرار بگیرد. اگر محور x را در امتداد این خط بگیریم، داریم

$$\bar y = \bar z = ۰$$

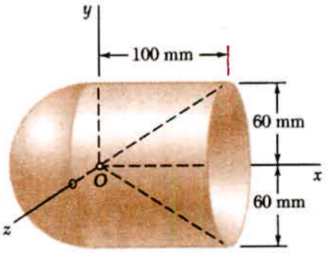
و تنها مختصه‌ای که باید تعیین کنیم $\bar x$ است. برای این کار از یک انتگرال‌گیری ساده استفاده می‌کنیم. حجم مورد نظر را به قطعه‌های نازکی به موازات صفحهٔ yz تقسیم می‌کنیم، و dV را در معادلهٔ

$$\bar x V = \int \bar x_{el}dV \tag{۲۳.۵}$$

برحسب x و dx بیان می‌کنیم. برای یک جسم حاصل از دوران، این قطعه‌ها دایر هستند و حجم آنها در شکل ۲۳.۵ داده شده است.

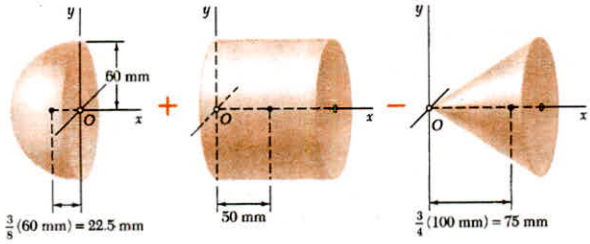
مسئلهٔ نمونه ۱۱.۵

محل مرکز گرانی جسم همگن دورانی نشان داده شده را تعیین کنید.



حل:

به دلیل تقارن، مرکز گرانی روی محور x قرار دارد. همان‌طور که می‌بینید جسم مورد نظر از یک نیم‌کره، به‌اضافهٔ یک استوانه، منهای یک مخروط به‌دست آمده است. حجم و طول مرکز هندسی هریک از این اجزا را از روی شکل ۲۱.۵ به‌دست می‌آوریم و در جدول زیر وارد می‌کنیم. بنابراین حجم کل جسم و گشتاور اول حجم آن نسبت به صفحهٔ yz تعیین می‌شود.



سطوح	حجم، $\text{mm}^۳$	$\bar{x}$, mm	$\bar{x}V$, $\text{mm}^۴$
نیم‌کره	$\frac{۱}{۲}\frac{۴\pi}{۳}(۶۰)^۳ = ۰{,}۴۵۲۴ \times ۱۰^۶$	$-۲۲{,}۵$	$-۱۰{,}۱۸ \times ۱۰^۶$
استوانه	$\pi(۶۰)^۲(۱۰۰) = ۱{,}۱۳۱۰ \times ۱۰^۶$	$+۵۰$	$+۵۶{,}۵۵ \times ۱۰^۶$
مخروط	$-\frac{\pi}{۳}(۶۰)^۲(۱۰۰) = -۰{,}۳۷۷۰ \times ۱۰^۶$	$+۷۵$	$-۲۸{,}۲۸ \times ۱۰^۶$
	$\Sigma V = ۱{,}۲۰۶ \times ۱۰^۶$		$\Sigma \bar{x}V = +۱۸{,}۰۹ \times ۱۰^۶$

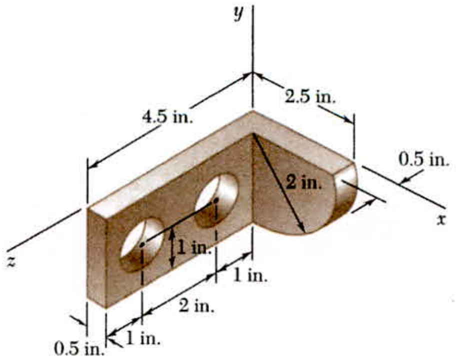
بنابراین

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V: \quad \bar{X}(۱{,}۲۰۶ \times ۱۰^۶\ \text{mm}^۳) = ۱۸{,}۰۹ \times ۱۰^۶\ \text{mm}^۴$$

$$\bar{X} = ۱۵\ \text{mm} \blacktriangleleft$$

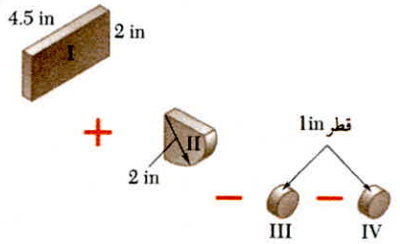
مسئلهٔ نمونه ۱۲.۵

محل مرکز گرانی قطعهٔ نشان داده شده را تعیین کنید. قطر هر دو سوراخ 1 in است.

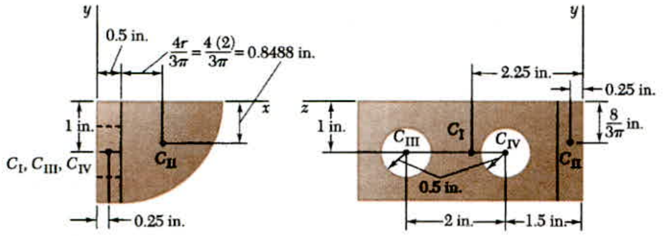


حل:

برای به‌دست آوردن قطعهٔ نشان داده شده می‌توان یک مکعب مستطیل (I) را به یک ربع استوانهٔ (II)، افزود و بعد دو استوانه به‌قطر 1 in (III و IV) را از مجموع آنها م کرد. حجم و مختصات مرکز هندسی هر جزء را بعد از محاسبه در جدول زیر وارد ی‌کنیم. با استفاده از این داده‌ها حجم کل و گشتاور حجم حول هریک از صفحه‌های مختصات را تعیین می‌کنیم.



	$V, \text{in}^۳$	$\bar{x}$, in	$\bar{y}$, in	$\bar{z}$, in	$\bar{x}V, \text{in}^۴$	$\bar{y}V, \text{in}^۴$	$\bar{z}V, \text{in}^۴$
I	$(۴{,}۵)(۲)(۰{,}۵) = ۴{,}۵$	۰,۲۵	−۱	۲,۲۵	۱,۱۲۵	−۴,۵	۱۰,۱۲۵
II	$\frac{۱}{۴}\pi(۲)^۲(۰{,}۵) = ۱{,}۵۷۱$	۱,۳۴۸۸	−۰,۸۴۸۸	۰,۲۵	۲,۱۱۹	−۱,۳۳۳	۰,۳۹۳
III	$-\pi(۰{,}۵)^۲(۰{,}۵) = -۰{,}۳۹۲۷$	۰,۲۵	−۱	۳,۵	−۰,۰۹۸	۰,۳۹۳	−۱,۳۷۴
IV	$-\pi(۰{,}۵)^۲(۰{,}۵) = -۰{,}۳۹۲۷$	۰,۲۵	−۱	۱,۵	−۰,۰۹۸	۰,۳۹۳	−۰,۵۸۹
	$\Sigma V = ۵{,}۲۸۶$				$\Sigma\bar{x}V = ۳{,}۰۴۸$	$\Sigma\bar{y}V = -۵{,}۰۴۷$	$\Sigma\bar{z}V = ۸{,}۵۵۵$



پس،

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V: \quad \bar{X}(۵{,}۲۸۶\ \text{in}^۳) = ۳{,}۰۴۸\ \text{in}^۴$$

$$\bar{X} = ۰{,}۵۷۷\ \text{in} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V: \quad \bar{Y}(۵{,}۲۸۶\ \text{in}^۳) = -۵{,}۰۴۷\ \text{in}^۴$$

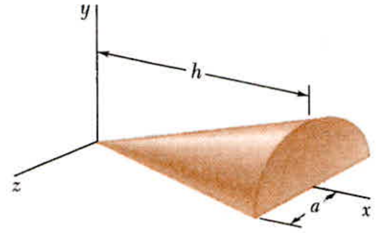
$$\bar{Y} = -۰{,}۹۵۵\ \text{in} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V: \quad \bar{Z}(۵{,}۲۸۶\ \text{in}^۳) = ۸{,}۵۵۵\ \text{in}^۴$$

$$\bar{Z} = ۱{,}۶۱۸\ \text{in} \blacktriangleleft$$

مسئلهٔ نمونه ۱۳.۵

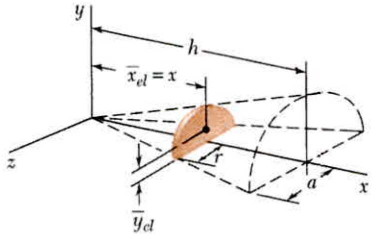
محل مرکز هندسی نیم‌مخروط قائم دورانی نشان داده شده را تعیین کنید.



حل:

چون صفحهٔ xy صفحهٔ تقارن است، مرکز هندسی در این صفحه قرار دارد و در نتیجه $\bar{z} = ۰$ است. قطعه‌ای به ضخامت dx را به عنوان جزء دیفرانسیل انتخاب می‌کنیم. حجم این جزء برابر است با

$$dV = \frac{۱}{۲}\pi r^۲ dx$$



مختصات $\bar{x}_{el}$ و $\bar{y}_{el}$ مرکز هندسی این جزء حجم را از روی شکل ۸.۵ به‌دست می‌آوریم (سطح نیم‌دایره‌ای).

$$\bar{x}_{el}=x \qquad \bar{y}_{el}=\frac{4r}{3\pi}$$

مشاهده می‌کنیم که r متناسب با x است و می‌نویسیم

$$\frac{r}{x}=\frac{a}{h} \qquad r=\frac{a}{h}x$$

حجم جسم برابر است با

$$V=\int dV=\int_0^h \frac{1}{2}\pi r^2dx=\int_0^h \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}x\right)^2dx$$
$$=\frac{\pi a^2h}{6}$$

گشتاور جزء دیفرانسیل نسبت به صفحهٔ yz برابر است با $\bar{x}_{el}dV$ و گشتاور کل جسم نسبت به این صفحه برابر است با

$$\int \bar{x}_{el}dV=\int_0^h x\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)dx=\int_0^h x\left(\frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{a}{h}x\right)^2dx$$
$$=\frac{\pi a^2h^2}{8}$$

پس،

$$\bar{x}V=\int \bar{x}_{el}dV \qquad \bar{x}\frac{\pi a^2h}{6}=\frac{\pi a^2h^2}{8} \qquad \blacktriangleleft\ \bar{x}=\frac{3}{4}h$$

همچنین گشتاور جزء دیفرانسیل نسبت به صفحهٔ zx برابر است با $\bar{y}_{el}dV$؛ و گشتاور کل برابر است با

$$\int \bar{y}_{el}dV=\int_0^h \frac{4r}{3\pi}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^h\left(\frac{a}{h}x\right)^3dx$$
$$=\frac{a^3h}{6}$$

پس،

$$\bar{y}V=\int \bar{y}_{el}dV \qquad \bar{y}\frac{\pi a^2h}{6}=\frac{a^3h}{6} \qquad \blacktriangleleft\ \bar{y}=\frac{a}{\pi}$$

چگونه مسئله حل کنیم

در مسئله‌های این درس از شما خواسته شده است که محل مرکز گرانی اجسام سه‌بعدی یا مرکز هندسی حجمهای آنها را تعیین کنید. تمام روشهایی که قبلاً برای اجسام دوبعدی گفتیم ــ استفاده از تقارن، تقسیم حجم به اشکال معمول، انتخاب مناسبترین عنصر، و غیره ــ در کلی‌ترین مورد جسم سه‌بعدی هم کاربرد دارند.

۱. تعیین محل مرکز گرانی اجسام مرکب. به‌طور کلی، باید معادله‌های (۱۹.۵) را به کار برد.

$$\bar{X}\Sigma W=\Sigma\bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W=\Sigma\bar{y}W \qquad \bar{Z}\Sigma W=\Sigma\bar{z}W \tag{۱۹.۵}$$

البته، برای مورد جسم همگن، مرکز گرانی جسم منطبق بر مرکز هندسی حجم آن است. بنابراین، برای این مورد خاص، محل مرکز گرانی جسم را از معادله‌های زیر هم می‌شود به‌دست آورد.

$$\bar{X}\Sigma V=\Sigma\bar{x}V \qquad \bar{Y}\Sigma V=\Sigma\bar{y}V \qquad \bar{Z}\Sigma V=\Sigma\bar{z}V \tag{۲۰.۵}$$

باید پی‌ببرید که این معادله‌ها صرفاً بسط همان معادله‌هایی هستند که قبلاً برای مسئله‌های اجسام دوبعدی به‌دست می‌آوردیم. چنانکه حل مسئله‌های نمونهٔ ۱۱.۵ و ۱۲.۵ نشان می‌دهند، روشهای حل مسئله‌های دو و سه‌بعدی یکسان‌اند. بنابراین، باز هم قویاً توصیه می‌کنیم که موقع تحلیل اجسام مرکب نمودارهای مناسب رسم کنید و جدول تشکیل بدهید. همچنین، موقع مطالعهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲.۵، دقت کنید که مؤلفه‌های x و y ربع استوانه چگونه با استفاده از معادله‌های مرکز هندسی ربع دایره به‌دست آمده‌اند.

وقتی جسم مورد نظر متشکل از سیمها یا ورقهای یکنواختِ هم‌جنس باشد می‌بینیم که دو مورد خاص جالب توجه اتفاق می‌افتد.

الف. برای یک جسم متشکل از چند تکه سیم با سطح مقطع یکنواخت یکسان، وقتی به‌جای V عبارت AL را قرار بدهیم، مساحت سطح مقطع سیمها (A) پس از فاکتورگیری در معادله‌های (۲۰.۵) حذف خواهد شد. L طول یک تکه سیم معین است. بنابراین معادله‌های (۲۰.۵) در این مورد تبدیل می‌شوند به

$$\bar{X}\Sigma L=\Sigma\bar{x}L \qquad \bar{Y}\Sigma L=\Sigma\bar{y}L \qquad \bar{Z}\Sigma L=\Sigma\bar{z}L$$

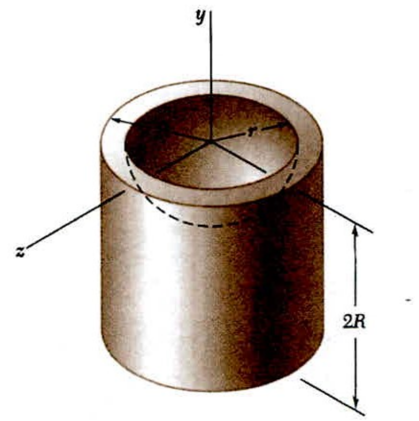
ب. برای یک جسم متشکل از چند ورق با ضخامت یکنواخت یکسان، وقتی به‌جای V عبارت tA را قرار بدهیم، ضخامت (t) ورقها پس از فاکتورگیری در معادله‌های (۲۰.۵) حذف خواهد شد. A مساحت یک ورق معین است. بنابراین معادله‌های (۲۰.۵) در این مورد تبدیل می‌شوند به

$$\bar{X}\Sigma A=\Sigma\bar{x}A \qquad \bar{Y}\Sigma A=\Sigma\bar{y}A \qquad \bar{Z}\Sigma A=\Sigma\bar{z}A$$

۲. تعیین محل مرکز هندسی حجم با انتگرال‌گیری مستقیم. چنانکه در بخش ۱۱.۵ توضیح دادیم، محاسبهٔ انتگرالهای معادله‌های (۲۱.۵) را می‌شود با انتخاب یک عنصر باریک (شکل ۲۲.۵) یا یک قطعهٔ نازک (شکل ۲۳.۵) برای جزء حجم dV ساده کرد. بنابراین، حل مسئله را باید، در صورت امکان، با تشخیص dVای شروع کنید که محاسبهٔ انتگرالهای ساده یا دوگانه‌ای که به‌دست می‌دهد از همه ساده‌تر باشد. برای اجسام دورانی، این حجم کوچک ممکن است یک قطعهٔ نازک (همانند مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳.۵) یا یک پوستهٔ استوانه‌ای نازک باشد. البته، مهم است به یاد داشته باشید که عبارتی که برای ربط دادن متغیرها می‌نویسید (مثلاً رابطهٔ میان r و x در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳.۵) مستقیماً بر پیچیدگی انتگرالهایی که باید محاسبه کنید تأثیر خواهد گذاشت، و بالاخره باز هم یادآوری می‌کنیم که $\bar{x}_{el}$، $\bar{y}_{el}$، $\bar{z}_{el}$ در معادله‌های (۲۲.۵) مختصات مرکز هندسی dVاند.

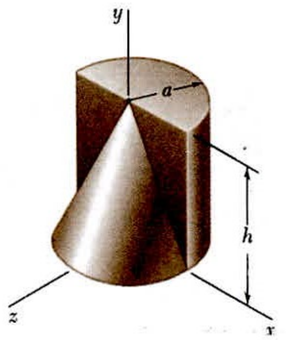
مسئله‌ها

۹۰.۵ جسم مرکب نشان داده شده با برداشتن یک نیم‌کره‌ای به شعاع r از استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع $2R$ تشکیل شده است. معین کنید (الف) مختصهٔ y مرکز هندسی را وقتی $r = 3R/4$ باشد، (ب) نسبت r/R که آن هم $\bar{y} = -1{,}2R$ باشد.



شکل م ۹۰.۵

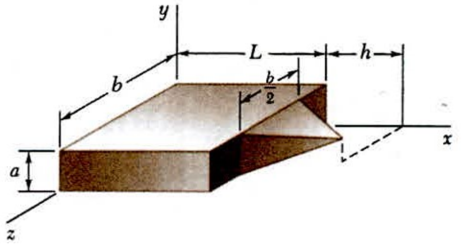
۹۱.۵ مطلوب است مختصه y مرکز هندسی جسم نشان داده شده.



شکل م ۹۱.۵ و م ۹۲.۵

۹۲.۵ مختصه مرکز هندسی جسم نشان داده شده را تعیین کنید (راهنمایی. از نتیجه مسئلهٔ نمونه ۱۳.۵ استفاده کنید.)

۹۳.۵ جسم مرکب نشان داده شده را در نظر بگیرید. مطلوب است (الف) مقدار $\bar{x}$ را وقتی $h = L/2$، (ب) نسبت h/L را برای $\bar{x} = L$ به‌دست آورید.

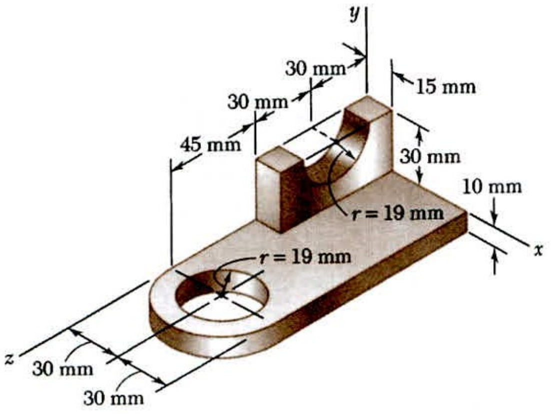


شکل م ۹۳.۵

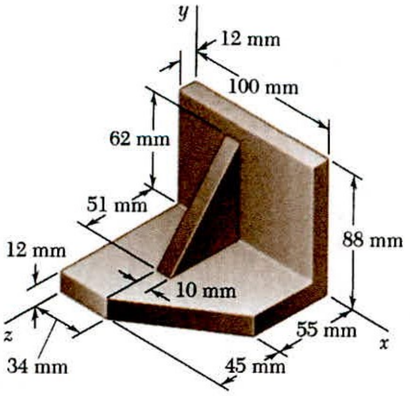
۹۴.۵ برای قطعه‌ای از ماشین نشان داده شده، مکان مختصه y مرکز گرانی را تعیین کنید.

۹۵.۵ برای قطعه‌ای از ماشین نشان داده شده، مکان مختصه z مرکز گرانی را تعیین کنید.

۹۶.۵ برای نگهداری دیوارکوب نشان داده شده، مکان مختصه x مرکز گرانی را تعیین کنید.



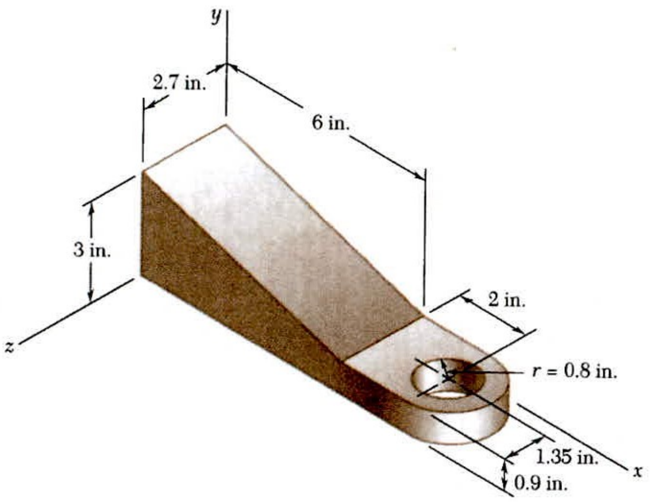
شکل م ۹۴.۵ و م ۹۵.۵



شکل م ۹۶.۵ و م ۹۷.۵

۹۷.۵ برای نگهداری دیوارکوب نشان داده شده مختصه z مرکز گرانی را تعیین کنید.

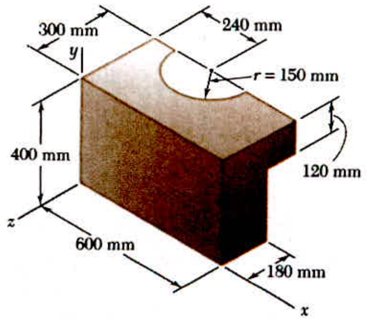
۹۸.۵ برای قطعه ماشین نشان داده شده، مکان مختصه x مرکز گرانی را تعیین کنید.



شکل م ۹۸.۵ و م ۹۹.۵

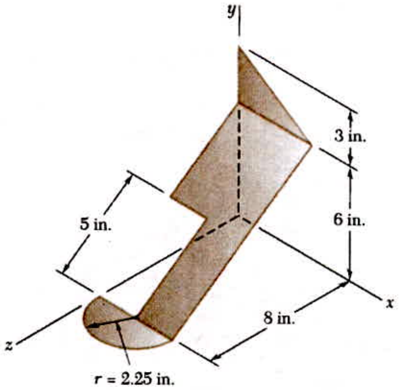
۹۹.۵ برای قطعه ماشین نشان داده شده، مکان مختصه y مرکز گرانی را تعیین کنید.

۱۰۰.۵ ورق فلزی به ضخامت یکنواخت برای قسمتی از دور سقف کارخانه‌ای استفاده می‌شود. مکان مرکز گرانی آن را تعیین کنید. اگر از سه جسم نشان داده شده ترکیب شده باشد.



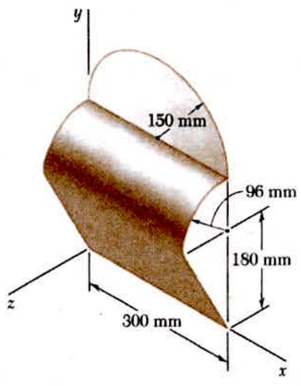
شکل م ۱۰۰.۵

۱۰۱.۵ مکان مرکز گرانی ورق فلزی نشان داده شده را تعیین کنید.



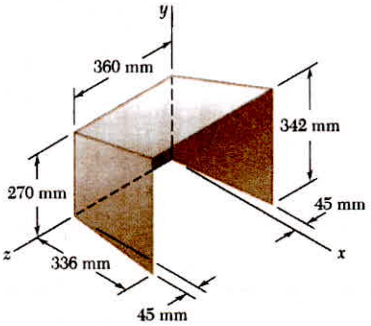
شکل م ۱۰۱.۵

۱۰۲.۵ مکان مرکز گرانی ورق فلزی شکل را تعیین کنید.



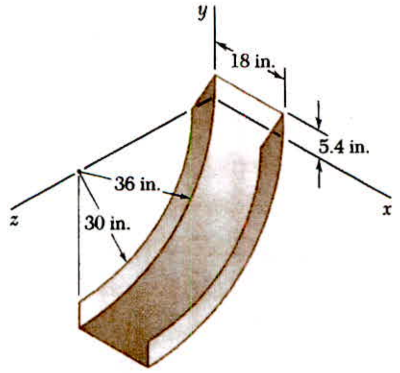
شکل م ۱۰۲.۵

***۱۰۳.۵** محیط بسته برای یک وسیله الکتریکی از ورق فلزی به ضخامت یکنواخت ساخته شده است. مکان مرکز گرانی آن را تعیین کنید.



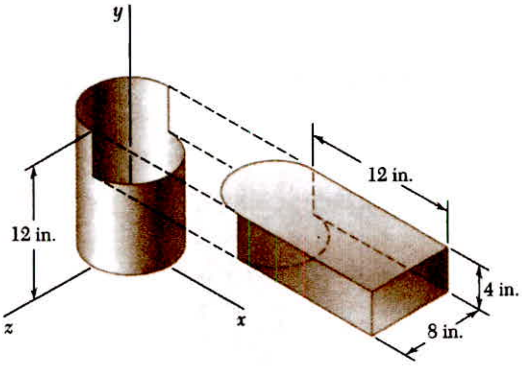
شکل م ۱۰۳.۵

۱۰۴.۵ جسم شیب‌داری از فلزی به ضخامت یکنواخت ساخته شده است. مکان مرکز گرانی آن را تعیین کنید.



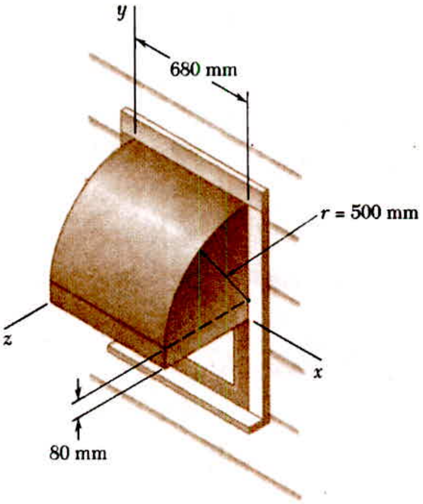
شکل م ۱۰۴.۵

۱۰۵.۵ مجرای استوانه‌ای به قطر ۸ in و مجرای مستطیلی به ابعاد ۸ in × ۴ را مطابق شکل به هم وصل کرده‌اند. اگر مجراها از ورق فلزی با ضخامت یکنواخت و یکسان ساخته شد باشند، مرکز گرانی مجموعه را تعیین کنید.



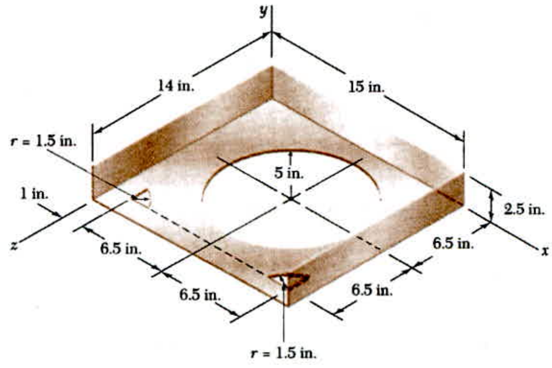
شکل م ۱۰۵.۵

۱۰۶.۵ پنجره‌ای از ورق فلزی با ضخامت یکنواخت ساخته شده است. مکان مرکز گرانی آن را تعیین کنید.



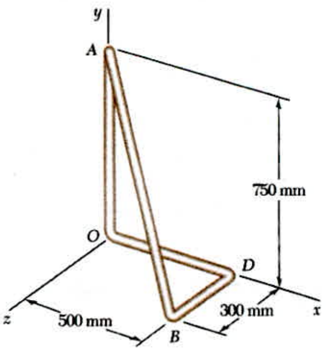
شکل م ۱۰۶.۵

۱۰۷.۵ قاب نازک و پلاستیکی یک ساعت دیواری ضخامت یکنواخت دارد. مکان مرکز گرانی این قاب را به‌دست آورید.



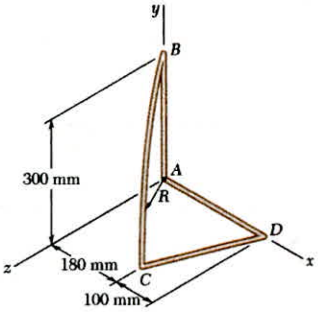
شکل م ۱۰۷.۵

۱۰۸.۵ میله برنجی نازکی با سطح مقطع یکنواخت را به شکل نشان داده شده خم کرده‌ایم. مکان مرکز گرانی آن را به‌دست آورید.



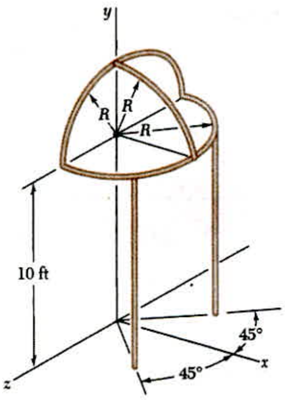
شکل م ۱۰۸.۵

۱۰۹.۵ سیم نازک فولادی با سطح مقطع یکنواخت به شکل نشان داده شده خم شده است، وری‌که قوس BC ربع دایره‌ای به شعاع R است. مرکز گرانی آن را تعیین کنید.



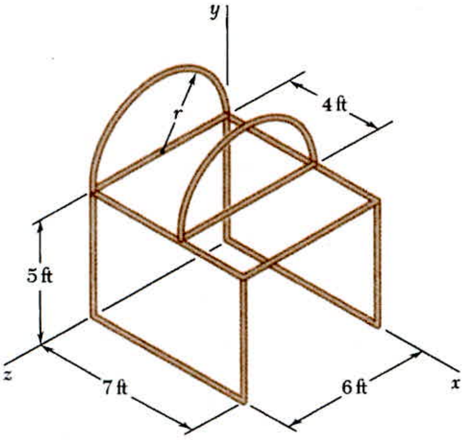
شکل م ۱۰۹.۵

۱۱۰.۵ سردر یک مغازه از لوله فولادی یکنواخت ساخته شده است. اگر $R = ۴$ ft باشد مرکز گرانی آن را به‌دست آورید.



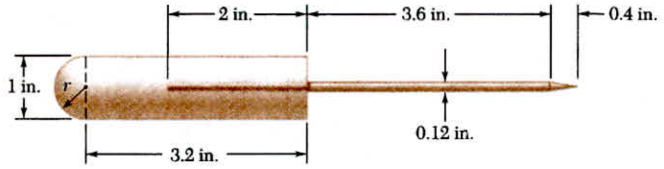
شکل م ۱۱۰.۵

۱۱۱.۵ قاب قابل حمل مجهز به پوششی از لوله فولادی با ضخامت یکنواخت ساخته شده است. مکان مرکز گرانی آن را تعیین کنید.



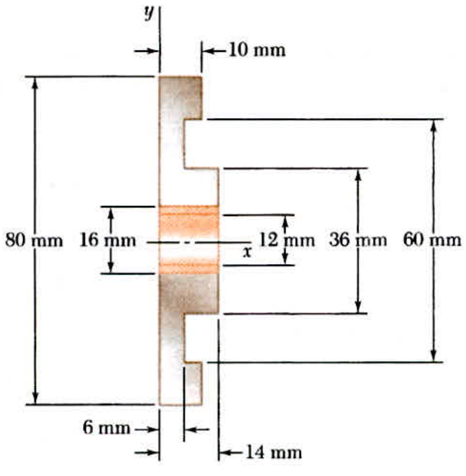
شکل م ۱۱۱.۵

۱۱۲.۵ درفشی دارای دسته پلاستیکی و تیغه فولادی است. اگر وزن مخصوص پلاستیک $۰٫۰۳۷۴ \ \mathrm{lb/in^3}$ و فولاد $۰٫۲۸۴ \ \mathrm{lb/in^3}$ باشد، مرکز گرانی آن را به‌دست آورید.



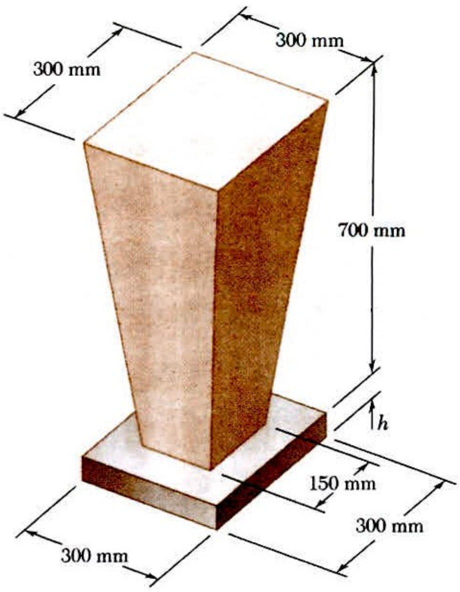
شکل م ۱۱۲.۵

۱۱۳.۵ تسمه صاف قرقره هرزگرد از پلی کربنات بوش برنزی داخل غلاف فولادی ساخته شده است. اگر چگالیهای پلی کربنات و برنز $۱۲۵۰ \ \mathrm{kg/m^3}$ و $۸۸۰۰ \ \mathrm{kg/m^3}$ باشد، مطلوب است مختصه مرکز گرانی قرقره.



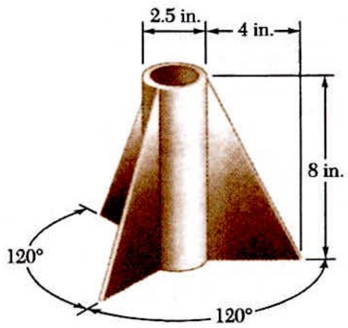
شکل م ۱۱۳.۵

۱۱۴.۵ شکل منتظمی از سنگ به چگالی $۲۵۷۰ \ \mathrm{kg/m^3}$ تراشیده شده است. این هرم را روی پایه فولادی به ضخامت h نصب کرده‌اند. چگالی فولاد $۷۸۶۰ \ \mathrm{kg/m^3}$ و ورقهای فولادی با ازدیاد ۵ mm، حداقل ضخامت h را تعیین کنید، برای اینکه مرکز گرانی نشانگر تقریباً ۳۰۰ mm بالای پایه آن باشد.



شکل م ۱۱۴.۵

۱۱۵.۵ سه صفحه برنجی را به یک لوله فولادی به شکل ستون پایه پرچم نشان داده شده، در آورده‌اند. ضخامت دیواره ۰٫۲۵ in و ضخامت هر ورق ۰٫۲ in است. معین کنید مکان مرکز گرانی پایه را (وزن مخصوص برنج $۰٫۳۰۶ \text{ lb/in}^3$ و فولاد $۰٫۲۸۴ \text{ lb/in}^3$)



شکل م ۱۱۵.۵

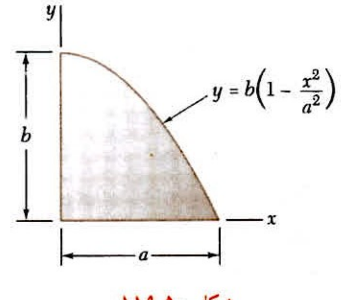
۱۱۶.۵ تا ۱۱۸.۵ مطلوب است مقادیر $\bar{x}$ برای دو حجم به‌دست آمده توسط انتگرال‌گیری مستقیم با قطع صفحه قائم شکل مسئله ۲۱.۵. صفحه قطع شده با قاعده شکل ۲۱.۵ به‌دست آمده موازی است و آن را به دو شکل با حجمهایی با ارتفاع برابر تقسیم می‌کند.

۱۱۶.۵ نیم کره

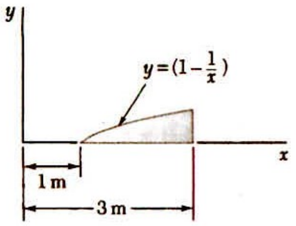
۱۱۷.۵ نیم‌بیضی دوار

۱۱۸.۵ سهمی دوار

۱۱۹.۵ و ۱۲۰.۵ مرکز هندسی حجم به‌دست آمده از دوران سطح هاشورزده حول محور x را تعیین کنید.

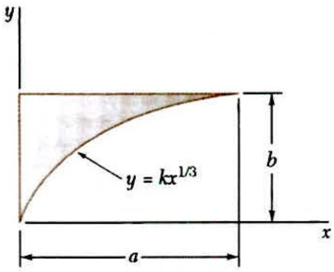


شکل م ۱۱۹.۵



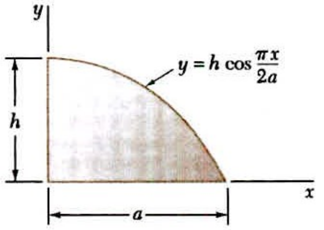
شکل م ۱۲۰.۵

۱۲۱.۵ مرکز هندسی حجم به‌دست آمده از دوران سطح هاشورزده حول خط $x = a$ ، تعیین کنید.



شکل م ۱۲۱.۵

***۱۲۲.۵** مرکز هندسی حجم حاصل از دوران قسمت منحنی کسینوسی را حول محور x تعیین کنید.

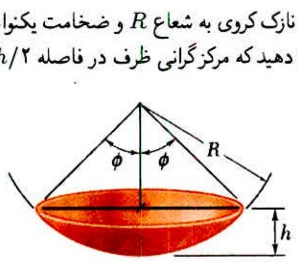


شکل م ۱۲۲.۵ و م ۱۲۳.۵

***۱۲۳.۵** مرکز گرانی حجم حاصل از دوران قسمتی از منحنی کسینوسی نشان داده شده حول محور y تعیین کنید (راهنمایی. از پوسته نازک استوانه‌ای به شعاع r و به ضخامت dr به‌عنوان جزء حجم استفاده کنید.

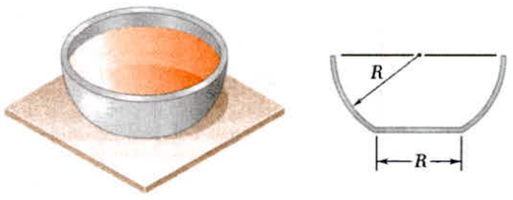
***۱۲۴.۵** نشان دهید که در هرم منتظم به ارتفاع h و n ضلع ($n = ۳, ۴, \ldots$)، مر هندسی حجم هرم در فاصلهٔ $h/۴$ بالای قاعده آن به‌دست می‌آید.

***۱۲۵.۵** در شکل ظرف نازک کروی به شعاع R و ضخامت یکنواخت t را می‌بینید. به روش انتگرال‌گیری مستقیم نشان دهید که مرکز گرانی ظرف در فاصله $h/۲$ بالای پایه ظرف قرار دارد.



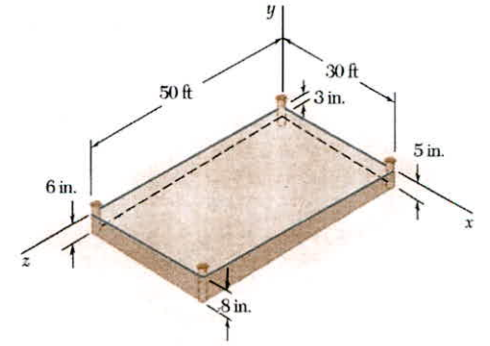
شکل م ۱۲۵.۵

۱۲۶.۵ سطح جانبی و قاعده سنبه جام دارای ضخامت یکنواخت t است. اگر $R \gg t$ و $R = ۳۵۰ \text{ mm}$ باشد، مطلوب است مرکز گرانی (الف) جام، (ب) سنبه.



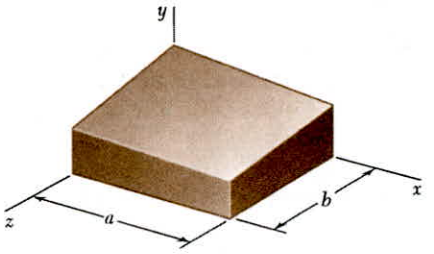
شکل م ۱۲۶.۵

۱۲۷.۵ یک قطعه زمین که قرار است در آن ساختمان‌سازی کنند، چهار میخ چوبی برای مشخص کردن گوشه‌های آن در زمین فرو می‌کنند. سپس برای استحکام سطح زمین زیربنا حداقل ۳ in شن می‌ریزند. معین کنید حجم شن لازم و مختصه x مرکز هندسی این حجم را (راهنمایی. سطح زیر شن صفحه مایلی است که می‌توان آن را با معادله $y = a + bx + cz$ نشان داد.)



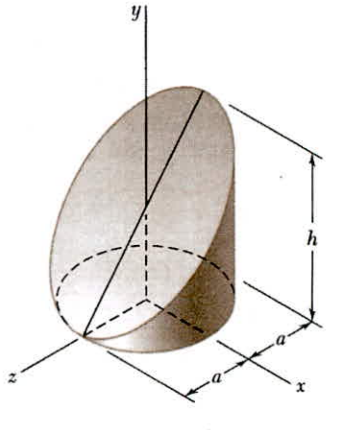
شکل م ۱۲۷.۵

۱۲۸.۵ به روش انتگرال‌گیری مستقیم مختصه z مرکز هندسی حجم نشان داده شده را به دست آورید. از قطع یک منشور متوازی‌السطوح توسط صفحه مایل به‌دست آمده از معادلهٔ $y = y_0 - y_1(z/a) - y_2(z/b)$ به‌دست آمده است.



شکل م ۱۲۸.۵

۱۲۹.۵ مکان هندسی مقطع نشان داده شده را به نحوی که از یک استوانه دایره‌ای با صفحه مایل برش داده شده تعیین کنید.



شکل م ۱۲۹.۵

دوره و خلاصه فصل ۵

این فصل عمدتاً اختصاص داشت به تعیین مرکز گرانی یک جسم صلب؛ یعنی به تعیین نقطهٔ G که یک تک‌نیروی $\mathbf{W}$، موسوم به وزن جسم، می‌توان به آن وارد کرد تا اثر جاذبهٔ زمین بر روی جسم را نشان بدهد.

در قسمت اول این فصل اجسام دوبعدی را در نظر گرفتیم، مانند ورقهای تخت و سیمهای واقع در صفحهٔ xy. با جمع‌بستن مؤلفه‌های نیرو در امتداد قائم z وگشتاورها حول محورهای افقی x و y (بخش ۲.۵)، روابط زیر را به‌دست آوردیم

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad (۲.۵)$$

که معرف وزن جسم و مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز گرانی آن هستند.

در مورد ورق تخت همگن و با ضخامت یکنواخت (بخش ۳.۵)، مرکز گرانی G ورق منطبق بر مرکز هندسی Cی سطح Aی ورق است که مختصات آن با روابط زیر مشخص می‌شوند

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \qquad (۳.۵)$$

به همین ترتیب مسئلهٔ تعیین مرکزگرانی سیم همگن با سطح مقطع یکنواخت و واقع در یک صفحه، به تعیین مرکز هندسی Cی خط L نمایندهٔ آن تبدیل می‌شود و درنتیجه داریم

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \qquad (۴.۵)$$

به انتگرالهای معادلات (۳.۵) می‌گویند گشتاورهای اول سطح A نسبت به محورهای x و y و آنها را به‌ترتیب با Q_y و Q_x نشان می‌دهند (بخش ۴.۵). داریم

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \qquad (۶.۵)$$

گشتاورهای اول یک خط را هم می‌شود به طریق مشابهی تعریف کرد.

اگر سطح یا خط دارای بعضی از خواص تقارن باشد تعیین مختصات مرکز هندسی آن ساده می‌شود. اگر سطح یا خط نسبت به یک محور متقارن باشد، مرکز هندسی آن C بر روی آن محور قرر دارد؛ و چنانچه نسبت به دو محور، تقارن داشته باشد C در محل تقاطع آن دو محور قرار دارد؛ و اگر نسبت به یک مرکز O متقارن باشد، C منطبق بر O است.

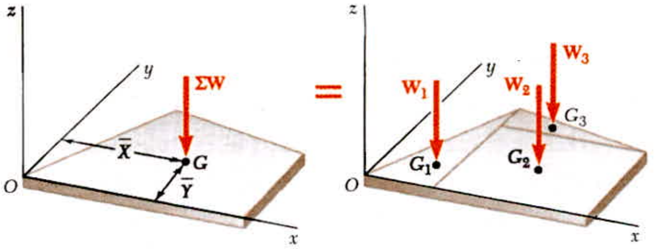
مساحتها و مرکز هندسیهای بعضی از اشکال متداول در جدول شکل ۸.۵ داده شده است. اگر یک ورق تخت را بتوانیم به تعدادی از این شکلها تقسیم کنیم، آن‌وقت می‌توانیم مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکزگرانی (G) آن را از روی مختصات $\bar{x}_1$، $\bar{x}_2$، ... و $\bar{y}_1$، $\bar{y}_2$، ... مرکز گرانیهای G_1، G_2، ... قسمتهای مختلف به‌دست بیاوریم (بخش ۵.۵). اگر گشتاورهای حول محورهای y و x را به‌ترتیب مساوی قرار بدهیم (شکل ۲۴.۵)، خواهیم داشت

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \qquad (۷.۵)$$

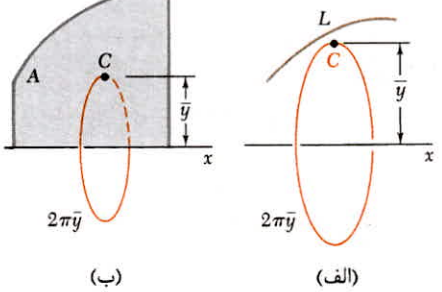
اگر ورق همگن و با ضخامت یکنواخت باشد، مرکز گرانی آن منطبق بر مرکز هندسی سطح آن می‌شود و معادله‌های (۷.۵) تبدیل می‌شوند به

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \qquad (۸.۵)$$

این معادله‌ها گشتاورهای اول سطح مرکب‌اند، و از آنها می‌شود برای تعیین مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکز هندسی کل سطح استفاده کرد [مسئلهٔ نمونهٔ ۱.۵]. مرکزگرانی سیم مرکب از چند قسمت هم به شکل مشابهی به‌دست می‌آید [مسئلهٔ نمونه ۲.۵].



شکل ۲۴.۵



شکل ۲۵.۵

برای به‌دست آوردن مختصات مرکز هندسی یک سطح محصور به منحنیهای جبری می‌شود انتگرال گرفت (بخش ۶.۵). برای این کار می‌توانیم یا انتگرالهای دوگانهٔ معادلات (۳.۵) را محاسبه کنیم یا یک انتگرال ساده بگیریم که از یک نوار نازک مستطیلی یا جزء سطح نشان داده در شکل ۱۲.۵ استفاده می‌کند. اگر مختصات مرکز هندسی جزء سطح dA را با $\bar{x}_{el}$، و $\bar{y}_{el}$ نشان بدهیم داریم

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA \qquad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA$$ (۹.۵)

بهتر است برای محاسبه گشتاورهای اول Q_y و Q_x از یک جزء سطح مشترک استفاده کنیم؛ این جزء سطح را می‌توانیم برای تعیین مساحت A هم به کار ببریم [مسئلهٔ نمونهٔ ۴.۵].

قضیه‌های پاپوس-گلدینوس محاسبهٔ مساحت سطحهای دورانی و حجم جسمهای دورانی را به تعیین مرکز هندسی منحنی مولد یا سطح مولد مربوط می‌کند (بخش ۷.۵). مساحت A سطح حاصل از دوران یک منحنی به طول L حول یک محور ثابت برابر است با [شکل ۲۵.۵ (الف)]

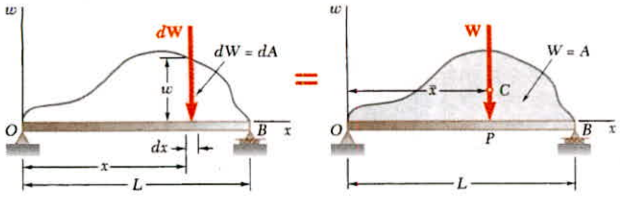
$$A = 2\pi\bar{y}L$$ (۱۰.۵)

که در آن $\bar{y}$ نمایندهٔ فاصلهٔ مرکز هندسی C منحنی تا محور ثابت است. همچنین حجم جسم حاصل از دوران یک سطح A حول یک محور ثابت [شکل ۲۵.۵ (ب)] برابر است با

$$V = 2\pi\bar{y}A$$ (۱۱.۵)

که در آن $\bar{y}$ نمایندهٔ فاصلهٔ مرکز هندسی C سطح تا محور ثابت است.

مفهوم مرکز هندسی سطح را برای حل مسئله‌هایی غیر از مسئله‌های مربوط به وزن ورقهای تخت هم می‌شود به کار برد. برای مثال برای تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاههای یک تیر (بخش ۸.۵) می‌شود به‌جای بار گستردهٔ w یک بار متمرکز $\mathbf{W}$ را که از نظر مقدار برابر با سطح زیر منحنی بار است و از مرکز هندسی C آن سطح می‌گذرد قرار داد (شکل ۲۶.۵). همین راه حل را می‌توان برای تعیین برایند نیروهای هیدروستاتیک وارد بر یک ورق مستطیل‌شکل غوطه‌ور در مایع به کار برد (بخش ۹.۵).



شکل ۲۶.۵

قسمت آخر این فصل اختصاص به تعیین مرکز گرانی G جسم سه‌بعدی داشت. مختصات $\bar{x}$، $\bar{y}$، و $\bar{z}$ نقطهٔ G با روابط زیر تعیین شد

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW$$ (۱۶.۵)

در مورد یک جسم همگن، مرکز گرانی G منطبق بر مرکز هندسی C حجم (V) جسم است، مختصات C با روابط زیر معین می‌شود

$$\bar{x}V = \int x\,dV \qquad \bar{y}V = \int y\,dV \qquad \bar{z}V = \int z\,dV$$ (۱۸.۵)

اگر حجم دارای یک صفحهٔ تقارن باشد، مرکز هندسی C در آن صفحه خواهد بود؛ اگر دارای دو صفحه تقارن باشد C روی فصل مشترک دو صفحه قرار خواهد داشت؛ اگر دارای سه صفحه تقارن باشد که یکدیگر را تنها در یک نقطه قطع کنند C در آن نقطه خواهد بود (بخش ۱۰.۵).

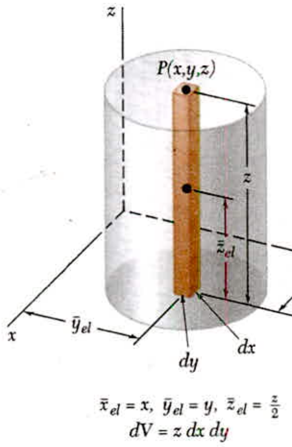
حجمها و مرکز هندسیهای بعضی از شکلهای سه‌بعدی ساده در شکل ۲۱.۵ داده شده است. وقتی جسمی را بتوان به چندتا از این شکلها تقسیم کرد، مختصات $\bar{X}$، $\bar{Y}$، و $\bar{Z}$ مرکز گرانی آن G را می‌توان از مختصات متناظر مرکز گرانیهای قسمتهای مختلف به‌دست آورد (بخش ۱۱.۵). داریم

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma\bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma\bar{y}W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma\bar{z}W$$ (۱۹.۵)

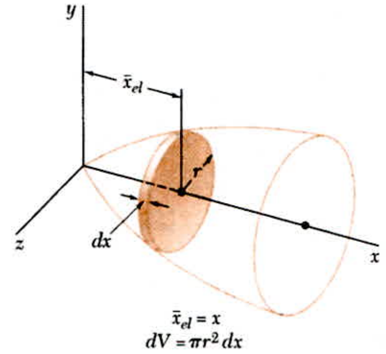
اگر جسم از یک مادهٔ همگن ساخته شده باشد، مرکز گرانی آن منطبق بر مرکز هندسی C حجمش است، و می‌نویسیم [مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱.۵ و ۱۲.۵]

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V$$ (۲۰.۵)

وقتی حجمی محصور به سطحهای تحلیلی است، مختصات مرکز هندسی‌اش را می‌شود با گرفتن انتگرال تعیین کرد (بخش ۱۲.۵). برای اجتناب از محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه در معادلات (۱۸.۵) می‌توانیم جزء حجم را مکعب باریکی مانند شکل ۷.۵ بگیریم. با نشان دادن مختصات مرکز هندسی جزء حجم dV، با $\bar{x}_{el}$، $\bar{y}_{el}$، و $\bar{z}_{el}$



شکل ۲۷.۵



شکل ۲۸.۵

.لات (۱۸.۵) را به این صورت می‌نویسیم

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} dV \qquad (۲۲.۵)$$

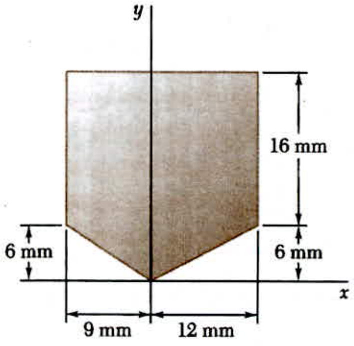
فقط شامل انتگرالهای دوگانه‌اند. اگر حجم دارای دو صفحه تقارن باشد مرکز سی‌اش C روی فصل مشترک آن دو صفحه قرار دارد. اگر محور x را در امتداد ل مشترک بگیریم و حجم را به قطعه‌های نازک موازی با صفحهٔ yz تقسیم کنیم، توانیم نقطهٔ C را با یک انتگرال‌گیری ساده از رابطهٔ زیر تعیین کنیم [مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳.۸].

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \qquad (۲۳.۵)$$

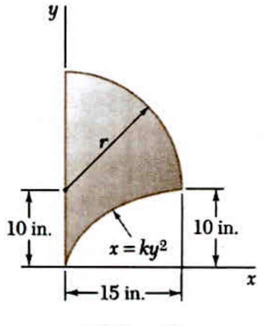
، جسم حاصل از دوران، این قطعه‌ها دایره‌ای‌اند و حجم آنها در شکل ۲۸.۵ داده ه است.

مسئله‌های دوره‌ای

۱۳۰.۵ و ۱۳۱.۵ مکان مرکز هندسی سطح نشان داده شده را تعیین کنید.



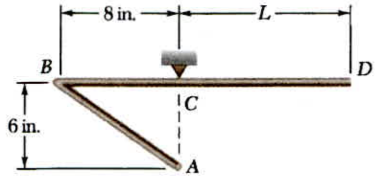
شکل م ۱۳۰.۵



شکل م ۱۳۱.۵

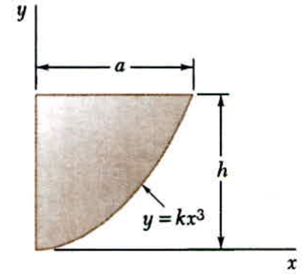
۱۳۲.۵ سیم باریک همگن را خم کرده تا به شکل مسئله ۱۳۰.۵ درآید. مرکز گرانی آن را به‌دست آورید.

۱۳۳.۵ سیم همگن $ABCD$ مطابق شکل خم شده و به قلابی در نقطه C متصل شده است. طول L را به نحوی که قسمت BCD تیر افقی باشد به‌دست آورید.



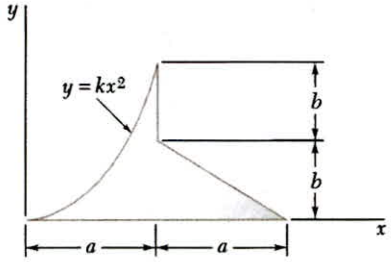
شکل م ۱۳۳.۵

۱۳۴.۵ به روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را تعیین کنید. جواب را برحسب a و h بیان کنید.



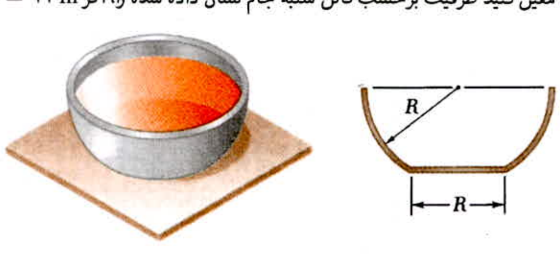
شکل م ۱۳۴.۵

۱۳۵.۵ به روش انتگرال‌گیری مستقیم مرکز هندسی سطح نشان داده شده را تعیین کنید. جواب را برحسب a و b بیان کنید.



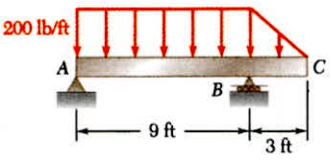
شکل م ۱۳۵.۵

۱۳۶.۵ معین کنید ظرفیت برحسب گالن سنبه جام نشان داده شده را، اگر $R =$ ۱۲ in باشد.

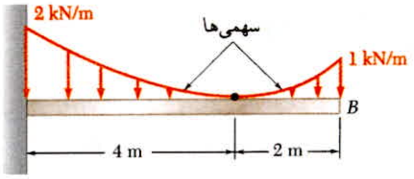


شکل م ۱۳۶.۵

۱۳۷.۵ و ۱۳۸.۵ معین کنید عکس‌العملهای در تیر آویزان شده را برای بارگذاری نشان داده شده.

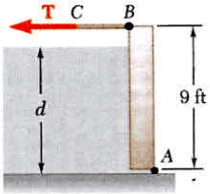


شکل م ۱۳۷.۵



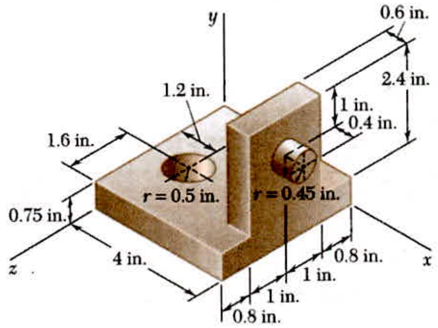
شکل م ۱۳۸.۵

۱۳۹.۵ سطح AB برابر 12×9 ft را از تانکی در پایین نقطه A آویزان کرده‌اند و در جایش توسط میله باریک BC نگهداری می‌شود. حداکثر نیروی کشش میله می‌تواند ایستادگی بدون شکست در برابر ۴۰ kips انجام دهد، و مشخصات طرح در میله از ۲۰٪ این مقدار تجاوز نکند. اگر تانک به آهستگی از آب پر شود. معین کنید حداکثر عمق مجاز d آب را در تانک.



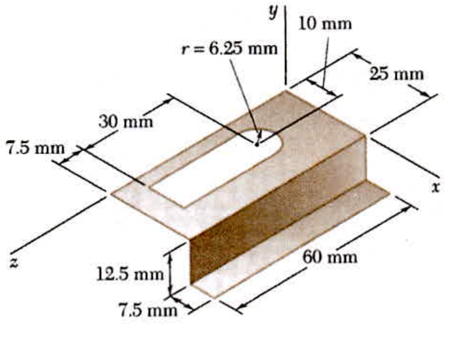
شکل م ۱۳۹.۵

۱۴۰.۵ برای قطعه ماشین نشان داده شده مطلوب است مختصه x مرکز گرانی.



شکل م ۱۴۰.۵

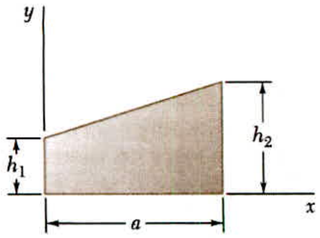
۱۴۱.۵ نصب دیوارکوب برای اجزای الکترونیک از ورقه فلزی به ضخامت یکنواخت تشکیل شده است. مرکز گرانی دیوارکوب را تعیین کنید.



شکل م ۱۴۱.۵

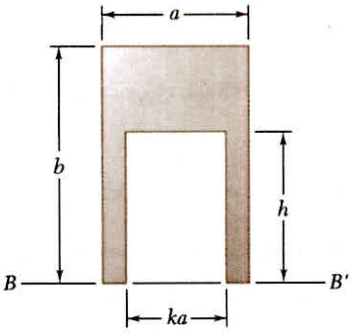
مسئله‌های کامپیوتری

۵.ک ۱ در ذوزنقه نشان داده شده معین کنید مختصات x و y مرکز هندسی آن را. می‌دانیم که $h_1 = a/n^2$ و $h_2 = a/n$. مقادیر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را به‌ازای $1 \le x \le 4$ و $a = 6$ in به‌دست آورید.



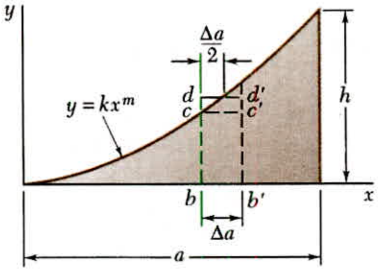
شکل م ۵.ک۱

۵.ک ۲ معین کنید فاصله h را به نحوی که مرکز هندسی سطوح هاشور خورده تا حد امکان بالای BB' باشد. نسبت h/b را برحسب تابع به‌ازای $0{,}125 \le k \le 0{,}875$ رسم کنید.



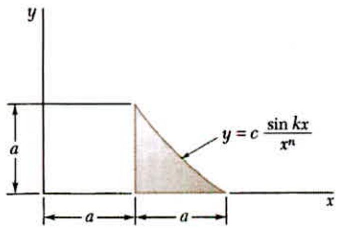
شکل م ۵.ک۲

۵.ک ۳ مساحت منحنی اسپاندرل معمول نشان داده شده را که از n مستطیل هر یک عرض Δa به شکل $bcc'b'$ تقریب بزنید و سپس با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی مرکز هندسی سطح را در حالات زیر به‌دست آورید (الف) $m = 2$، $a = 4$ in، $h = 4$ in؛ (ب) $m = 2$، $a = 4$ in، $h = 25$ in؛ (ج) $m = 5$، $a = 4$ in، $h = 4$ in؛ (د) $m = 5$، $a = 4$ in، $h = 25$ in. در هر حالت جوابهای به‌دست آمده را با مقادیر دقیق $\bar{x}$ و $\bar{y}$ که از فرمول داده شده در شکل ۸.۵ (الف) به‌دست آمده مقایسه کنید و درصد خطا را تعیین کنید.



شکل م ۵.ک۳

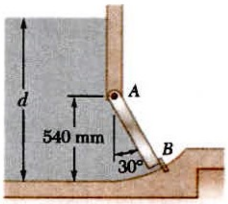
۵.ک ۴ حجم و سطح مساحت جسم توپر حاصل از دوران سطح نشان داده شده حول محور y را به‌دست آورید، به نحوی که $a = 80$ mm باشد و (الف) $a = 80$ mm و $n = 1$؛ (ب) $n = 2$؛ (ج) $n = 3$.



شکل م ۵.ک۴

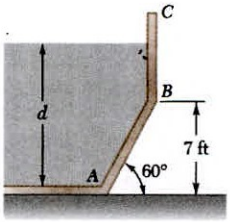
۵.ک ۵ دریچهٔ AB با عرض یکنواخت w در وضعیت نشان داده شده توسط لولای در امتداد لبه A و با یک پین برشی که در لبهٔ پایینی B دریچه است نگهداری می‌شود.

ن کنید نیروی وارد بر پین برشی B را برحسب تابعی از عمق d آب. تیر و سر پین B
سب تابع d عمق آب به‌ازای $۰٫۵۴x \le d \le ۱٫۵$ mm برای موارد زیر رسم کنید (الف)
$w = ۰٫۲۵$ mm، (ب) $w = ۰٫۵۰$ m، (ج) $w = ۰٫۷۵$ m، (د) $w = ۱$ m. چگالی آب
$\rho = ۱۰^۳$ kg/. است.



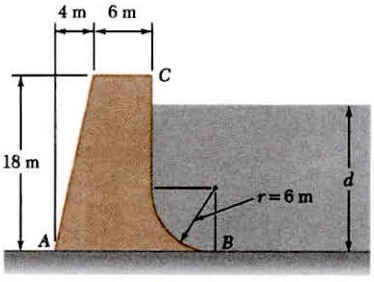
شکل م ۵.ک۵

ـ ۶ یک مخزن باز را به آهستگی با آب پر می‌کنیم. برایند و راستای نیروی فشاری وارد
، توسط آب بر مقطع ۴-ft از وجه ABC مخزن برحسب تابعی از عمق d به‌دست آورید.
ا استفاده از نرم‌افزار محاسباتی نیروی فشار را برحسب d برای $۰ \le d \le ۱۰$ ft حساب
ید. وزن مخصوص آب $۶۲٫۴$ lb/ft^۳ است.



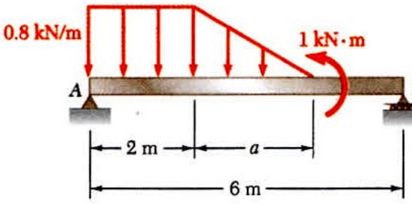
شکل م ۵.ک۶

ـ ۷ سطح مقطع یک سد بتنی مطابق شکل است. عرض سطح مقطع ۱ m است. بزرگی
. عکس‌العمل نیروهای وارد از طرف زمین بر پایه AB سد و برایند نیروهای فشاری وارد
لرف آب بر وجه B سد را برحسب تابعی از عمق d آب برای $۰ \le d \le ۱۶$ m به‌دست
اورید. چگالی بتن و آب به‌ترتیب $۲٫۴۰ \times ۱۰^۳$ kg/m^۳ و $۱۰^۳$ kg/m^۳ است.



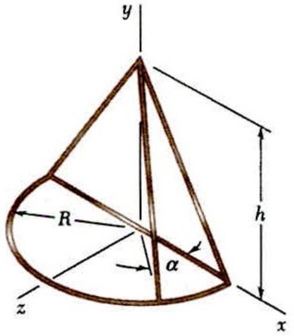
شکل م ۵.ک۷

ک ۸ تیری تحت اثر نیروهای بارگذاری نشان داده شده قرار دارد مقدار نیروهای عکس‌العمل
عمود بر تکیه‌گاههای A و B را برحسب تابعی از فاصله a برای $۰ < a \le ۳$ m به‌دست آورید.



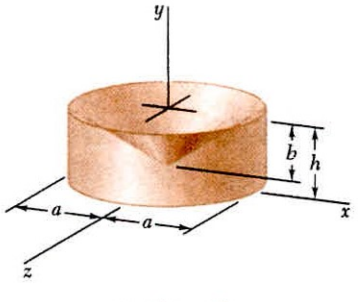
شکل م ۵.ک۸

۵.ک ۹ سازه سه‌بعدی نشان داده شده از ۵ میله فولادی نازک با قطری برابر ساخته شده است. با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی مختصات مرکز گرانی را به‌دست آورید. مطلوب است مکان مختصات مرکز گرانی را وقتی (الف) $h = ۴۰$ ft، $R = ۱۵$ ft، $\alpha = ۹۰^\circ$؛ (ب) $h = ۲۲$ in، $R = ۳۰$ in، $\alpha = ۳۰^\circ$؛ (ج) $h = ۷۰$ ft، $R = ۶۵$ ft، $\alpha = ۱۳۵^\circ$.



شکل م ۵.ک۹

۵.ک ۱۰ مختصه y مرکز هندسی جسم نشان داده شده را تعیین کنید. می‌دانیم $h = nb$ و $h = n^۲b$ است. $\bar{y}$ را برحسب تابعی از n در دو حالت استفاده $۱ \le n \le ۱۰$ و (الف) $b = ۴$ in، (ب) $b = ۶$ in، $b = ۸$ in رسم کنید.



شکل م ۵.ک۱۰